УДК 531.8:510

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ МЕТОДОМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Карпович А.П., *к.т.н., доцент, ФГБОУ ВПО «Брянская ГСХА»*

Определены теоретически прогибы листовой рессоры методом операционного исчисления.

Ключевые слова: Операционное исчисление, листовая рессора, прогибы.

Summary: Defined teoritichekie leaf spring deflections method of calculus.

Key words: Operational calculus, leaf spring, deflections.

В задачах по сопротивлению материалов, таких как определение жесткости конструкций (прогибов, углов поворота), устойчивости стержней и других, приходиться решать дифференциальные уравнения второго порядка и другие сложные уравнения. Поэтому, наряду с методами дифференциального и интегрального исчисления, а также решения уравнений высших порядков, в задачах по сопротивлению материалов, теоретической и прикладной механики можно использовать метод операционного исчисления, как проверочный. Причём, чем сложнее уравнения, тем зачастую, проще они решаются методом операционного исчисления.

Метод операционного исчисления заключается в том, что уравнение, которое необходимо решить, преобразуют в его изображение. Любую функцию **X(z)** можно представить ее изображением **Y(p)**. Изображение функции определяется с помощью Лапласова преобразования:

(1)

Из сложного уравнения функции зачастую получается более простое уравнение её изображения. Уравнение изображения решается обычным порядком до определения его корней или, если возникает необходимость, можно перейти на любой стадии решения от изображения к функции с помощью формулы Римана-Меллина**:**

— (2)

На практике почти любое изображение функции можно определить по справочным таблицам.

На рисунке 1 представлена расчетная схема рессоры из трех листов (можно взять любое количество листов). Листы рессоры могут быть любой длины и толщины, что позволяет задать рессоре любую характеристику. Трением листов в расчете пренебрегаем.

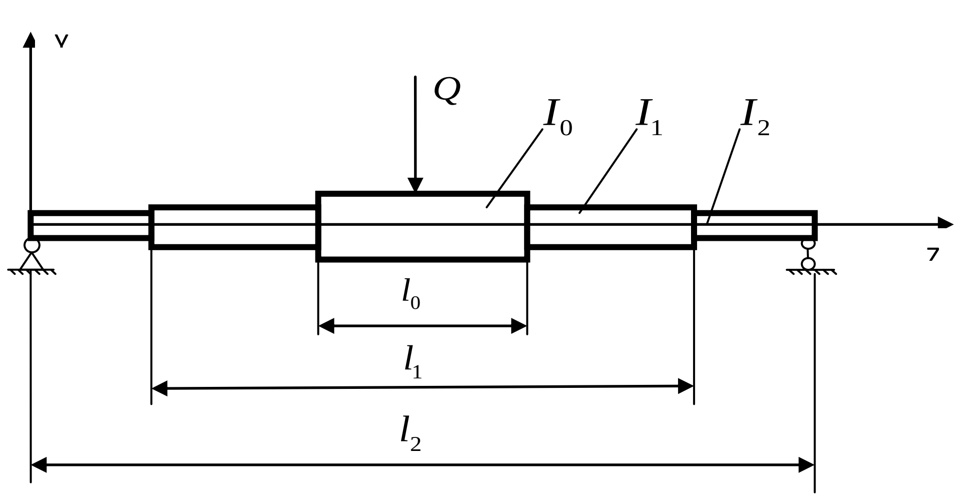

Рисунок 1

Составляем уравнение упругой линии рессоры (с помощью уравнения упругой линии можно определить прогиб в любой точке рессоры). Классическим способом решение дифференциального уравнения второго порядка с переменными сечениями очень сложно. При решении энергетическим методом необходимо относительно сложное решение для каждой рассматриваемой отдельной точки отдельно. Предлагаемым методом получаем наиболее простое решение дифференциального уравнения с переменными значениями I_i .

$$EIy''(\mathrm{z}) = \mathrm{M(z)}$$

$$\mathrm{y}''(\mathrm{z}) = \frac{M(\mathrm{z})}{EI_i} \quad - \qquad (3)$$

уравнения упругой линии рессоры с

различными осевыми моментами инерции I_i.

Так как рессора симметричная, можно рассматривать в расчете половину рессоры

$$y''(\mathrm{z}) = \left| \begin{array}{ll} \frac{Q}{2}\cdot\frac{Z}{EI_2}; & 0 < Z < \frac{l_2 - l_1}{2} \\ \frac{Q}{2}\cdot\frac{Z}{EI_1}; & \frac{l_2 - l_1}{2} < z < \frac{l_1 - l_0}{2} \\ \frac{Q}{2}\cdot\frac{Z}{EI_0}; & \frac{l_1 - l_0}{2} < z < \frac{l_0}{2} \end{array} \right.$$

Перейдем от функции к изображению левой части уравнения по формуле

$$\frac{d^n y}{dz^n} \to p^n I \;\; p \; - \left[p^{n-1} y \;\; 0 \; + p^{n-2} y' \;\; 0 \; + \ldots \mathrm{y}^{\;n-1} \;\; \right]. \qquad (4)$$

В нашем случае $y'' \;\; z \;\; \to p^2 I \;\; p \;\; - py \;\; 0 \;\; - y' \;\; 0$.

Перейдем от функции к изображению правой части уравнения по формуле

$$a < z < b \to \left(\frac{1}{p} + a \right) e^{-pa} + \left(\frac{1}{p} + b \right) e^{-pb} . \qquad (5)$$

Изображения правой части уравнения с учетом переменных сечений рессоры будет иметь вид

$$A = \frac{Q}{2E} \{ \left[\frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p} + \frac{l_2 - l_1}{2} \right) l^{-p\frac{l_2 - l_1}{2}} \right] \cdot \frac{1}{I_2} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{p} + \frac{l_2 - l_1}{2} \right) l^{-p\frac{l_2 - l_1}{2}} + \left(\frac{1}{p} + \frac{l_1 - l_0}{2} \right) l^{-p\frac{l_1 - l_0}{2}} \right] \cdot \frac{1}{I_1} +$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{p} + \frac{l_1 - l_0}{2} \right) l^{-\frac{l_1 - l_0}{2}} + \left(\frac{1}{p} + \frac{l_2}{2} \right) l^{-p\frac{l_2}{2}} \right] \cdot \frac{1}{I_0} \} . \qquad (6)$$

Решаем уравнение изображения упругой линии рессоры

$$p^2 I \;\; p \; - y' \;\; 0 \; = A$$

$$I \;\; p \; = \frac{y' \;\; 0 \; + A}{p^2} \quad . \tag{7}$$

Перейдем от изображения к функции по каждому участку

$$1)\ \mathrm{y(z) = y'}\ \ 0 \ \ - \frac{Qz^3}{12EI_0}, \qquad \text{при } \ 0 < z < \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

$$2)\ \mathrm{y(z) = y'}\ \ 0 \ \ - \frac{Qz^3}{12EI_0} + \frac{Q}{12EI_0} \cdot \left(1 - \frac{I_0}{I_1}\right)\left(z - \frac{l_2 - l_1}{2}\right)^2 \cdot \ \ z + l_1 - l_0 \ \ ;\text{при} \ \ \frac{l_2 - l_1}{2} < z < \frac{l_1 - l_0}{2}.$$

$$3)\ \mathrm{y(z) = y'}\ \ 0 \ \ + \frac{Q}{12EI_0} \cdot \left(1 - \frac{I_0}{I_2}\right)\left(z - \frac{l_1 - l_0}{2}\right)^2 \cdot \ \ z + l_2 - l_1 \ \ ;\text{при} \ \frac{l_1 - l_0}{2}\ z < \frac{l_0}{2}.$$

Получили общее уравнение упругой линии для рессоры по участкам.

Подставив граничные условия и определив $y'(0)$ получим уравнение упругой линии рессоры по каждому участку.

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y' \;\; 0 \;\; - \frac{Qz^3}{12EI_0};\ 0 = y' \;\; 0 \;\; - \frac{Qz^3}{12EI_0};\ y' \;\; 0 \; = \frac{Q\left(\frac{l}{2}\right)^3}{12EI_0} = \frac{Ql^3}{96EI_0};$$

$$1)\, y \;\; z \; = \frac{Ql^3}{96EI_0} - \frac{Qz^3}{12EI_0} = \frac{Q}{96EI_0} \;\; l^3 - 8z^3 \qquad \text{при } \ 0 < z < \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

$$2)\ \mathrm{y} \;\; z \; = \frac{Q}{96EI_0}\left[l^3 - 8z^3 + 8\left(1 - \frac{I_0}{I_1}\right) \cdot \left(z - \frac{l_1 - l_2}{2}\right)^2 \cdot \ \ z + l_1 - l_0 \ \ \right] \ \text{при} \ \ \frac{l_2 - l_1}{2} < z < \frac{l_1 - l_0}{2}.$$

$$3)\, y \;\; z \; = \frac{Q}{96EI_0}\left[l^3 + 8\left(1 - \frac{I_0}{I_2}\right) \cdot \left(z - \frac{l_1 - l_0}{2}\right) \cdot \ \ z + l_2 - l_1 \ \ \right] \ \text{при} \ \ \frac{l_1 - l_0}{2} < z < \frac{l_0}{2}.$$

Подставляя вместо z расстояние до рассматриваемой точки, определяем прогиб листовой рессоры в необходимом месте.

Традиционными способами определение прогиба рессоры в любом месте было бы значительно труднее.

Список литературы

1. Даткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М. Учпедгиз, 1959. - 265с.