

УДК 517.4

З.Г. Меджидов

Обращение лучевого преобразования тензорных полей с бесконечно удаленными источниками

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия, ул. М. Гаджиева, 43 а, 367001; Z.Medjidov@mail.ru

Отдел математики и информатики ДНЦ РАН, г. Махачкала, Россия, ул. М. Гаджиева, 45, 367001

В евклидовом пространстве R^n рассматривается задача обращения лучевого преобразования симметричных тензорных полей и преобразования Радона дифференциальных форм по неполным данным. Получена новая формула, восстанавливающая соленоидальную часть симметричного тензорного поля f произвольного ранга при условии, что его лучевое преобразование If , а также первые производные функции If , известны на n -мерном многообразии прямых, параллельных векторам некоторого заданного множества направлений Γ на единичной сфере S^{n-1} . Множество Γ удовлетворяет условию полноты, аналогичному условию Кириллова–Туя: для любой гиперплоскости H , проходящей через носитель f , существует хотя бы одно направление из Γ , параллельное H . Полученная формула обобщает известную формулу на плоскости, связывающую преобразование Радона дифференциальной формы степени 1 и преобразование Радона внешнего дифференциала этой формы. Показано, что однозначное восстановление соленоидальной части возможно по данным интегралам вдоль прямых, параллельных одной гиперплоскости. Введено n -мерное семейство двумерных плоскостей в R^n , удовлетворяющее некоторому условию полноты, и получена новая формула обращения для дифференциальных форм степени 2 по заданным интегралам вдоль плоскостей этого семейства.

Ключевые слова: *симметричное тензорное поле, лучевое преобразование, формула обращения, оператор Сен-Венана, преобразование Радона дифференциальных форм.*

1. Введение и обозначения

Введем обозначения: S^m – линейное пространство гладких ковариантных симметричных тензоров ранга m , $m \geq 0$, в евклидовом пространстве R^n ; $J(R^n, S^m)$ – пространство Шварца гладких (класса C^∞) быстро убывающих тензорных полей. Значение поля $f \in J(R^n, S^m)$ на векторах $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ будем записывать как функцию $f(x; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = f_{i_1 i_2 \dots i_m}(x) \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_m^{i_m}$ аргументов $x \in R^n$ и $\xi_i = (\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^n) \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, m$; по повторяющемуся индексу предполагается суммирование от 1 до n . Лучевое преобразование поля $f \in J(R^n, S^m)$ определим формулой

$$If(l) \equiv If(\xi, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{i_1 i_2 \dots i_m}(x + t\theta) \theta^{i_1} \theta^{i_2} \dots \theta^{i_m} dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta; \theta, \dots, \theta) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\theta; \theta^m) dt, \quad (1)$$

где $l = \{x + t\theta : t \in R\}$ – ориентированная прямая.

Задача состоит в восстановлении поля f по известной функции $g = If$. Эта задача при $n \geq 3$ является переопределенной по размерности: поле f зависит от n переменных, в то время как If зависит от $2n-2$ независимых переменных. Поэтому возникает задача реконструкции поля f по данным на n -мерном многообразии (комплексе) прямых. Примером комплекса прямых в R^n является множество прямых, направляющие

векторы которых являются радиус-векторами точек кривой Γ , принадлежащей единичной сфере S^{n-1} . Говорят, что прямые пересекают бесконечно удаленную кривую. Задачу реконструкции мы решаем при условии, что кривая Γ удовлетворяет следующему условию полноты: каждая гиперплоскость, проходящая через точки восстановления, параллельна, по крайней мере, одному вектору из Γ . Напомним, что аналогичная задача в работе [1] решена при условии, что для каждой гиперплоскости H существует C_{n+m-2}^m векторов из Γ , параллельных H . Полученная в п. 1 формула обращения обобщает известные формулы, устанавливающие связь между лучевым преобразованием векторных и тензорных полей и преобразованием Радона на плоскости [2, 3].

В п. 2 вводится в рассмотрение n -мерное семейство двумерных плоскостей; получена новая формула обращения преобразования Радона дифференциальных форм степени 2, определенного для плоскостей этого семейства.

Мы будем пользоваться обозначениями для дифференциальных операций над тензорными полями в R^n (см. [1, 3]):

$f_\xi = (\xi, \nabla_x) f$ – производная поля f по направлению вектора ξ ;

$g_\xi(x; \theta) = (\xi, \nabla_x) g(x; \theta)$ – производная поля g , как функции x , по направлению вектора

ξ ; $W : C^\infty(S^m) \rightarrow C^\infty\left(S^m \left(\wedge^k T^* R^3 \right)\right)$ – оператор Сен-Венана,

$(Wf(x))_{i_1 j_1 \dots i_m j_m} = \alpha(i_1 j_1) \dots \alpha(i_m j_m) \frac{\partial f_{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_m}}$, где $\alpha(i_k j_l)$ – оператор альтернирования:

$(\alpha(i_k j_l) g)_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{2} (g_{i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_p} - g_{i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_p})$; будем рассматривать его как функцию $2m$ векторных аргументов:

$$Wf(x, \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_m, \eta_m) = \alpha(\xi_1, \eta_1) \dots \alpha(\xi_m, \eta_m) f_{\xi_1 \dots \xi_m}(x; \eta_1, \dots, \eta_m) = \xi_1^{i_1} \dots \xi_m^{i_m} \frac{\partial^m f_{j_1 \dots j_m}(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_m}} \eta_1^{j_1} \dots \eta_m^{j_m}. \quad (2)$$

Как отмечено в работах [1, 6–8], по заданной функции g однозначно восстанавливается лишь соленоидальная часть поля f или, что то же самое, оператор Сен-Венана. Для определения оператора Сен-Венана Wf достаточно найти значения преобразования Радона $R(Wf)(p, \omega; \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_m, \eta_m) = \int_{x \cdot \omega = p} Wf(x; \xi_1, \eta_1, \dots, \xi_m, \eta_m) dx$ для всех значений аргументов: применив любую из формул обращения преобразования Радона (см. [2, 10]), можно восстановить Wf .

Задача восстановления оператора Wf по функции $g(x, \theta)$, заданной на множестве прямых, пересекающих некоторую кривую γ , решена в [8]. Кривая удовлетворяет условию полноты: каждая гиперплоскость, пересекающая носитель поля f , имеет хотя бы одну общую точку с γ . Формулы обращения по данным на других комплексах прямых получены в работах [1, 4, 6].

2. Обращение по данным на комплексе прямых, пересекающих бесконечно удаленную кривую

Теорема 1. Пусть $f \in J(R^n, S^m)$, $\Gamma \subset S^{n-1}$ – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H \subset R^n$, пересекающей носитель поля f , существует хотя бы одно направление $\theta \in \Gamma$, параллельное H . Тогда поле Wf может быть

восстановлено по заданной функции $g(x, \theta)$ и ее первым производным для прямых $l = l(x, \theta)$, где $\theta \in \Gamma$.

Доказательство. Возьмем произвольную гиперплоскость $H_{p, \omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, \omega) = p\}$ и зафиксируем вектор $\theta \in \Gamma$, параллельный H . В этой гиперплоскости рассмотрим семейство прямых, параллельных θ . Как показано в [8] (доказательство теоремы 7), достаточно доказать, что величину $I_H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \int_H Wf(y; \omega, \xi_1, \dots, \omega, \xi_m) dy$ можно вычислить для всех векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \omega^\perp$ по известным интегралам f вдоль прямых этого семейства.

Рассмотрим сначала случай, когда все векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ совпадают с θ . Пользуясь теоремой Фубини, а также доказанной в [8] формулой

$$\int_{H_{\omega, p}} Wf(x)(y; \omega, \eta_1, \dots, \omega, \eta_m) dH = \frac{1}{2^m} \int_{H_{\omega, p}} f_{\omega}^{(m)}(x)(y; \eta_1, \dots, \eta_m) dH, \quad \text{можем написать равенство}$$

$$\int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x + s\omega) \Big|_{s=0} dx = \int_H f_{\omega}^{(m)}(y; \theta^m) dH = 2^m \int_H Wf(y; \omega, \theta, \dots, \omega, \theta) dH, \quad \text{откуда следует формула}$$

$$I_H(\theta^m) = \frac{1}{2^m} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x + s\omega) \Big|_{s=0} dx. \quad (3)$$

Предположим теперь, что некоторые k векторов системы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, скажем, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, ортогональны θ , а остальные – совпадают с θ . Найдем производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^1} \dots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x + s\omega, \theta + q^1 \xi_1 + \dots + q^k \xi_k) \Big|_{q^1 = \dots = q^k = 0} \Big|_{s=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{\omega}^{(m)})_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k} (x + t\theta; \theta^m) dt \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}^{(m)}(x + t\theta; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \theta^{m-k}) dt. \end{aligned}$$

В гиперплоскости $\omega^\perp$ выберем ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, где $e_1 = \theta$, а $e_2, \dots, e_{n-1} \perp \theta$. Тогда любой вектор $y = x + t\theta \in H$ имеет однозначное разложение по этому базису: $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^{n-1} e_{n-1}$, где $y^1 = (y, \theta) = (x + t\theta, \theta) = t$. Проинтегрируем последнее равенство вдоль $(n-2)$ -мерной плоскости $\theta^\perp \cap H$, ортогональной прямым нашего семейства:

$$\begin{aligned} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q^1} \dots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x + s\omega, \theta + q^1 \xi_1 + \dots + q^k \xi_k) \Big|_{q^1 = \dots = q^k = 0} \Big|_{s=0} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_{\omega}^{(m)})_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k} (x + t\theta; e_1^m) y_1^m dH \\ &2^m \int_H Wf(y; \omega, \xi_1, \dots, \omega, \xi_k, \omega, \theta, \dots, \omega, \theta) dH. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части обращается в нуль после интегрирования по частям, поскольку $\partial_{\xi_1}(y_1^m) = 0$ в силу того, что первая координата вектора ξ_1 в базисе $e_2, \dots, e_{n-1}$ равна нулю.

Таким образом, нами доказана формула

$$\begin{aligned} I_H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \theta^{m-k}) &= \int_H Wf(y; \omega, \xi_1, \dots, \omega, \xi_k, \omega, \theta, \dots, \omega, \theta) dH \\ &= \frac{1}{2^m} \int_{\theta^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial q^1} \dots \frac{\partial}{\partial q^k} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g(x + s\omega, \theta + q^1 \xi_1 + \dots + q^k \xi_k) \Big|_{q^1 = \dots = q^k = 0} \Big|_{s=0} dx. \quad (4) \end{aligned}$$

Вычислим теперь значение функции $I_H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ для любых значений аргументов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}^n$. Каждый вектор однозначно разлагается в сумму

$$\xi_i = a_i \theta + \xi_i',$$

где $\xi_i' \in \theta^\perp$, и симметричная m -линейная функция I_H представляется в виде линейной комбинации членов вида $I_H(\xi_1', \xi_2', \dots, \xi_k', \theta^{m-k})$, которые для любого индекса $k=0$ или $1 \leq k \leq m$ можно вычислить по формулам (3) или (4).

Теорема доказана.

Пример. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ роль множества Γ играет любая большая окружность единичной сферы (бесконечно удаленная прямая).

Следствие. Пусть $H \subset \mathbb{R}^3$ – произвольная плоскость, Σ_H – комплекс прямых, параллельных H . Соленоидальная часть поля $f \in J(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^m)$ для любого $m \geq 1$ может быть восстановлена по заданной функции $g(x, \theta)$ и ее первым производным для прямых $l \in \Sigma_H$.

Для доказательства достаточно в качестве множества Γ в теореме 1 взять большую окружность единичной сферы, параллельную H .

Замечания

1. Напомним, что в методе В. Шарафутдинова ([6]) послойного обращения лучевого преобразования векторного поля ($m=1$) требуется задание функции g на комплексе $\Sigma_{H_1} \cup \Sigma_{H_2}$, где H_1, H_2 – пересекающиеся плоскости, а в случае $m=2$ наименьшим является комплекс прямых $\Sigma_{H_1} \cup \Sigma_{H_2} \cup \Sigma_{H_3}$, где H_1, H_2, H_3 – плоскости с линейно независимыми нормальными векторами.

2. Пусть $f \in J(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1)$, т. е. $f = (f_1, f_2)$ – векторное поле на плоскости. Справедлива формула, связывающая преобразование Радона функции $Wf = \frac{1}{2} \nabla \times f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$ и лучевого преобразования поля f :

$$R(Wf)(p, \omega) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} g(p\omega, \omega^\perp); \quad (5)$$

здесь $Rh(p, \omega) = \int_{(x, \omega)=p} h(x) dx$ – преобразование Радона функции h . Для тензорного поля $f \in J(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2)$ справедлива аналогичная формула:

$$R(Wf)(p, \omega) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial p^2} g(p\omega, \omega^\perp), \quad (6)$$

$$\text{где } Wf = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial (x^1)^2} - 2 \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 f_{22}}{\partial (x^2)^2} \right).$$

Перепишем формулы (5) и (6) соответственно в виде $R(Wf)(p, \omega) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(y + s\omega, \theta) \Big|_{s=0}$ и

$$R(Wf)(p, \omega) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} g(y + s\omega, \theta) \Big|_{s=0}, \quad \text{где } \theta = \omega^\perp, \quad y = p\omega, \quad p = y \times \omega = y^1 \theta^2 - y^2 \theta^1. \quad \text{Формула (4)}$$

обобщает эти формулы на случай произвольного поля $f \in J(\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^m)$. Действительно, при $n=2$ поле Wf представляет собой скалярную функцию и не действует на векторы, а аффинное подпространство $\theta^\perp \cap H$ вырождается в точку, и интеграл в правой части (4) совпадает со значением подынтегральной функции в этой точке.

3. В скалярном случае ($m=0$) восстановление функции f по формуле (4) в пространстве R^3 требует четырехкратное интегрирование. Имеется, однако, формула, содержащая лишь два интеграла ([5], стр. 74). О существовании такой формулы для случая $m>0$ автору неизвестно.

4. Применение метода работы [9] позволяет сузить комплекс прямых Σ_H из следствия. Его утверждение останется в силе, если взять лишь те прямые из Σ_H , направляющие векторы которых принадлежат сколь угодно малому ненулевому угловому диапазону.

3. Восстановление дифференциальных форм степени 2

Пусть $f = \sum f_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ – дифференциальная форма степени k в евклидовом пространстве R^n , где $1 \leq k \leq n$; $f_{i_1, \dots, i_k}(x)$ – кососимметричная по индексам $i_1, \dots, i_k$ функция. Значение f на векторах $\theta_1, \dots, \theta_k \in R^n$ определяется формулой

$$f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} \sum_{\pi \in \Pi_k} (-1)^{|\pi|} \theta_{i_{\pi(1)}} \dots \theta_{i_{\pi(k)}},$$

где Π_k – группа перестановок индексов $i_1, \dots, i_k$, во внутренней сумме производится альтернирование по этим индексам, $|\pi|$ – четность перестановки. Преобразованием Радона формы f называется функция

$$g(A) = \int_A f,$$

определенная на многообразии k -мерных аффинных подпространств в R^n . В этом пункте мы будем рассматривать дифференциальные формы степени 2.

По интегралам $g(A)$ 2-форму f можно восстановить однозначно с точностью до слагаемого, являющегося точной формой, поэтому ставится задача определения внешнего дифференциала $df = \sum_{i,j=1}^n df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j$ по заданным интегралам $g(A)$ для двумерных плоскостей $A \subset R^n$.

Если обозначить через $A^2(R^n)$ многообразие двумерных аффинных подпространств в R^n , то $\dim A^2(R^n) = 3n - 6$, и задача обращения является переопределенной по размерности при $n \geq 4$. Как и в случае лучевого преобразования тензорных полей, возникает задача нахождения таких n -мерных подмногообразий, что известных значений интегралов от формы f на этих подмногообразиях достаточно, чтобы определить df . В качестве такого подмногообразия мы рассматриваем аналог семейства прямых из п. 3, т. е. семейство двумерных плоскостей в R^n , каждая из которых параллельна паре векторов из множества $\Gamma \subset S^{n-1}$, где Γ обладает некоторым свойством полноты. Аналог многообразия прямых из п. 2 рассмотрен в работе [3]. Роль множества $\Gamma \subset S^{n-1}$ играет множество прямых в пространстве R^n . Даны лишь интегралы по плоскостям, проходящим через прямые множества Γ , а само множество Γ обладает следующим свойством: любая гиперплоскость, проходящая через носитель формы f , содержит, по крайней мере, $n-2$ прямые из Γ с линейно независимыми направляющими векторами.

Мы вычисляем покомпонентное преобразование Радона формы df , т. е. интегралы по $n-1$ -мерным гиперплоскостям, с тем, чтобы потом воспользоваться формулой обращения. Напомним, что всякую двумерную плоскость A можно задать точкой x и

парой неколлинеарных векторов η и θ , а интегралы $g(A)$ рассматривать как функцию $g(x; \eta, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + s\eta + t\theta; \eta, \theta) ds dt$, определенную на множестве $R^n \times \wedge^2 S^{n-1}$.

Теорема 2. Пусть $\Gamma \subset S^{n-1}$, $n \geq 4$, – множество направлений, обладающее свойством: для любой гиперплоскости $H_{p,\omega}$ в R^n , пересекающей носитель f , существуют $n-2$ линейно независимых направления $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-2} \in \Gamma$, параллельные $H_{p,\omega}$. Тогда для любой 2-формы f , внешний дифференциал df может быть восстановлен по заданным первым производным функции g , вычисленным по двумерным плоскостям, каждая из которых параллельна паре линейно независимых векторов $\eta, \theta \in \Gamma$.

Пусть $H = H_{p,\omega}$ – произвольная гиперплоскость. Рассмотрим величину $I_H(\lambda, \xi, \eta) = \int_H df(y; \lambda, \xi, \eta)$. Достаточно доказать, что в условиях теоремы эта величина определена для всех значений своих аргументов $\lambda, \xi, \eta \in R^n$. Обозначим семейство двумерных плоскостей из условия теоремы через $A^2(\Gamma)$.

Лемма 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Gamma$. Тогда

$$I_H(\lambda_1, \lambda_2, \omega) = \int_{\{\lambda_1, \lambda_2\}^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial s} g(x + s\omega; \lambda_1, \lambda_2) \Big|_{s=0} dx, \quad (5)$$

где $\{\lambda_1, \lambda_2\}^\perp$ – $n-2$ -мерное подпространство векторов, ортогональных векторам λ_1, λ_2 .

Доказательство сразу следует из теоремы Фубини, если воспользоваться формулой $\int_H f_\omega(y; \lambda, \xi) dH = \int_H df(y; \lambda, \xi, \omega) dH$.

Зафиксируем $\lambda \in \Gamma$ и рассмотрим произвольный вектор $\xi \in R^n$. Если ξ параллелен какой-нибудь плоскости нашего семейства $A^2(\Gamma)$, параллельной λ , то в силу линейности функции $df(y; \lambda, \xi, \omega)$ по третьей переменной и кососимметричности по аргументам λ, ξ интеграл от формы df сводится к вычислению величины вида (5).

Лемма 4. Пусть $\eta, \theta \in \Gamma$, $\xi \in \{\lambda, \theta, \omega\}^\perp$. Тогда

$$I_H(\lambda, \xi, \omega) = \int_{\{\lambda, \theta\}^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial q} g(x + r\omega; \lambda, \theta + q\xi) \Big|_{r=q=0} dx. \quad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим производные функции g :

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial q} g(x + r\omega; \lambda, \theta + q\xi) \Big|_{r=q=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_\omega)_\xi(x + s\lambda + t\theta; \lambda, \theta) ds dt + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(x + s\lambda + t\theta; \lambda, \xi) ds dt. \quad (7)$$

Выберем в подпространстве $\omega^\perp$ ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$, в котором $e_1 = \theta$, а $e_2 \in \text{Lin}\{\lambda, \theta\}$, где $\text{Lin}\{\lambda, \theta\} \subset A^2(\Gamma)$ – линейная оболочка векторов λ, θ . Пусть $\lambda = \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2$, $\sigma^2 \neq 0$. Произвольный вектор $y = x + s\lambda + t\theta \in H$ можно однозначно разложить по этому базису: $y = y^1 e_1 + y^2 e_2 + \dots + y^{n-1} e_{n-1}$. Имеем $y^1 = (y, e_1) = \sigma^1 s + t$, $y^2 = (y, e_2) = s\sigma^2$, откуда находим $t = y^1 - \frac{\sigma^1}{\sigma^2} y^2$. Проинтегрируем обе части равенства (7)

вдоль $n-2$ -мерного аффинного подпространства $\{\lambda, \theta\}^\perp \cap H$:

$$\int_{\{\lambda, \theta\}^\perp \cap H} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial q} g(x + r\omega; \lambda, \theta + q\xi) \Big|_{r=q=0} dx = \int_H (f_\omega)_\xi(y; e_2, e_1) (\sigma^2 y^1 - \sigma^1 y^2) dH + \int_H f_\omega(y; \lambda, \xi) dH.$$

В первом интеграле в правой части произведем интегрирование по частям в направлении вектора ξ . В результате он обратится в нуль, поскольку $\partial_\xi(\sigma^2 y^1 - \sigma^1 y^2) = 0$, и мы получаем формулу (6).

Следствием формул (5), (6) является следующая

Лемма 5. Пусть $\lambda \in \Gamma, \lambda \perp \omega$. Тогда для любых векторов $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ величина $I_H(\lambda, \eta, \xi)$ может быть вычислена по заданным функции и ее первым производным, определенным на плоскостях семейства $A^2(\Gamma)$.

Доказательство ничем не отличается от доказательства следствия 6 из [3].

Доказательство теоремы 2. В условиях теоремы лемма 5 позволяет вычислить величины $I_H(\lambda_k, \eta, \xi)$ $k=1, 2, \dots, n-2$ для любой гиперплоскости H и некоторых линейно независимых векторов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$, параллельных H . Остается доказать, что величину $I_H(\theta, \eta, \xi)$ можно вычислить для любой тройки векторов $\theta, \eta, \xi \in \mathbb{R}^n$. Если все три вектора параллельны H , то $I_H(\theta, \eta, \xi) = 0$. Предположим, что один из векторов, скажем, ξ , не параллелен H . Тогда найдутся числа a и b такие, что векторы $\theta' = \theta - a\xi$ и $\eta' = \eta - b\xi$ будут параллельны H , и тогда $I_H(\theta, \eta, \xi) = I_H(\theta', \eta', \xi)$.

Если один из векторов θ' и η' , скажем, θ' , принадлежит линейной оболочке $\text{Lin}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}\}$, т. е. $\theta' = \sum_{i=1}^{n-2} c_i \lambda_i$, то справедливо равенство $I_H(\theta', \eta', \xi) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i I_H(\lambda_i, \eta', \xi)$, в правой части которого все слагаемые известны в силу леммы 5. В противном случае существует такое $d \in \mathbb{R}$, что вектор $\eta'' = \eta' - d\theta'$ принадлежит $\text{Lin}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}\}$, и мы имеем равенство $I_H(\theta', \eta', \xi) = -I_H(\eta'', \theta', \xi)$, в котором правая часть снова известна в силу леммы 5.

Теорема доказана.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^4$ примером множества Γ из теоремы 2 служит множество радиус-векторов точек двух пересекающихся больших окружностей единичной сферы S^3 .

Литература

1. Denisjuk A. Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve // Inverse problems. – 2006. – № 22. – P. 399–411.
2. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. – М.: Добросвет, КГУ, 2010.
3. Palamodov V.P. Reconstruction of a differential form from Doppler transform. SIAM // J. Math. Anal. – 2009. – № 41. – P. 1713–1720.
4. Palamodov V.P. Reconstruction in Doppler tomography. – Tel Aviv University, 2009.
5. Palamodov V.P. Reconstructive Integral Geometry. – Tel Aviv University, 2003.
6. Sharafutdinov V.A. Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data // Inverse problems. – 2007. – № 23. – P. 2603–2627.
7. Sharafutdinov V.A. Integral Geometry of Tensor Fields. – Utrecht: VSP, 1994.
8. Меджидов З.Г. Обращение лучевого преобразования симметричного тензорного поля с источниками на кривой // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 6. – С. 107–113.
9. Меджидов З.Г. Восстановление векторного поля по данным его лучевого преобразования на трехмерных многообразиях прямых // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 159–166.

10. Хелгасон С. Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983.

Поступила в редакцию 15 ноября 2014 г.

UDC 517.4

Inversion of the ray transform for tensor field with infinite sources

Z.G. Medzhidov

*Dagestan State University, Makhachkala, Russia, M.Gadzhieva st., 43 a, 367001;
Z.Medjidov@mail.ru*

*Department of Mathematics and Information Science of Dagestan Research Centre of the
Russian Academy of Science, Makhachkala, Russia, M.Gadzhieva st., 45, 367001*

The inversion problem of the ray transformation of symmetric tensor fields and of the Radon transformation of differential forms with incomplete data in the Euclidean space R^n has been considered. A new reconstruction formula has been obtained that restores solenoidal part of the symmetric tensor field f of an arbitrary rank provided a ray transform If as well as the first derivatives of the function If are known on the n -dimensional manifold of lines that are parallel to vectors belonging to a given set Γ of directions on a unit sphere S^{n-1} . The set Γ satisfies the consistency condition similar to the Kirillov-Tuy condition: for any hyperplane H , intersecting a support of f there exists, at least, one direction from Γ parallel to H . The obtained formula generalizes the well-known formula on a plane connecting the Radon transform of differential form of degree 1 and Radon transform of external differential of this form. It has been shown that a unique reconstruction of the solenoidal part is possible from data of integrals along the lines parallel to one hyperplane. N -dimensional family of planes in R^n satisfied some consistency condition is introduced and the new reconstruction formula for the differential forms of degree 2 is obtained when the integrals over the planes of this family is known.

Keywords: *symmetric tensor field, ray transform, reconstruction formula, Saint-Venant operator, Radon transform of differential forms.*

Received 15 November, 2014