Краткие сообщения

УДК 519.95

О ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ТЕСТАХ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Н. П. Редькин[1]

Рассматриваются полные диагностические тесты для контактных схем в случае однотипных неисправностей (обрывов или замыканий) контактов. Конструктивно устанавливается, что любую булеву функцию можно реализовать контактной схемой, допускающей нетривиальный полный диагностический тест, т.е. тест, содержащий не все входные наборы.

Ключевые слова: булева функция, контактная схема, обрывы и замыкания контактов, диагностический тест схемы.

The full diagnostic test for contact circuits in the presence of one-type contact faults (breaking or closure) is considered. It is established constructively that any Boolean function can be realized by a contact circuit permitting a non-trivial full diagnostic test, i.e. test containing not all input vectors.

Key words: Boolean function, contact network, breaking and closure of contacts, diagnostic test for network.

Возьмем какую-нибудь схему (контактную схему, схему из функциональных элементов [1]), реализующую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что на эту схему воздействует некоторый источник неисправностей, под влиянием которого элементы схемы, а значит, и сама схема могут переходить в неисправные состояния и реализовывать в этих состояниях некоторые функции неисправностей [2, 3]. Среди них могут быть, вообще говоря, тривиальные функции неисправностей, совпадающие с $f(\tilde{x}), \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, и нетривиальные функции неисправностей, отличные от $f(\tilde{x})$.

Пусть $g_1(\tilde{x}), \ldots, g_k(\tilde{x})$ — все попарно различные нетривиальные функции неисправностей, которые может реализовывать схема S при всевозможных неисправностях элементов; обычно предполагается известным, какие неисправности элементов схемы может порождать рассматриваемый источник неисправностей. Множество n-разрядных булевых наборов $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$ называется (полным) проверяющим тестом схемы S, если для любой нетривиальной функции неисправности $g_i(\tilde{x})$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, в этом множестве найдется (хотя бы один) набор $\tilde{\sigma}_j$, на котором $f(\tilde{\sigma}_j) \neq g_i(\tilde{\sigma}_j)$; число наборов в тесте T называется его длиной и обозначается через $D(T)$.

Множество наборов T называется (полным) диагностическим тестом схемы S, если T является полным проверяющим тестом для S и, кроме того, для любых двух различных функций неисправностей $g_i(\tilde{x})$ и $g_j(\tilde{x})$ в T найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_i(\tilde{\sigma}) \neq g_j(\tilde{\sigma})$.

Введем обозначения: $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем тестам (рассматриваемого вида) для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям от n переменных. Будем использовать подходящие индексы для указания вида тестов: c — проверяющие, d — диагностические. Для типа возможных неисправностей используем обозначения: b — обрывы контактов, m — замыкания контактов, b–m — одновременно возможны и обрывы, и замыкания контактов.

Что касается проверяющих тестов для контактных схем, то для них к настоящему времени известны следующие результаты. В 1983 г. в [4] для $n \geqslant 4$ конструктивно получена оценка

$$D^c_{b-m}(n) \leqslant \frac{15}{16}\, 2^n,$$

т.е. установлено, что любую булеву функцию от четырех и более переменных можно реализовать контактной схемой, допускающей нетривиальный полный проверяющий тест в случае произвольных неисправностей (обрывов и замыканий) контактов. В случае однотипных неисправностей (т.е. либо только обрывов, либо только замыканий контактов) этот результат впоследствии существенно улучшался. В 1983 г. в [5] были получены оценки

[1] *Редькин Николай Петрович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. дискретной математики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: npredkin@mail.ru.

$$D_b^c(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

$$D_m^c(n) \lesssim 2^{n/(1+\frac{1}{2\log n})}$$

при растущем n.

Для диагностических тестов контактных схем в 1970 г. было установлено [6], что

$$D_{b-m}^d(n) = 2^n,$$

и, в частности, для линейных булевых функций от n переменных показано, что любая контактная схема, реализующая линейную булеву функцию, в случае обрывов и замыканий контактов допускает только тривиальный полный диагностический тест длины 2^n (содержащий все 2^n наборов значений переменных).

В настоящей заметке устанавливается, что в случае однотипных неисправностей контактов поведение функции Шеннона качественно иное.

Теорема. *При любом натуральном $n \geqslant 2$ выполняются неравенства*

$$D_b^d(n) \leqslant 2^n - 2, \quad D_m^d(n) \leqslant 2^n - 2.$$

Доказательство. Пусть задана произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. Начнем с первого неравенства, отвечающего обрывам контактов. Поскольку константы можно реализовать без контактов, т.е. вполне надежно, то формально можем считать, что константы реализуемы схемами, допускающими пустые тесты (т.е. тесты нулевой длины). Тождественная функция x и инверсия $\overline{x}$ реализуемы схемами, содержащими по одному контакту и допускающими тесты, содержащие по одному набору. С учетом сказанного далее можно считать, что рассматриваемые функции существенно зависят от всех своих переменных. В противном случае фиктивные переменные можно отбросить и получить функцию φ, равную исходной, но уже без фиктивных переменных, и если φ окажется константой или будет зависеть лишь от одной переменной, то требуемое неравенство с исходным параметром $n \geqslant 2$ будет выполняться. Далее считаем, что заданная функция f существенно зависит от всех своих n переменных, а $n \geqslant 2$.

Обозначим через $A_i(f)$ множество всех тех наборов значений переменных, на которых функция f принимает значение i, $i \in \{0,1\}$ (очевидно, $|A_0(f)| + |A_1(f)| = 2^n$, а поскольку f не является константой, то $A_0(f)$ и $A_1(f)$ — непустые множества). Рассмотрим два случая:

1) $|A_0(f)| \geqslant 2$;
2) $|A_0(f)| = 1$.

Первый случай. Функцию $f(\tilde{x})$ представим в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы F и реализуем контактной схемой S, "моделирующей" F, т.е. состоящей из $|A_1(f)|$ соединенных параллельно цепей, каждая из которых содержит n контактов переменных $x_1, \ldots, x_n$ и реализует отвечающее ей слагаемое из F. При обрывах контактов проводимость схемы может только уменьшаться и потому все функции неисправности схемы S на наборах из $A_0(f)$, как и функция f, принимают значение 0. А это означает, что все функции неисправности, включая тривиальную, т.е. функцию $f(\tilde{x})$, могут различаться между собой только на наборах из $A_1(f)$. Значит, $A_1(f)$ является полным диагностическим тестом для S и длина его не превосходит $2^n - 2$.

Второй случай. Функция $f(\tilde{x})$ обращается в нуль на единственном наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, т.е. представляет собой дизъюнкцию $\mathcal{D}_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Возьмем схему S из n параллельно соединенных контактов $x_1^{\overline{\sigma}_1}, x_2^{\overline{\sigma}_2}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$, которая, очевидно, реализует (в исправном состоянии) $\mathcal{D}_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$. Обрывы контактов в S всякий раз порождают нетривиальную функцию неисправности, которая получается из исходной дизъюнкции $\mathcal{D}_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$ вычеркиванием каких-то слагаемых (переменных), отвечающих неисправным (оборванным) контактам. Пусть M — множество булевых функций, включающее исходную функцию $f(\tilde{x}) = \mathcal{D}_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x})$ и все нетривиальные функции неисправности схемы S. Получается, что каждая функция из M представляет собой дизъюнкцию вида $x_{i_1}^{\overline{\sigma}_{i_1}} \vee x_{i_2}^{\overline{\sigma}_{i_2}} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\overline{\sigma}_{i_r}}$, $1 \leqslant r \leqslant n$, или константу 0. А это означает, что если g, g' — произвольная пара функций из M, то одна из этих функций, скажем g, содержит некоторую переменную (слагаемое) $x_i^{\overline{\sigma}_i}$, отсутствующую в другой дизъюнкции, вследствие чего на наборе $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ функция g обращается в единицу, а функция g' — в нуль. Если теперь взять множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n\}$, то тогда для любой пары функций из M в T найдется набор, на котором функции из данной пары принимают разные значения, а это означает, что T составляет полный диагностический тест длины n. Поскольку $n \leqslant 2^n - 2$ при $n \geqslant 2$, то и во втором случае требуемая оценка справедлива. Неравенство доказано.

Для доказательства второго неравенства теоремы, отвечающего замыканиям контактов, достаточно, как нетрудно заметить, предыдущие рассуждения видоизменить "двойственным" образом. В случае $|A_1(f)| \geqslant 2$ для заданной функции f можно взять контактную схему, моделирующую совершенную конъюнктивную нормальную форму и насчитывающую не более чем $2^n - 2$ множителей (дизъюнкций). Полным диагностическим тестом для нее будет множество $A_0(f)$, насчитывающее не более $2^n - 2$ наборов. А в случае $|A_1(f)| = 1$ функцию $f(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ можно реализовать цепочкой из контактов $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$; при этом полным диагностическим тестом такой схемы будет множество из n наборов $\tilde{\sigma}_1 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \tilde{\sigma}_2 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \sigma_n), \ldots, \tilde{\sigma}_n = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Теорема доказана.

Используя рассуждения из [6] при доказательстве соотношения $D^d_{b-m}(n) = 2^n$, но с учетом специфики рассматривающихся здесь неисправностей, нетрудно получить оценки $D^d_b(n) \geqslant 2^{n-1}$ и $D^d_m(n) \geqslant 2^{n-1}$; важной особенностью этих рассуждений является то, что они проводятся для контактных схем, реализующих линейные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18–01–00337 "Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
2. *Редькин Н.П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
3. *Яблонский С.В.* Элементы кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.
4. *Редькин Н.П.* О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Вып. 39. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1983. 80–87.
5. *Редькин Н.П.* О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. Вып. 40. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1983. 87–99.
6. *Мадатян Х.А.* Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. Вып. 23. М.: Наука, 1970. 103–118.

Поступила в редакцию
08.06.2017

УДК 517.928

АСИМПТОТИКА ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КУСОЧНО-ЦЕЛЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА КРИВОЙ

А. А. Голубков[1]

При больших значениях модуля спектрального параметра получена и исследована асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма–Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой в комплексной плоскости.

Ключевые слова: уравнение Штурма–Лиувилля, кривая в комплексной плоскости, спектральный параметр, асимптотика передаточной матрицы, кусочно-целый потенциал.

The asymptotics of the transfer matrix of Sturm–Liouville equation with piecewise entire potential function on a curve in the complex plane is obtained and studied for large absolute values of the spectral parameter.

Key words: Sturm–Liouville equation, curve in the complex plane, spectral parameter, asymptotics of the transfer matrix, piecewise entire potential function.

Несмотря на большое число работ, посвященных исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной плоскости (см. монографии [1–3] и библиографию в них),

[1] *Голубков Андрей Александрович* — доктор физ.-мат. наук, проф. СУНЦ МГУ, e-mail: andrej2501@yandex.ru.