Математические методы анализа в экономике

УДК 519.83

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА КОРПОРАТИВНОГО ЗАЕМЩИКА БАНКА НА ОСНОВЕ СИНТЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ВАЛЬДА – СЭВИДЖА

Л. Г. ЛАБСКЕР,
кандидат физико-математических наук,
профессор кафедры математического моделирования
экономических процессов
E-mail: llabsker@mail.ru

Н. А. ЯЩЕНКО,
доцент кафедры математического моделирования
экономических процессов
E-mail: yashenko70@mail.ru

А. В. АМЕЛИНА,
кредитный аналитик департамента
корпоративного и инвестиционного
бизнеса ОАО «Банк Москвы»,
аспирант кафедры математического моделирования
экономических процессов
E-mail: AmelinaAV.FU@gmail.com
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Для решения задачи оптимизации выбора корпоративного заемщика банка в условиях неопределенности применена теоретико-игровая модель «Игра с природой», в которой оптимальность стратегий определяется с совместной точки зрения выигрышей и рисков на основе введенного в рассмотрение нового синтетического критерия Вальда – Сэвиджа.

Ключевые слова: *банк, кредит, операция, заемщик, выбор, предприятие, выигрыш, риск, игровое моделирование, критерий оптимальности.*

Банк как кредитная организация имеет исключительное право осуществлять весь спектр банковских операций. Именно кредитные операции банка по объему и значимости являются наиболее важными, так как текущие и долгосрочные его доходы в подавляющем большинстве формируются за счет кредитного портфеля. Кредиты предприятиям составляют более половины всего портфеля активов банка.

При выдаче кредита (или ссуды) всегда есть опасение, что заемщик не вернет кредит. Невоз-

врат кредита – это прямые потери банка. Поэтому предотвращение невозврата, или, по крайней мере, уменьшение риска невозврата кредитов является важнейшей задачей кредитного отдела банка. Поскольку суммы кредитных обязательств велики, банк должен быть крайне осторожным при выборе потенциального корпоративного заемщика.

Расширение доступа предприятий к финансовым ресурсам является одной из важнейших мер поддержки реального сектора экономики. При этом цели кредитования могут быть различными. В одном случае – это способ поддержания жизнеспособности предприятий в условиях временных финансовых трудностей, когда по решению уполномоченных лиц (органов) банка проводится кредитование значимых и важных для экономики России предприятий для погашения просроченной задолженности (рефинансирование). Например, в январе 2011 г. группа компаний «Ренова», которая владеет и управляет активами в металлургической, нефтяной, машиностроительной, горнодобывающей, строительной и других отраслях, привлекла клубный кредит на сумму 2 млрд швейцарских франков на рефинансирование существующей задолженности группы и финансирование общих корпоративных целей.

В другом случае это может быть пополнение оборотных средств или финансирование текущей финансово-хозяйственной деятельности. Так, в феврале 2011 г. ОАО «Мечел» привлекло 10,5 млрд руб. для пополнения оборотного капитала и финансирования строительства второй очереди шахты «Сибиргинская». Этот перечень целей кредитования не является исчерпывающим.

При не очень благоприятных обстоятельствах на основании имеющейся информации о возможных значениях финансовых показателей потенциальных заемщиков банк должен принимать решение о выборе приоритетной последовательности кредитования предприятий.

Сформулированная в статье задача решается на примере, в котором в качестве потенциальных заемщиков рассматриваются следующие предприятия горнодобывающей и металлургической промышленности: ОАО ХК «Якутуголь» (Якутуголь), ОАО «Лебединский горно-обогатительный комбинат» (ЛГОК), ОАО «Михайловский горно-обогатительный комбинат» (МГОК), ОАО «Уральская Сталь» (УС), ОАО «Оскольский электрометаллургический комбинат» (ОЭМК), ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» (ММК), ОАО «Северсталь» (Северсталь), ОАО «ГМК «Норильский никель» (Норникель).

Поскольку банк должен принимать решения в неблагоприятных условиях неопределенности, целесообразно для анализа этой задачи использовать модель «Игра с природой» [1], в которой закон распределения вероятностей условий, при которых будет приниматься решение, неизвестен, а оптимальность стратегий определяется некоторым пессимистическим критерием.

Такие пессимистические критерии, как критерий Вальда [1] для случая определения оптимальности с точки зрения выигрышей и критерий Сэвиджа [1, 8] для определения оптимальности с позиций рисков давно и прочно вошли в теорию и практику принятия решений. При этом если принимаются решения, оптимальные по критерию Вальда, полностью ориентируясь на выигрыши, то абстрагируются от рисков. И наоборот, принимая оптимальные решения по критерию Сэвиджа, абстрагируются от выигрышей.

Понятие введенного в рассмотрение нового критерия, названного критерием Вальда – Сэвиджа, позволяющего подойти к выбору стратегии, оптимальной с синтетической точки зрения (выигрышей и игровых рисков), было кратко анонсировано в докладе Л. Г. Лабскера и А. В. Амелиной «Приоритетная последовательность выбора корпоративного заемщика банка на основе синтетического критерия Вальда – Сэвиджа» на III международной научно-практической конференции «Современные проблемы моделирования социально-экономических систем», проходившей в г. Харькове 7 – 9 апреля 2011 г.).

Целью настоящей статьи являются полное определение критерия Вальда – Сэвиджа, проведение его математического анализа и применение к решению поставленной задачи об установлении приоритетного порядка кредитования потенциальных заемщиков банка.

Пусть в игре с природой игрок A обладает $m \geq 2$ альтернативными чистыми стратегиями A_i, $i \in I = \{1, 2, ..., m\}$, множество которых обозначим S^C, а природа в любой момент времени может находиться в одном из $n \geq 2$ альтернативных состояний Π_j, $j \in J = \{1, 2, ..., n\}$. Пусть

$A =$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

и $R =$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	...	Π_n
A_1	r_{11}	r_{12}	...	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	...	r_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	r_{m1}	r_{m2}	...	r_{mn}

– матрицы соответственно выигрышей и рисков игрока A, где риски определяются следующим образом: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$; а $\beta_j = \max\{a_{ij} : i \in I\}$, $j \in J$, – показатель благоприятности состояния Π_j [1].

По критерию Вальда (W-критерию): $W_i = \min\{a_{ij} : j \in J\}$ – показатель (W-показатель) эффективности стратегии A_i, $i \in I$; $W_{S^C} = \max\{W_i : i \in I\}$ – цена (W-цена) игры в чистых стратегиях; A_k – стратегия, оптимальная (W-оптимальная) во множестве S^C чистых стратегий, если $W_k = W_{S^C}$; $(S^C)^{O(W)}$ – множество стратегий W-оптимальных во множестве S^C.

По критерию Сэвиджа (Sav-критерию):

$Sav_i = \max\{r_{ij} : j \in J\}$ – показатель (Sav-показатель) неэффективности стратегии A_i, $i \in I$;

$Sav_{S^C} = \min\{Sav_i : i \in I\}$ – цена (Sav-цена) игры в чистых стратегиях;

A_k – стратегия, оптимальная (Sav-оптимальная) во множестве S^C чистых стратегий, если $Sav_k = Sav_{S^C}$;

$(S^C)^{O(Sav)}$ – множество стратегий, Sav-оптимальных во множестве S^C.

Стратегия A_{k_1} *доминирует* стратегию A_{k_2}, если выполняются неравенства $a_{k_1 j} \geq a_{k_2 j}$, $j \in J$. Если стратегия A_{k_1} доминирует стратегию A_{k_2}, то $W_{k_1} \geq W_{k_2}$ и $Sav_{k_1} \leq Sav_{k_2}$.

В самом деле, из неравенства $a_{k_1 j} \geq a_{k_2 j}$, $j \in J$, получаем $W_{k_1} = \min\{a_{k_1 j} : j \in J\} \geq \min\{a_{k_2 j} : j \in J\} = W_{k_2}$. С другой стороны, неравенство $a_{k_1 j} \geq a_{k_2 j}$, $j \in J$, влечет за собой неравенство $r_{k_1 j} = \beta_j - a_{k_1 j} \leq \beta_j - a_{k_2 j} = r_{k_2 j}$, $j \in J$, из которого имеем

$$Sav_{k_1} = \max\{r_{k_1 j} : j \in J\} \leq \max\{r_{k_2 j} : j \in J\} = Sav_{k_2}.$$

Стратегия A_k называется *доминантой* или *доминантной стратегией*, если она доминирует каждую стратегию A_i, $i \in I$.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала доминанта необходимо и достаточно, чтобы цена игры в чистых стратегиях по критерию Сэвиджа равнялась нулю* $(Sav_{S^C} = 0)$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть стратегия A_k – доминанта. Тогда $\beta_j = a_{kj}$, $j \in J$, и, следовательно, $r_{kj} = \beta_j - a_{kj} = 0$, $j \in J$. Отсюда заключаем, что $Sav_k = 0$ и так как $Sav_i \geq 0$, $i \in I$, то $Sav_{S^C} = 0$.

Достаточность. Пусть $Sav_{S^C} = 0$. Тогда найдется стратегия A_k такая, что $Sav_k = 0$. Отсюда, в силу того, что $r_{kj} \geq 0$, $j \in J$, получаем $r_{kj} = 0$, $j \in J$, т. е. $\beta_j - a_{kj} = 0$. Тогда $a_{kj} = \beta_j \geq a_{ij}$, $i \in I, j \in J$. А это означает, что стратегия A_k – доминанта.

Теорема 2. *Доминантная стратегия оптимальна во множестве чистых стратегий и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа, т. е. множество* $(S)^{O(W)} \cap (S^C)^{O(Sav)}$ *не пусто*:

$$(S)^{O(W)} \cap (S^C)^{O(Sav)} \neq \varnothing. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть стратегия A_k – доминанта. Тогда $a_{kj} \geq a_{ij}$, $i \in I, j \in J$, и, следовательно, $W_k = \min\{a_{kj} : j \in J\} \geq \min\{a_{ij} : j \in J\} = W_i$, $i \in I$. Это неравенство означает, что $W_k = W_{S^C}$ и потому $A_k \in (S)^{O(W)}$.

При условии, что стратегия A_k – доминанта, в доказательстве необходимости теоремы 1 было показано, что $Sav_k = Sav_{S^C} = 0$. Следовательно, $A_k \in (S)^{O(Sav)}$.

Замечание 1. Теорема 2 необратима. Для доказательства этого приведем следующий пример.

Пример 1. Пусть

$A =$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	W_i
A_1	2	3	2
A_2	4	1	1
β_j	4	3	$W_{S^C} = 2$

и $R =$

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Sav_i
A_1	2	0	2
A_2	0	2	2
			$Sav_{S^C} = 2$

– соответственно матрица выигрышей и порождаемая ею матрица рисков. В данном случае очевидно, что стратегия $A_1 \in (S^C)^{O(W)} \cap (S^C)^{O(Sav)}$, но не является доминантой.

Для исключения тривиального случая выбора доминантной стратегии в качестве оптимальной во множестве чистых стратегий и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа, рассмотренного в теореме 2, в дальнейшем будем предполагать, если не оговорено противное, что $Sav_i > 0, i \in I$, и следовательно, $Sav_{S^C} > 0$.

Критерии Вальда и Сэвиджа (относительно соответственно выигрышей и рисков) являются критериями крайнего пессимизма, поскольку ориентируют игрока A при выборе им стратегии на то, что природа будет находиться в наихудшем для него состоянии, т. е. ориентируют его соответственно на наименьший выигрыш и на наибольший риск.

Следующий пример доказывает, что критерии Вальда и Сэвиджа между собой несравнимы, т. е. ни одно из множеств $(S^C)^{O(W)}$ и $(S^C)^{O(Sav)}$ не является подмножеством другого.

Пример 2. Пусть A – матрица выигрышей, дополненная строкой β_j показателей благоприятности состояний природы и столбцом W_i показателей эффективности стратегий, а R – матрица рисков, порождаемая матрицей A, дополненная столбцом Sav_i показателей неэффективности стратегий:

$A =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	W_i
A_1	0	2	0	100	0
A_2	9	10	8	10	8
β_j	9	10	8	100	$W_{S^C} = 8$

$R =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Sav_i
A_1	9	8	8	0	9
A_2	0	0	0	90	90
					$Sav_{S^C} = 9$

Как видно из последних столбцов этих матриц W-цена игры $W_{S^C} = 8$, а Sav-цена игры $Sav_{S^C} = 9$. Таким образом, $(S^C)^{O(W)} = \{A_2\}$, $(S^C)^{O(Sav)} = \{A_1\}$. Следовательно, $(S^C)^{O(W)} \not\subset (S^C)^{O(Sav)}$ и $(S^C)^{O(Sav)} \not\subset (S^C)^{O(W)}$.

Введем в рассмотрение *выигрыш-показатель* $\alpha \in [0, 1]$ и *риск-показатель* $1 - \alpha$ степени предпочтения, отдаваемого игроком A соответственно выигрышам и рискам. Выбор игроком A значения выигрыш-показателя α является субъективным и связан с психологическими особенностями игрока A, определяющими его отношение к выигрышам и рискам.

При $\alpha = 0$ и, следовательно, $1 - \alpha = 1$, игрок A при выборе стратегии абстрагируется от выигрышей, сконцентрировав внимание только на рисках. И наоборот, при $\alpha = 1$ игрок A во главу угла ставит выигрыши, абстрагируясь от рисков.

Критерий Вальда – Сэвиджа с выигрыш-показателем $\alpha \in [0, 1]$ [$(WSav)$ (α) -критерий], определяется следующими составляющими:

$(WSav)_i(\alpha) = \alpha W_i - (1 - \alpha)\, Sav_i$ – показатель [$(WSav)$ (α) -показатель] эффективности стратегии A_i, $i \in I$;

$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\}$ – цена [$(WSav)$ (α) -цена] игры в чистых стратегиях;

стратегию A_k назовем оптимальной [$(WSav)$ (α)-оптимальной] во множестве S^C чистых стратегий, если $(WSav)_k(\alpha) = (WSav)_{S^C}(\alpha)$;

$(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$ – множество стратегий, $(WSav)$ (α)-оптимальных во множестве S^C чистых стратегий.

При $\alpha = 0$ имеем $(WSav)_i(\alpha) = (WSav)_i(0) = -Sav_i$ и, таким образом, $(WSav)(\alpha)$-критерий превращается в критерий, «противоположный» Sav-критерию. При $\alpha = 1$ имеем $(WSav)_i(\alpha) = (WSav)_i(1) = W_i$ и $(WSav)(\alpha)$-критерий превращается в W-критерий.

Показатель эффективности стратегии A_i [$(WSav)(\alpha)$-критерию] можно представить в форме $(WSav)_i(\alpha) = (W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i$ $i \in I$, $\alpha \in [0, 1]$, из которой видно, что $(WSav)_i(\alpha)$ является линейной функцией аргумента $\alpha \in [0, 1]$ с угловым коэффициентом $(W_i + Sav_i)$, который может быть положительным, нулевым или отрицательным.

Критерий Вальда – Сэвиджа по смысловому содержанию принципиально отличается от критерия Гурвица. Критерий Гурвица относительно выигрышей [1, 7] представляет собой взвешенную комбинацию крайне пессимистического критерия Вальда и крайне оптимистического максимаксного критерия, а критерий Гурвица относительно рисков является взвешенной комбинацией крайне пессимистического критерия Сэвиджа и крайне оптимистического миниминного критерия [1]. В отличие от этого, критерий Вальда – Сэвиджа представляет собой линейную комбинацию крайне пессимистических критериев Вальда и Сэвиджа и потому сам является крайне пессимистическим.

Для каждой стратегии A_i можно установить точные границы изменения показателя эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ при изменении $\alpha \in [0, 1]$. Предварительно введем следующие обозначения: $I_> = \{i \in I : W_i > Sav_i\}$, $I_= = \{i \in I : W_i = Sav_i\}$, $I_< = \{i \in I : W_i < Sav_i\}$. Множества $I_>$, $I_=$, $I_<$ не пересекаются и $I = I_> \cup I_= \cup I_<$.

Теорема 3. *Справедливы следующие точные соотношения*:

$$-Sav_i \le (WSav)_i(\alpha) \le W_i,\ i \in I_>,\ \alpha \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$-Sav_i = (WSav)_i(\alpha) = W_i,\ i \in I_=,\ \alpha \in [0, 1]; \quad (3)$$

$$W_i \le (WSav)_i(\alpha) \le -Sav_i,\ i \in I_<,\ \alpha \in [0, 1]. \quad (4)$$

Доказательство. Так как показатель эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ является линейной функцией аргумента $\alpha \in [0, 1]$, то свои наименьшее и наибольшее значения он принимает на концах отрезка [0, 1]. Но какое из значений $(WSav)_i(0) = -Sav_i$ и $(WSav)_i(1) = W_i$ будет наименьшим, а какое – наибольшим, зависит от углового коэффициента $(W_i + Sav_i)$. Если $i \in I_-$, то $W_i + Sav_i > 0$ и, следовательно, справедливо неравенство (2). Если $i \in I_=$, то $W_i + Sav_i = 0$ и, потому имеет место равенство (3). Если $i \in I_<$, то $W_i + Sav_i < 0$ и, следовательно, справедливо неравенство (4).

Так как в неравенстве (2) левая и правая границы достигаются соответственно при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 1$, а в неравенстве (4) – соответственно при $\alpha = 1$ и при $\alpha = 0$, то неравенства (2) и (4) являются точными.

Приведем пример игры с природой, в которой каждое из множеств $I_>$, $I_=$, $I_<$ не пусто.

Пример 3. Пусть имеем игру с природой, в которой

$A =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	W_i
A_1	–1	3	–1
A_2	–2	4	–2
A_3	–3	6	–3
β_j	–1	6	$W_{S^C} = -1$

и $R =$

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Sav_i
A_1	0	3	3
A_2	1	2	2
A_3	2	0	2
			$Sav_{S^C} = 2$

– соответственно матрица выигрышей и матрица рисков. Матрица A не содержит доминируемых строк. В данном случае $I = \{1, 2, 3\}$ и $W_1 = -1 > -3 = -Sav_1$, $W_2 = -2 = -Sav_2$, $W_3 = -3 < -2 = -Sav_3$, т. е. $I_> = \{1\}$, $I_= = \{2\}$, $I_< = \{3\}$.

В следующей теореме устанавливаются точные границы изменения $(WSav)(\alpha)$-цены игры в чистых стратегиях при изменении выигрыш-показателя $\alpha \in [0, 1]$.

Теорема 4. *Справедливы следующие точные неравенства*:

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) \le W_{S^C} \text{ при } W_{S^C} \ge 0, \ \alpha \in [0, 1], \quad (5)$$

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) \le -Sav_{S^C} \text{ при } W_{S^C} < 0, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (6)$$

Доказательство. Так как $I_> \subset I$, то для всех номеров $i \in I_>$ по правому неравенству (2) имеем

$$(WSav)_i(\alpha) \le W_i \le \max\{W_i : i \in I_>\} \le$$
$$\le \max\{W_i : i \in I\} = W_{S^C}, \ i \in I_>, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (7)$$

Так как $I_= \subset I$, то для всех номеров $i \in I_=$ по правому равенству (3) имеем

$$(WSav)_i(\alpha) = W_i \le \max\{W_i : i \in I_=\} \le$$
$$\le \max\{W_i : i \in I\}, \ i \in I_=, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (8)$$

Так как $I_< \subset I$, то для всех номеров $i \in I_<$ по правому неравенству (4) имеем

$$(WSav)_i(\alpha) \le -Sav_i \le -\min\{Sav_i : i \in I_<\} \le$$
$$-\min\{Sav_i : i \in I\} = -Sav_{S^C}, \ i \in I_<, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (9)$$

Так как $Sav_{S^C} > 0$, то из неравенства (9) получаем:

$$(WSav)_i(\alpha) < 0, \ i \in I_<, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (10)$$

Если $W_{S^C} \ge 0$, то из неравенств (7), (8) и (10) получаем неравенство $(WSav)_i(\alpha) \le W_{S^C}$, $i \in I$, $\alpha \in [0, 1]$. Так как правая часть этого неравенства не зависит от номера $i \in I$, то оно будет справедливым в частности и для номера i, максимизирующего его левую часть, т. е. будет справедливым неравенство (5).

Если $W_{S^C} < 0$, то $W_i < 0$, $i \in I$. Но тогда $I = I_<$ и, следовательно, справедливо неравенство (9) для всех $i \in I$. Поскольку правая часть неравенства (9) не зависит от номера i, то получаем неравенство (6).

Поскольку неравенства (5) и (6) превращаются в равенства соответственно при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, они являются точными.

Отметим, что если $W_{S^C} > 0$, то найдутся номера $i \in I$ такие, что $W_i > 0$ и для этих номеров будет выполняться неравенство $W_i > -Sav_i$, поскольку $Sav_i > 0$ и, следовательно, $-Sav_i < 0$. Таким образом:

$$\{i \in I : \ W_i > 0\} \ne \varnothing \text{ и}$$
$$\{i \in I : \ W_i > 0\} \subset I_>, \text{ при } W_{S^C} > 0. \quad (11)$$

В следующей теореме дается условие, при котором номер $k \in I_> \cup I_=$ (и, следовательно, $k \notin I_<$), т. е. будет выполняться неравенство $W_k \ge -Sav_k$.

Теорема 5. *Пусть при выборе стратегии A_k наименьший выигрыш достигается при состоянии природы Π_l, т. е. наименьший выигрыш в k-й строке матрицы выигрышей стоит в l-м столбце*:

$$W_k = \min\{a_{kj} : \ j \in J\} = a_{kl}, \quad (12)$$

Если при этом наибольший выигрыш при состоянии природы Π_l неотрицателен:

$$\beta_1 = \max\{a_{il} : \ i \in I\} \ge 0, \quad (13)$$

тогда

$$W_k \ge -Sav_k, \text{ т. е. } k \in I_> \cup I_=. \quad (14)$$

Доказательство. В силу неравенства (13), $r_{kl} = \beta_l - a_{kl} \ge -a_{kl}$. Тогда $Sav_k = \max\{r_{kj} : j \in J\} \ge r_{kl} \ge -a_{kl}$, откуда, в силу равенства (12), получим неравенство (14).

Замечание 2. Теорема 5 необратима. Для доказательства этого достаточно привести пример игры с природой, для которой найдется номер $k \in I_> \cup I_=$, т. е. такой, что будет выполняться неравенство (14), но тем не менее не будет выполняться неравенство (13), т. е. справедливым будет неравенство $\beta_l < 0$.

В примере 3, $k = 1 \in I_>$, поскольку $W_1 = -1 > -3 = -Sav_1$. При этом $W_1 = -1 = a_{11}$, т. е. $l = 1$. Но $\beta_l = \beta_1 = -1 < 0$.

В этом же примере $k = 2 \in I_=$, так как $W_2 = -2 = -Sav_2$ и $W_2 = -2 = a_{21}$, т. е. $l = 1$. Но тем не менее $\beta_l = \beta_1 = -1 < 0$.

Теорема 6. *Если выполняется равенство* (12) *и*

$$W_k < -Sav_k, \quad (15)$$

т. е. $k \in I_<$, то

$$\beta_l < 0. \quad (16)$$

Доказательство. Используя определение рисков, равенство (12), определение показателей неэффективности стратегий и неравенство (15), будем иметь: $\beta_l = \beta_l - a_{kl} + a_{kl} = r_{kl} + a_{kl} = r_{kl} + W_k \le Sav_k + W_k < 0$, т. е. неравенство (16) доказано.

В теореме 4 установлены верхние границы для $(WSav)_{S^C}(\alpha)$. В следующих теоремах устанавливаются нижние границы.

Теорема 7. *Если игра с природой такова, что*

$$I = I_> \cup I_=, \quad (17)$$

то

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) \ge -Sav_{S^C}, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (18)$$

Доказательство. Используя равенство (17), определения множеств $I_>$, $I_=$ и неотрицательность показателя α, будем иметь

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\} =$$
$$= \max\{(WSav)_i : \ i \in I_> \cup I_=\} =$$

$$= \max\{(W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i : i \in I_> \cup I_=\} \geq$$
$$\geq \max\{-Sav_i : i \in I_> \cup I_=\} =$$
$$= \max\{-Sav_i : i \in I\} = -Sav_{S^C},$$

т. е. неравенство (18) доказано.

Теорема 8. *Если игра с природой такова, что*

$$I = I_= \cup I_<, \quad (19)$$

то

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) \geq W_{S^C}, \ \alpha \in [0, 1]. \quad (20)$$

Доказательство. Используя неравенство $W_i + Sav_i \leq 0$, вытекающее из равенства (19), и то, что $\alpha \leq 1$, будем иметь

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha): i \in I\} =$$
$$= \max\{(WSav)_i : i \in I_= \cup I_<\} =$$
$$= \max\{(W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i : i \in I_= \cup I_<\} \geq$$
$$\geq \max\{W_i + Sav_i - Sav_i : i \in I\} = \max\{W_i : i \in I\} = W_{S^C},$$

т. е. доказано неравенство (20).

Замечание 3. Теоремы 7 и 8 устанавливают для $(WSav)_{S^C}(\alpha)$ оценки снизу при условиях соответственно (17): $I = I_> \cup I_=$ и (19): $I = I_= \cup I_<$. Остается открытым случай $I = I_> \cup I_= \cup I_<$, где $I_> \neq \emptyset$ и $I_< \neq \emptyset$.

Из определений $(WSav)_{S^C}(\alpha)$, $(WSav)_i(\alpha)$, W_{S^C} и Sav_{S^C} будем иметь:

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\} =$$
$$= \max\{\alpha W_i - (1-\alpha)Sav_i : i \in I\} =$$
$$= \max\{\alpha W_i + (\alpha - 1)Sav_i : i \in I\} \leq$$
$$\leq \max\{\alpha W_i : i \in I\} + \max\{(\alpha - 1)Sav_i : i \in I\} =$$
$$= \alpha \max\{W_i : i \in I\} + (1-\alpha) \max\{-Sav_i : i \in I\} =$$
$$= \alpha W_{S^C} + (1-\alpha)(-\min\{Sav_i : i \in I\}) =$$
$$= \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) \leq \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (21)$$

Заметим, что неравенство (5) следует из неравенства (21). В самом деле, при $W_{S^C} \geq 0$ справедливо неравенство

$$-(1-\alpha)W_{S^C} \leq (1-\alpha)Sav_{S^C}, \ \alpha \in [0, 1], \quad (22)$$

поскольку $\alpha \leq 1$ и $Sav_{S^C} > 0$. Из неравенства (22) имеем: $\alpha W_{S^C} - W_{S^C} \leq (1-\alpha)Sav_{S^C}$, $\alpha \in [0, 1]$, откуда $\alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C} \leq W_{S^C}$, $\alpha \in [0, 1]$. Из этого неравенства и неравенства (21) получаем неравенство (5). Таким образом, неравенство (21) сильнее неравенства (5).

Так как

$$(WSav)_{S^C}(0) = \max\{(WSav)_i(0) : i \in I\} =$$
$$= \max\{(W_i + Sav_i) \cdot 0 - Sav_i : i \in I\} =$$
$$= \max\{-Sav_i : i \in I\} = -\min\{Sav_i : i \in I\} = -Sav_{S^C},$$

то при $\alpha = 0$ неравенство (21) превращается в равенство.

Так как

$$(WSav)_{S^C}(1) = \max\{(WSav)_i(1) : i \in I\} =$$
$$= \max\{(W_i + Sav_i) \cdot 1 - Sav_i : i \in I\} =$$
$$= \max\{W_i : i \in I\} = W_{S^C},$$

то при $\alpha = 1$ неравенство (21) также превращается в равенство.

Естественно возникает вопрос об условиях, при которых неравенство (21) превращается в равенство, если $0 < \alpha < 1$.

Теорема 9. *Пусть* $\alpha \in (0, 1)$. *Для того чтобы неравенство* (21) *было равенством, необходимо и достаточно, чтобы существовала стратегия, оптимальная во множестве чистых стратегий и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа, т. е. чтобы выполнялось условие* (1).

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть при данном фиксированном $\alpha \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (23)$$

Очевидно, что при любом α существует $(WSav)(\alpha)$-оптимальная стратегия. Пусть $A_k \in (S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$. Тогда по определениям $(WSav)(\alpha)$ -оптимальности стратегии и $(WSav)(\alpha)$-показателя эффективности стратегии будем иметь

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = (WSav)_k(\alpha) = \alpha W_k - (1-\alpha)Sav_k, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (24)$$

Допустим, что стратегия $A_k \notin (S^C)^{O(Sav)}$. Тогда $Sav_k > Sav_{S^C}$. Отсюда, так как $0 < \alpha < 1$ и, следовательно, $1-\alpha > 0$, получим: $(1-\alpha)Sav_k > (1-\alpha)Sav_{S^C}$. Из этого неравенства и равенства (24) следует неравенство $(WSav)_{S^C}(\alpha) < \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C}$, $\alpha \in [0, 1]$, противоречащее равенству (23). Таким образом, допущение неверно, и

$$A_k \in (S^C)^{O(Sav)}. \quad (25)$$

Теперь допустим, что $A_k \notin (S^C)^{O(W)}$. В таком случае $W_k < W_{S^C}$. Отсюда в силу положительности α получим неравенство $\alpha W_k < \alpha W_{S^C}$. Из этого неравенства и равенства (24) вытекает неравенство $(WSav)_{S^C}(\alpha) < \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_k \leq \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C}$, $\alpha \in [0, 1]$, которое также противоречит равенству (23). Полученное противоречие доказывает принадлежность

$$A_k \in (S^C)^{O(W)}. \quad (26)$$

Из выражений (25) и (26) следует справедливость условия (1). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (1) и для определенности $A_k \in (S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)}$. Тогда, используя определения $(WSav)(\alpha)$-показа-

теля эффективности стратегии и $(WSav)(\alpha)$-цены игры в чистых стратегиях, получим неравенство

$$\alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C} = \alpha W_k - (1-\alpha)Sav_k =$$
$$= (WSav)_k(\alpha) \le (WSav)_{S^C}(\alpha), \ \alpha \in (0,\ 1).$$

Из этого неравенства и неравенства (21) следует равенство (23). Достаточность доказана.

Замечание 4. При доказательстве необходимости теоремы 9 стратегия A_k была любой из множества $(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$ и, следовательно, на самом деле доказано большее, чем было сформулировано, а именно, доказано, что если при некотором $\alpha \in (0, 1)$ выполняется равенство (23), то

$$(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]} \subset (S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)}, \ \alpha \in (0,\ 1), \quad (27)$$

т. е. каждая стратегия, оптимальная во множестве S^C чистых стратегий по критерию Вальда – Сэвиджа, оптимальна во множестве S^C и по критерию Вальда и по критерию Сэвиджа.

На основании теоремы 9 можно доказать теорему о структуре множества $(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$ при $\alpha \in (0, 1)$.

Теорема 10. *Если выигрыш-показатель* α *не принимает крайних значений* 0 *и* 1*, то множество стратегий, оптимальных во множестве чистых стратегий по критерию Вальда – Сэвиджа, совпадает с множеством стратегий, оптимальных во множестве чистых стратегий и по критерию Вальда, и по критерию Сэвиджа, тогда и только тогда, когда последнее множество не пусто.*

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть справедливо равенство

$$(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]} = (S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)}, \ \alpha \in (0,\ 1). \quad (28)$$

Из равенства (28), в силу того, что $(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]} \neq \varnothing$, следует справедливость условия (1).

Достаточность. Пусть выполняется условие (1). Тогда по достаточной части теоремы 9 справедливо равенство (23), и, следовательно, по замечанию 4 справедливо включение (27).

Докажем обратное включение. При выполнении условия (1) пусть для определенности $A_k \in (S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)}$. Отсюда и из равенства (23) получаем равенство

$$(WSav)_k(\alpha) = \alpha W_k - (1-\alpha)Sav_k =$$
$$= \alpha W_{S^C} - (1-\alpha)Sav_{S^C} = (WSav)_{S^C}(\alpha),$$

которое означает, что $A_k \in (S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$. Этим доказано включение

$$(S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)} \subset (S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}, \ \alpha \in (0,\ 1). \quad (29)$$

Включения (27) и (29) доказывают равенство (28).

Равенство (28), эквивалентное условию (1) при $\alpha \in (0, 1)$, показывает, что структура множества $(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]}$ стратегий, оптимальных во множестве чистых стратегий по критерию Вальда – Сэвиджа с выигрыш-показателем α, не зависит от значений $\alpha \in [0, 1]$.

Условное схематическое представление ситуации, описанной в теореме 10, представлено на рис. 1.

Можно дать геометрическую интерпретацию условию (1). Предварительно отметим, что поскольку $(WSav)(\alpha)$-показатель эффективности стратегии A_i есть линейная функция $(WSav)_i(\alpha) = (W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i$ аргумента $\alpha \in [0, 1]$, то ее график есть отрезок. Следовательно, цена игры $(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\}$ есть верхняя огибающая отрезков $(WSav)_i(\alpha)$, $i \in I$, которая представляет собой ломаную, состоящую из не более чем m звеньев (m-число чистых стратегий).

Теорема 11. *Для того чтобы ломаная, представляющая собой график цены игры* $(WSav)_{S^C}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, *являлась отрезком* (*т. е. ломаной, состоящей из одного звена*) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (1).

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть графиком цены игры $(WSav)_{S^C}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, является отрезок. Тогда, так как

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\} =$$
$$= \max\{(W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i : i \in I\} \quad (30)$$

этим отрезком будет один из отрезков $(WSav)_i(\alpha)$, $i \in I$. Пусть для определенности

$$(WSav)_{S^C}(\alpha) = (W_k + Sav_k)\alpha - Sav_k. \quad (31)$$

Из (30) и (31) имеем

$$(W_k + Sav_k)\alpha - Sav_k \ge (W_i + Sav_i)\alpha - Sav_i,$$
$$i \in I, \quad \alpha \in (0,\ 1). \quad (32)$$

При $\alpha = 0$ из (32) получаем неравенство: $-Sav_k \ge -Sav_i$, $i \in I$, или

$$Sav_k \le Sav_i, \ i \in I. \quad (33)$$

Неравенство (33) означает, что $Sav_k = Sav_{S^C}$, т. е.

$$A_k \in (S^C)^{O(Sav)}. \quad (34)$$

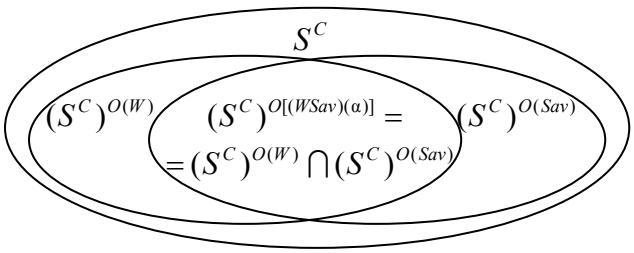


Рис. 1. Условное схематическое представление ситуации, описанной в теореме 10

При $\alpha = 1$ из (32) имеем

$$W_k \geq W_i,\ i \in I, \quad (35)$$

откуда следует, что $W_k = W_{S^C}$. А это равенство означает, что

$$A_k \in (S^C)^{O(W)}. \quad (36)$$

Принадлежности (34) и (36) доказывают условие (1). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется условие (1) и для определенности $A_k \in (S^C)^{O(W)} \bigcap (S^C)^{O(Sav)}$. Тогда имеют место принадлежности (34) и (36). Из принадлежности (34) следует неравенство (33), а из принадлежности (36) следует неравенство (35). Используя неравенства (33) и (35), будем иметь

$$(WSav)_k(\alpha) = \alpha W_k - (1-\alpha) Sav_k \geq$$

$$\geq \alpha W_i - (1-\alpha) Sav_i = (WSav)_i(\alpha),\ i \in I.$$

Это означает, что $(WSav)_k(\alpha) = \alpha W_k - (1-\alpha) Sav_k$ является верхней огибающей отрезков $(WSav)_i(\alpha) = \alpha W_i - (1-\alpha) Sav_i$. К тому же графиком этой верхней огибающей $(WSav)_k(\alpha)$ является отрезок. Достаточность доказана.

Проведем математическую формализацию поставленной задачи об установлении приоритетного порядка кредитования потенциальных заемщиков. Другими словами, сформируем реализационную структуру модели.

Игроком A является банк (руководство банка, департамент кредитования, кредитный аналитик, принимающие решение). Игрок A обладает чистыми стратегиями: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, состоящими в кредитовании соответственно предприятий Якутуголь, ЛГОК, МГОК, УС, ОЭМК, ММК, Северсталь, Норникель. Природа $П$, в качестве которой рассматривается ситуация на кредитном рынке, может пребывать в одном из пяти состояний $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, $П_5$, представляющих собой даты ежеквартальной финансовой отчетности предприятий по состоянию соответственно на 30.09.2009, 31.12.2009, 31.03.2010, 30.06.2010 и на 30.09.2010.

Моделировать предпочтения банка при выборе предприятия как потенциального объекта кредитования в условиях неопределенности (риска) можно с точки зрения нормы прибыли этого предприятия. Для оценки прибыли, полученной на собственный капитал, или чистой прибыли, финансовые расходы вычитают из операционной прибыли. По решению собственников чистая прибыль может быть использована на выплату дивидендов, на создание резервных и иных фондов, направлена на материальное стимулирование работников. Оставшаяся нераспределенная часть чистой прибыли реинвестируется в дальнейшую деятельность и способствует росту капитала организации. Поэтому в качестве выигрышей игрока A будем использовать показатель «Чистая прибыль за квартал, млн руб.» [2] для предприятий Якутуголь, ЛГОК, МГОК, УС, ОЭМК, ММК, Северсталь, Норникель [3–6, 9–12]. Таким образом, получаем матрицу выигрышей (рис. 2)

Оптимальность стратегий будем понимать в смысле критерия Вальда – Сэвиджа.

В общем виде алгоритм решения рассматриваемой задачи с применением критерия Вальда – Сэвиджа может выглядеть так:

- из показателей ежеквартальной прибыли корпоративных заемщиков банка формируем матрицу выигрышей $A = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$;
- проверяем наличие в матрице доминантной стратегии; если стратегия A_k, $k \in I$ – доминанта, то в банковском перечне приоритетов по выдаче кредитов k-й заемщик ставится на первое место;
- определяем показатели эффективности стратегий W_i, $i \in I$, по критерию Вальда;
- находим показатели благоприятности состояний природы β_j, $j \in J$;
- формируем матрицу рисков $R = (r_{ij})_{i \in I, j \in J}$, , порождаемую матрицей выигрышей A;
- определяем в матрице рисков показатели неэффективности Sav_i, $i \in I$ по критерию Сэвиджа;

A_i \ $П_j$	$П_1$ III кв. 2009	$П_2$ IV кв. 2009	$П_3$ I кв. 2010	$П_4$ II кв. 2010	$П_5$ III кв. 2010	W_i
A_1	1 336	685	1 324	2 725	2 464	685
A_2	1 732	581	3 140	6 114	6 665	581
A_3	786	1 158	2 173	5 365	–7 202	–7 202
A_4	513	84	137	210	–872	–872
A_5	1 855	787	2 308	567	1 752	567
A_6	7 194	7 478	6 310	677	8 194	677
A_7	12 210	–7 309	8 404	5 027	5 820	–7 309
A_8	21 575	32 391	50 587	18 629	44 943	18 629
β_j	21 575	32 391	50 587	18 629	44 943	$W_{S^C} = 18\,629$

Рис. 2. Матрица выигрышей

– находим выражения показателей эффективности $(WSav)_i(\alpha)$, $i = 1,..., 8$, стратегий A_i, $i \in I$ по критерию Вальда – Сэвиджа; графически они представляют собой отрезки;
– находим значения $(WSav)_i(0)$ и $(WSav)_i(1)$ показателей эффективности $(WSav)_i(\alpha)$, $i = 1,..., 8$, в концах отрезка [0, 1], т. е. ординаты левых и правых концов этих отрезков;
– по взаимному расположению левых и правых концов этих отрезков устанавливаем пересекающиеся отрезки (для удобства можно составить таблицу пересечений отрезков);
– решая уравнения $(WSav)_k(\alpha) = (WSav)_l(\alpha)$ для пересекающихся отрезков $(WSav)_k(\alpha)$ и $(WSav)_l(\alpha)$, находим значения выигрыш-показателей $\alpha \in [0, 1]$, т. е. абсциссы α_{kl} точек пересечения этих отрезков, разбивающие отрезок [0, 1] на ряд частей (для удобства решения соответствующих уравнений можно использовать сервисную функцию в Excel «Поиск решения»);
– вычисляем значения показателя эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ каждой стратегии A_i в каждой точке α_{kl};
– по вычисленным значениям устанавливаем приоритетную последовательность выбора стратегий при значениях выигрыш-показателей α_{kl} и в промежутках между ними.

Из сформированной матрицы выигрышей (см. рис. 2) видим, что стратегия A_8 является единственной доминантой и потому, на основании теорем 2 и 10, $(S^C)^{O[(WSav)(\alpha)]} = \{A_8\}$, $\alpha \in [0, 1]$. Таким образом, при любом значении выигрыш-показателя $\alpha \in [0, 1]$ стратегия A_8 в приоритетной последовательности займет первое место.

В последнем столбце матрицы выигрышей проставляем W-показатели эффективности стратегий W_i, $i \in I$, и цену игры $W_{S^C} = 18\,629$, а в последней строке – показатели благоприятности состояний природы β_j, $j \in J$.

Матрица рисков, порождаемая матрицей выигрышей, имеет вид матрицы на рис. 3.

В последнем столбце матрицы рисков проставлены показатели неэффективности чистых стратегий Sav_i, $i \in I$, и цена игры $Sav_{S^C} = 0$ в чистых стратегиях.

Используя последние столбцы матриц выигрышей (см.рис. 2) и рисков (см рис 3), находим:

$$\begin{cases} (WSav)_1(\alpha) = (685 + 49\,263)\alpha - 49\,263 = \\ = 49\,948\alpha - 49\,263, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_2(\alpha) = (581 + 47\,447)\alpha - 47\,447 = \\ = 48\,028\alpha - 47\,447, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_3(\alpha) = (-7\,202 + 52\,145)\alpha - 52\,145 = \\ = 44\,943\alpha - 52\,145, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_4(\alpha) = (-872 + 50\,450)\alpha - 50\,450 = \\ = 49\,578\alpha - 50\,450, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_5(\alpha) = (567 + 48\,279)\alpha - 48\,279 = \\ = 48\,846\alpha - 48\,279, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_6(\alpha) = (677 + 44\,277)\alpha - 44\,277 = \\ = 44\,954\alpha - 44\,277, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_7(\alpha) = (-7\,309 + 42\,183)\alpha - 42\,183 = \\ = 34\,874\alpha - 42\,183, \ \alpha \in [0, \ 1]; \\ (WSav)_8(\alpha) = (18\,629 + 0)\alpha - 0 = 18\,629\alpha, \\ \alpha \in [0, \ 1]. \end{cases} \quad (37)$$

Вычисленные значения $(WSav)_i(\alpha)$ в концах отрезка [0, 1] представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, левый конец $(WSav)_1(0) = -49\,263$ отрезка $(WSav)_1(\alpha)$ меньше каждого из левых концов $(WSav)_2(0) = -47\,447$, $(WSav)_5(0) = -48\,279$, $(WSav)_6(0) = -44\,277$, $(WSav)_7(0) = -42\,183$ соответственно отрезков $(WSav)_2(\alpha)$, $(WSav)_5(\alpha)$, $(WSav)_6(\alpha)$, $(WSav)_7(\alpha)$, а правый конец $(WSav)_1(1) = 685$ отрезка $(WSav)_1(\alpha)$ больше правых концов $(WSav)_2(1) = 581$, $(WSav)_5(1) = 567$, $(WSav)_6(1) = 677$, $(WSav)_7(1) = -7\,309$ соответствен-

Π_j / A_i	Π_1 III кв. 2009	Π_2 IV кв. 2009	Π_3 I кв. 2010	Π_4 II кв. 2010	Π_5 III кв. 2010	Sav_i
A_1	20 239	31 706	49 263	15904	42 479	49 263
A_2	19 843	31 810	47 447	12 515	38 278	47 447
A_3	20 789	31 233	48 414	13 264	52 145	52 145
A_4	21 062	32 307	50 450	18 419	45 815	50 450
A_5	19 720	31 604	48 279	18 062	43 191	48 279
A_6	14 381	24 913	44 277	17 952	36 749	44 277
A_7	9 365	39 700	42 183	13 602	39 123	42 183
A_8	0	0	0	0	0	0
						$Sav_{S^C} = 0$

Рис. 3. Матрица рисков

Таблица 1

Значения показателей эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ в концах отрезка [0, 1]

Показатель эффективности	Номер стратегии i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$(WSav)_i(0)$	–49 263	–47 447	–52 145	–50 450	–48 279	–44 277	–42 183	0
$(WSav)_i(1)$	685	581	–7 202	–872	567	677	–7 309	18 629

но отрезков $(WSav)_2(\alpha)$, $(WSav)_5(\alpha)$, $(WSav)_6(\alpha)$, $(WSav)_7(\alpha)$. Отсюда следует, что отрезок $(WSav)_1(\alpha)$ пересекается с каждым из отрезков $(WSav)_i(\alpha)$, $i = 2, 5, 6, 7$.

Аналогичным образом устанавливается, что отрезок $(WSav)_7(\alpha)$ пересекается с каждым из отрезков $(WSav)_i(\alpha)$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Таким образом, взаимные пересечения отрезков $(WSav)_i(\alpha)$ выглядят следующим образом (рис. 4).

Наличие крестика в ячейке означает, что отрезки, на пересечении которых находится данная ячейка, пересекаются. Очевидно, что крестики пересечения отрезков расположены симметрично относительно главной диагонали.

Решая уравнение $(WSav)_1(\alpha) = (WSav)_2(\alpha)$, т. е. уравнение $49\,948\alpha - 49\,263 = 48\,028\alpha - 47\,447$ (см. выражения (37), например, при помощи сервисной функции Excel «Поиск решения», найдем абсциссу $\alpha_{12} \approx 0{,}945833$ точки пересечения отрезков $(WSav)_1(\alpha)$ и $(WSav)_2(\alpha)$. Аналогичным образом находим абсциссы $\alpha_{15} \approx 0{,}892922$, $\alpha_{16} \approx 0{,}998398$, $\alpha_{17} \approx 0{,}469683$, $\alpha_{27} \approx 0{,}400182$, $\alpha_{37} \approx 0{,}989373$, $\alpha_{47} \approx 0{,}562228$, $\alpha_{57} \approx 0{,}436301$, $\alpha_{67} \approx 0{,}207738$.

Значения показателей эффективности $(WSav)_i(\alpha)$, $i = 1,..., 8$, при значениях выигрыш-показателей $\alpha = 0$, α_{67}, α_{27}, α_{57}, α_{17}, α_{47}, α_{15}, α_{12}, α_{37}, α_{16}, 1, округленные после вычислений до сотых, и места стратегий A_i в приоритетных последовательностях при каждом из этих значений α и в интервалах между ними представлены в табл. 2.

Номера i отрезков $(WSav)_i(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	8
1		×			×	×	×	
2	×						×	
3							×	
4							×	
5	×						×	
6	×						×	
7	×	×	×	×	×	×		
8								

Рис. 4. Взаимные пересечения отрезков $(WSav)_i(\alpha)$

Рассмотрим, например, интервал (0,436301; 0,469683), которому в табл. 2 соответствует 8-я строка. В верхних частях ячеек 7-й и 9-й строк табл. 2, соответствующих концам рассматриваемого интервала, т. е. значениям $\alpha = \alpha_{57} \approx 0{,}436301$ и $\alpha = \alpha_{17} \approx 0{,}469683$, проставлены соответственно значения $(WSav)_i(0{,}436301)$, $i = 1,..., 8$, и $(WSav)_i(0{,}469683)$, $i = 1,..., 8$, округленные до сотых.

В каждой из строк 7 и 9 вычисленные значения ранжируем в невозрастающем порядке и в нижних частях ячеек проставляем соответствующие номера (выделенные в табл. 3 полужирным шрифтом), которые являются номерами мест в приоритетных последовательностях выбора стратегий при выигрыш-показателях $\alpha = \alpha_{57} \approx 0{,}436301$ и $\alpha =$

Таблица 2

Значения показателей эффективности и места в приоритетных последовательностях стратегий

Значения выигрыш-показателя α	Номер i-го показателя эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ стратегий A_i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	–49 263 **6**	–47 447 **4**	–52 145 **8**	–50 450 **7**	–48 279 **5**	–44 277 **3**	–42 183 **2**	0 **1**
(0; 0,207738)	**6**	**4**	**8**	**7**	**5**	**3**	**2**	**1**
0,207738	–38 886,9 **6**	–37 **469,76** **4**	–42 808,63 **8**	–40 **150,76** **7**	–38 131,83 **5**	–34 **938,34** **3/2**	–34 **938,34** **2/3**	3 **869,95** **1**
(0,207738; 0,400182)	**6**	**4**	**8**	**7**	**5**	**2**	**3**	**1**
0,400182	–29 **274,71** **6**	–28 **227,05** **4/3**	–34 **159,62** **8**	–30 **609,78** **7**	–28 **731,713** **5**	–26 **287,22** **2**	–28 **227,05** **3/4**	7 **454,99** **1**
(0,400182; 0,436301)	**6**	**3**	**8**	**7**	**5**	**2**	**4**	**1**

Окончание табл. 2

Значения выигрыш-показателя α	Номер *i*-го показателя эффективности $(WSav)_i(\alpha)$ стратегий A_i							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0,436301	–27 470,64 **6**	–26 492,33 **3**	–32 536,32 **8**	–28 819,07 **7**	–26 967,44 **5/4**	–24 663,52 **2**	–26 967,44 **4/5**	8 127,85 **1**
(0,436301; 0,469683)	**6**	**3**	**8**	**7**	**4**	**2**	**5**	**1**
0,469683	–25 803,27 **6/5**	–24 889,06 **3**	–31 036,04 **8**	–27 164,06 **7**	–25 336,86 **4**	–23 162,87 **2**	–25 803,27 **5/6**	8 749,72 **1**
(0,469683; 0,562228)	**5**	**3**	**8**	**7**	**4**	**2**	**6**	**1**
0,562228	–21 180,83 **5**	–20 444,31 **3**	–26 876,79 **8**	–22 575,86 **7/6**	–20 816,41 **4**	–19 002,6 **2**	–22 575,86 **6/7**	10 473,74 **1**
(0,562228; 0,892922)	**5**	**3**	**8**	**6**	**4**	**2**	**7**	**1**
0,892922	–4 663,33 **5/4**	–4 561,74 **3**	–12 014,41 **8**	–6 180,71 **6**	–4 663,33 **4/5**	–4 086,58 **2**	–11 043,24 **7**	16 634,24 **1**
(0,892922; 0,945833)	**4**	**3**	**8**	**6**	**5**	**2**	**7**	**1**
0,945833	–2 020,53 **4/3**	–2 020,53 **3/4**	–9 636,42 **8**	–3 557,49 **6**	–2 078,84 **5**	–1 758,02 **2**	–9 198,02 **7**	17 619,92 **1**
(0,945833; 0,989373)	**3**	**4**	**8**	**6**	**5**	**2**	**7**	**1**
0,989373	154,2 **3**	70,61 **4**	–7 679,61 **8/7**	–1 398,86 **6**	47,91 **5**	199,27 **2**	–7 679,6 **7/8**	18 431,03 **1**
(0,989373; 0,998398)	**3**	**4**	**7**	**6**	**5**	**2**	**8**	**1**
0,998398	604,98 **3/2**	504,06 **4**	–7 273 **7**	–951,42 **6**	488,75 **5**	604,98 **2/3**	–7 364,87 **8**	18 599,16 **1**
(0,998398; 1)	**2**	**4**	**7**	**6**	**5**	**3**	**8**	**1**
1	685 **2**	581 **4**	–7 202 **7**	–872 **6**	567 **5**	677 **3**	–7 309 **8**	18 629 **1**

Таблица 3

Последовательности приоритетного выбора стратегий в зависимости от значений выигрыш-показателя

Значение выигрыш-показателя α	Места в приоритетных последовательностях							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
α = 0	A_8	A_7	A_6	A_2	A_5	A_1	A_4	A_3
0 < α < 0,207738	A_8	A_7	A_6	A_2	A_5	A_1	A_4	A_3
α = 0,207738	A_8	A_6/A_7	A_7/A_6	A_2	A_5	A_1	A_4	A_3
0,207738< α < 0,400182	A_8	A_6	A_7	A_2	A_5	A_1	A_4	A_3
α = 0,400182	A_8	A_6	A_2/A_7	A_7/A_2	A_5	A_1	A_4	A_3
0,400182< α < 0,436301	A_8	A_6	A_2	A_7	A_5	A_1	A_4	A_3
α = 0,436301	A_8	A_6	A_2	A_5/A_7	A_7/A_5	A_1	A_4	A_3
0,436301< α < 0,469683	A_8	A_6	A_2	A_5	A_7	A_1	A_4	A_3
α = 0,469683	A_8	A_6	A_2	A_5	A_1/A_7	A_7/A_1	A_4	A_3
0,469683< α < 0,562228	A_8	A_6	A_2	A_5	A_1	A_7	A_4	A_3
α = 0,562228	A_8	A_6	A_2	A_5	A_1	A_4/A_7	A_7/A_4	A_3
0,562228< α < 0,892922	A_8	A_6	A_2	A_5	A_1	A_4	A_7	A_3
α = 0,892922	A_8	A_6	A_2	A_1/A_5	A_5/A_1	A_4	A_7	A_3
0,892922 < α < 0,945833	A_8	A_6	A_2	A_1	A_5	A_4	A_7	A_3
α = 0,945833	A_8	A_6	A_1/A_2	A_2/A_1	A_5	A_4	A_7	A_3
0,945833 < α < 0,989373	A_8	A_6	A_1	A_2	A_5	A_4	A_7	A_3

Окончание табл. 3

Значение выигрыш-показателя α	Места в приоритетных последовательностях							
	1	2	3	4	5	6	7	8
α = 0,989373	A_8	A_6	A_1	A_2	A_5	A_4	A_3/A_7	A_7/A_3
0,989373 < α < 0,998398	A_8	A_6	A_1	A_2	A_5	A_4	A_3	A_7
α = 0,998398	A_8	A_1/A_6	A_6/A_1	A_2	A_5	A_4	A_3	A_7
0,998398 < α < 1	A_8	A_1	A_6	A_2	A_5	A_4	A_3	A_7
α = 1	A_8	A_1	A_6	A_2	A_5	A_4	A_3	A_7

$\alpha_{17} \approx 0{,}469683$. В 5-й и 7-й ячейках строки 7 стоят равные значения, равные — 26 967,44. Поэтому в приоритетной последовательности стратегии A_5 и A_7 можно поставить соответственно на 5-е и 4-е места или соответственно на 4-е и 5-е.

Аналогичное разъяснение относится и к 9-й строке. Нетрудно понять, что номер места стратегии в приоритетной последовательности для любого значения выигрыш-показателя α из интервала (0,436301; 0,469683), в котором нет пересечений отрезков, есть номер, общий для концов этого интервала. Так, общим номером места в приоритетных последовательностях стратегии A_1 при α, находящемся на концах интервала (0,436301; 0,469683) является 6. Следовательно, стратегия A_1 при любом $\alpha \in (0{,}436301, 0{,}469683)$ займет в приоритетной последовательности 6-е место. Для 7-й ячейки строк 7 и 9 общим номером является 5; поэтому стратегия A_7 при любом $\alpha \in (0{,}436301, 0{,}469683)$ займет в приоритетной последовательности 5-е место. Аналогичные объяснения имеют место для всей табл. 2.

Найденные последовательности приоритетного выбора стратегий в зависимости от значений выигрыш-показателя $\alpha \in [0, 1]$ представим в более удобном виде в табл. 3.

Таким образом, выбирая наименее рискованный вариант ($\alpha = 0$), получаем следующий приоритетный порядок выбора стратегии: A_8 (Норникель), A_7 (Северсталь), A_6 (ММК), A_2 (ЛГОК), A_5 (ОЭМК), A_1 (Якутуголь), A_4 (УС), A_3 (МГОК). При $\alpha = 0{,}469683$, т. е. примерно равном отношении к выигрышам и рискам: A_8 (Норникель), A_6 (ММК), A_2 (ЛГОК), A_5 (ОЭМК), A_1 (Якутуголь), A_7 (Северсталь), A_4 (УС), A_3 (МГОК).

Игнорируя возможные риски ($\alpha = 1$), получаем следующую последовательность: A_8 (Норникель), A_1 (Якутуголь), A_6 (ММК), A_2 (ЛГОК), A_5 (ОЭМК), A_4 (УС), A_3 (МГОК), A_7 (Северсталь). ОАО «ГМК «Норильский никель» – крупнейшая российская горно-металлургическая компания, которая производит четыре основных металла – никель, медь, палладий и платину, а также множество других металлов. Высокие финансовые показатели обусловлены ростом цен на цветные и драгоценные металлы, что позволяет ГМК улучшать денежную позицию и занимать лидирующее положение в цветной металлургии.

Список литературы

1. *Лабскер Л. Г.* Теория критериев оптимальности и экономические решения. М.: КНОРУС, 2010.
2. О формах бухгалтерской отчетности организаций: приказ Минфина России от 22.07.2003 № 66н.
3. Официальный сайт ОАО «ГМК «Норильский никель» – http//www.nornik.ru.
4. Официальный сайт ОАО «Магнитогорский металлургический комбинат» – http//www.mmk.ru.
5. Официальный сайт ОАО «Северсталь» – http//www.severstal.com.
6. Официальный сайт ОАО ХК «Якутуголь» – http//www.yakutugol.ru.
7. *Hurwicz L.* Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance // Colwes commission papers, 1951, № 370.
8. *Savage L. J.* The theory of statistical decision // J. Amer. Statist. Assoc., 1951, Vol. 46. № 1.
9. URL: //http//www.metalloinvest.com/rus/factorys/metallyrgiceskii-divizion/oemk.
10. URL: //http//www.metallinvest.ru/rus/factorys/gornorydnii-divizion/lebedinskii-gok.
11. URL: //http//www.metallinvest.ru/rus/factorys/gornorydnii-divizion/mgok.
12. URL: //http//www.metallinvest.ru/rus/factorys/metallyrgiceskii-divizion/yral_skaa-stal.