УДК 519.6

КООПЕРАТИВНО-ИГРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

© 2006 г. О.И. Горбанева

In the article two-level resources allocation model is described. the problem formulation without corruption mechanism is considered. For all coalitions the characteristic function values and cooperative effects are found.

The vector Shepley and proportional vector components are found. The case of having of own goals both by the Center and by the Subordinates is considered.

The algorithms proposed were realized as the program complex.

Введение

Наряду с иерархическими отношениями руководства – подчинения в экономической системе управления возможны и целесообразны кооперативные отношения, интегрирующие различные элементы системы на основе горизонтальных и вертикальных связей. Интегративные отношения в экономической системе целесообразно моделировать с помощью аппарата теории кооперативных игр. Пусть $N = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ – конечное множество субъектов экономической системы, а именно $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество Подчиненных, а $\{0\}$ – Центр. Будем рассматривать всевозможные коалиции, т.е. подмножества $K \subseteq N$, в том числе и одноэлементные $\{i\}$ и максимальную коалицию N. Пустая коалиция играет техническую роль.

Для каждой коалиции игровой постановки ищутся вектор Шепли и вектор пропорционального распределения [1], решается вопрос о выпуклости игры. Для каждой коалиции вычисляется кооперативный эффект, т.е. величина $\Delta_K = v(K) - \sum_{i \in K} v(i)$.

Значения характеристической функции выигрыша каждой коалиции находятся по формуле

$$\begin{aligned} v(K) &= \max_{u_k \in U_k} \min_{u_{N\setminus K} \in R_{N\setminus K}(u_k)} J_K(u_K, u_{N\setminus K}); \\ J_K(u_K, u_{N\setminus K}) &= \sum_{i \in K} J_i(u_0, u_1, \ldots, u_n); \\ R_{N\setminus K} &= Arg \max_{u_{N\setminus K} \in U_{N\setminus K}} J_{N\setminus K}(u_K, u_{N\setminus K}). \end{aligned} ;$$

Значения характеристической функции всех возможных коалиций

Этому случаю соответствуют следующие производственные функции: $H(x) = \gamma_0 x^\beta$, $h_i(x) = \gamma_i x^\beta$, $0 < \beta \le 1$, $i = 1,...,n$. И, соответственно, сформулирована игра:

$$J_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i r_i)^\beta + \gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n r_i\right)^\beta \to \max$$

$$0 \le q_i \le 1,\ 0 \le r_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{n} r_i \le 1,$$

$$J_i = \alpha_i \left(u_i r_i\right)^{\beta} + \gamma_i \left([1-u_i] r_i\right)^{\beta} \to \max$$

$$q_i \le u_i \le 1,\ i = 1, \ldots, n.$$

Вычислим значения выигрышей всех возможных коалиций.

Очевидно, что $v(0) = J_0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{1-\beta}$,

$$v(i) = J_i = \frac{\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\beta}}.$$

В случае $K = L \subseteq M$ *(горизонтальная кооперация)*

$$v(L) = \frac{\sum_{i \in L} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\beta}}.$$

Если $L = M$, то
$$v(L) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\beta}}.$$

Рассмотрим случай $K = \{0\} \cup \{i\}$ (*вертикальная кооперация*).

$$v(\{0\} \cup \{i\}) = \max_{q_i, r_i} \max_{u_i} \min_{\substack{u_j, j \ne i \\ u_j \in R_j}} (J_0 + J_i) =$$

$$= \max_{q_i, r_i} \max_{u_i} \min_{\substack{u_j, j \ne i \\ u_j \in R_j}} \left(\gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i \right)^{\beta} + \sum_{j \ne i} \alpha_i (u_k r_k)^{\beta} + 2\alpha_i (u_i r_i)^{\beta} + \gamma_i \left(\left[1 - u_i\right] r_i \right)^{\beta} \right).$$

Заметим, что величина выигрыша коалиции, состоящей из всех участников, не вошедших в K, вычисляется по формуле $J_{N \setminus K} = \sum_{j \ne i} J_j =$ $= \sum_{j \ne i} \alpha_j \left(u_j r_j \right)^{\beta} + \sum_{j \ne i} \gamma_j \left[\left(1 - u_j \right) r_j \right]^{\beta}$. Максимум функции $J_{N \setminus K}$ достигается при $u_j = \max\left\{\dfrac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_j}}, q_j\right\}$.

Следовательно, $R_j = \left\{\max\left\{\dfrac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_j}}, q_j\right\}\right\}$, $j \neq i$. Значит,

$$v(\{0\}\cup\{i\}) = \max_{q_i, r_i}\max_{u_i}\left(\sum_{j\neq i}\alpha_j\left(\max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_j}}, q_j\right\}r_j^{\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+2\alpha_i(u_i r_i)^{\beta}+\gamma_i\left([1-u_i]r_i\right)^{\beta}+\gamma_0\left(1-\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^{\beta}\right).$$

Рассмотрим стратегию Подчиненного, входящего в коалицию с Центром. Приняв во внимание, что его слагаемое в задаче отличается от слагаемых в задачах других Подчиненных только удвоенным коэффициентом перед α_i, получим, что $u_i = \max\left\{\dfrac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}, q_i\right\}$, а так как это еще и в интересах Центра (целевая функция общая), то $q_i = \dfrac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}$.

Следовательно,

$$v(\{0\}\cup\{i\}) = \max_{q_i, r_i}\max_{u_i}\left(\sum_{j\neq i}\alpha_j\left(\max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_j}}, q_j\right\}r_j\right)^{\beta}+\right.$$

$$\left.+2\alpha_i\left(\frac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}r_i\right)^{\beta}+\gamma_i\left(\frac{\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}r_i\right)^{\beta}+\gamma_0\left(1-\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^{\beta}\right)=$$

$$=\max_{q_i, r_i}\left(\sum_{j\neq i}\alpha_j\left(\max\left\{\frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_j}}, q_j\right\}r_j\right)^{\beta}+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)^{1-\beta}r_i^{\beta}+\gamma_0\left(1-\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^{\beta}\right).$$

Заметим, что $u_i = \dfrac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}} \geq \dfrac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}$ – доля ресурсов, используемых на общесистемные цели. Эту долю выбрал бы Подчиненный, не вступая в коалицию с Центром.

При $j \neq i$ получим, что целевая функция тем больше, чем больше q_i. Следовательно, $q_i = 1$. Поэтому

$$v(\{0\} \cup \{i\}) = \max_{r_i} \left(\gamma_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} r_i \right)^{\beta} + \sum_{j \neq i} \alpha_j r_j{}^{\beta} + \left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_i} \right)^{1-\beta} r_i^{\beta} \right),$$

$$v(\{0\} \cup \{i\}) = \left(\sum_{j \neq i} \sqrt[1-\beta]{\alpha_j} + \sqrt[1-\beta]{2\alpha_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_0} \right)^{1-\beta},$$

$$r_j = \frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_j}}{\sum\limits_{j \neq i} \alpha_j^{\frac{1}{1-\beta}} + (2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}}, \; j \neq i,$$

$$r_i = \frac{(2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sum\limits_{j \neq i} \alpha_j^{\frac{1}{1-\beta}} + (2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Эффект от создания коалиции

$$\Delta_K = \left(\sum_{j \neq i} \sqrt[1-\beta]{\alpha_j} + \sqrt[1-\beta]{2\alpha_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_0} \right)^{1-\beta} -$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} - \frac{\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{\beta}}.$$

Пусть $K = \{0\} \cup L$ *(комплексная кооперация)*. По аналогии с предыдущим случаем получим

$$v(\{0\} \cup L\}) = \left(\sum_{i \notin L} \alpha_i{}^{\frac{1}{1-\beta}} + \sum_{i \in L} \left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_i{}^{\frac{1}{1-\beta}} \right) + \gamma_0{}^{\frac{1}{1-\beta}} \right)^{1-\beta} \tag{1}$$

при $$q_i \,|_{i \notin L} = u_i \,|_{i \notin L} = 1,$$

$$r_i \,|_{i \notin L} = \frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}}{\sum\limits_{i \notin L} \alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}} + \sum\limits_{i \in L} \left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}} + \gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}} \right) + \gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}},$$

$$q_i \,|_{i \in L} = u_i \,|_{i \in L} = \frac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i} + \sqrt[1-\beta]{\gamma_i}},$$

$$r_i\,|_{i\in L}=\frac{(2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sum\limits_{i\notin L}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\sum\limits_{i\in L}\left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Эффект от создания коалиции:

$$\Delta_K=\left(\sum_{i\notin L}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\sum_{i\in L}\left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}-\frac{\sum\limits_{i\notin L}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}}.$$

Здесь, аналогично предыдущему случаю, Центр в качестве производственных мощностей, входящих с ним в одну коалицию Подчиненных, принимает удвоенные величины плюс фактическую величину мощности при нецелевом использовании ресурсов, за счет чего повышает долю ресурсов, выделенных данным Подчиненным.

Пусть $K = N$. Тогда из (1) получаем

$$v(N)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i{}^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\gamma_0{}^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}$$

при $q_i=u_i=\dfrac{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}}{\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}}$, $r_i=\dfrac{(2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}}$.

Эффект от создания коалиции:

$$\Delta_N=\left(\sum_{i=1}^{n}\left((2\alpha_i)^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}\right)+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}-$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{1-\beta}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}+\gamma_0^{\frac{1}{1-\beta}}\right)^{\beta}}.$$

Условия, при которых функция $v(L)$ будет характеристической:

$$\sum_{i\in L}\alpha_i^{\frac{1}{1-\beta}}\left(2^{\frac{1}{1-\beta}}(1-\beta)-2+\beta\right)+\sum_{i\in L}\gamma_i^{\frac{1}{1-\beta}}(1-\beta)>0 \qquad (2)$$

для любого $K=\{0\}\cup L$.

Вектор Шепли и пропорциональный вектор

Вектор Шепли.

$$\Phi_0=\frac{1}{n+1}\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta}-$$

$$-\frac{n-1}{2(n+1)}\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}\right)^{1-\beta}+$$

$$+\sum_{s=2}^{n}\gamma(s)\sum_{\substack{\forall K\\ |K|=s-1}}\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i\notin K}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sum_{i\in K}\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta}.$$

$$\Phi_l=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_l}}{\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}\right)^{\beta}}+$$

$$+\sum_{s=2}^{n}\gamma(s)\sum_{\substack{\forall K\\ |K|=s-1\\ l\in K}}\left[\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i\notin K}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sum_{i\in K}\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta}-\right.,$$

$$\left.-\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i\notin K\setminus\{l\}}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sum_{i\in K\setminus\{l\}}\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta}\right],\ l=1,\dots,n.$$

Вектор Шепли в общем случае С-ядру не принадлежит.

Вектор пропорционального распределения

$$x_0=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}}{2\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}}$$

$$x_l=\frac{\sqrt[1-\beta]{\alpha_l}}{2\sum_{i=1}^{n}\sqrt[1-\beta]{\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}}\left(\sqrt[1-\beta]{\gamma_0}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt[1-\beta]{2\alpha_i}+\sqrt[1-\beta]{\gamma_i}\right)\right)^{1-\beta},$$

т.е. больше половины выигрыша коалиции Центр забирает себе.

Заключение

1. Рассмотрена постановка задачи без введения механизма коррупции, так как задача с введением механизма коррупции аналитически в общем

случае не решается. Для задачи в случае отсутствия коррупции вычислены значения характеристической функции выигрыша каждой коалиции.

2. Выведены условия, при которых функция $v(L)$ является характеристической (см. (2)).

3. Найдены компоненты вектора Шепли и пропорционального распределения. Доказано, что для Центра создавать коалицию выгодно, а для Подчиненных не всегда.

4. Найдены кооперативные эффекты для всех возможных коалиций.

Литература

1. *Агиева М.Т., Мальсагов Г.А., Угольницкий Г.А.* Моделирование иерархической структуры управления образованием. Ростов н/Д, 2003.
2. *Рыбасов Е.А., Угольницкий Г.А.* // Компьютерное моделирование. Экология. Вып. 2 / Под ред. Г.А. Угольницкого. М., 2004. С. 46–65.

Ростовский государственный университет ***30 ноября 2005 г.***

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ КАК ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

© 2006 г. О.И. Горбанева

In the article two-level resources allocation model is described. The case of having of own goals both by the Center and by the Subordinates is considered.

The ability of corruption mechanism on distributed resource value is taken into account. Two types of this mechanism are considered.

The algorithms proposed were realized as the program complex.

Введение

В данной статье рассматривается двухуровневая древовидная система управления, состоящая из одного Центра и n Подчиненных ему подразделений. Центр имеет некоторое количество ресурсов (без ограничения общности $R = 1$), которое необходимо распределить между Подчиненными. Не исключено, что Центр оставляет часть ресурсов на собственные цели, и что Подчиненные, в свою очередь, могут распределить доставшееся им количество ресурсов как на общесистемные цели, так и на свои частные. Учтена возможность влияния Подчиненными на количество распределенных им ресурсов при помощи механизма коррупции.

В целевую функцию Центра включаются выигрыши от использования ресурсов Подчиненными в общих целях, его выигрыша от использования оставшихся ресурсов в своих собственных интересах и средств, полученных от Подчиненных в качестве взятки.