ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
2013, том 56, №7

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЁННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО РОДА НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ И КРИВЫХ

Таджикский национальный университет

(Представлено академиком АН Республики Таджикистан М.Ш.Шабозовым 14.05.2012 г.)

Для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода построена усложнённая квадратурная формула Симпсона и для классов дифференцируемых функций, задаваемых модулями непрерывности, найдена оценка её погрешности.

Ключевые слова: *криволинейные интегралы первого рода – усложнённая квадратурная формула Симпсона – модуль непрерывности.*

Рассмотрим задачу приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода в форме линейной комбинации конечного числа значений подынтегральной функции

$$\int_{\Gamma} f(M)ds = \sum_{k=0}^{N} p_k f(M_k) + R_N(f,\Gamma), \tag{1}$$

где Γ – некоторая плоская простая кривая, $f(M) = f(x,y)$ — определённая на кривой Γ функция, $M_k \in \Gamma$ – узлы, p_k – коэффициенты, $R_N(f,\Gamma)$ – погрешность квадратурной формулы на функции $f(M)$.

Через $\mathfrak{M}_Q(L)$ обозначим класс плоских спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L, кривизна кусочно-непрерывна и все они расположены в области $Q = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le L^2\}$.

Известно [1], что параметрические уравнения кривой $\Gamma \in_Q (L)$, отнесённой к длине дуги s как параметру, в прямоугольной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le L. \tag{2}$$

Обозначим через $s_k \in [0,1],\ k = \overline{0,N}$ значения длины дуги s кривой Γ, которые соответствуют точкам $M_k \in \Gamma$, и перепишем формулу (1) в виде

$$\int_0^L f\big(x(s), y(s)\big)ds = \sum_{k=0}^{N} p_k f\big(x(s_k), y(s_k)\big) + R_N(f,\Gamma),$$

где $x = x(s),\ y = y(s)$ – параметрические уравнения кривой Γ, представленные в виде (2).

Адрес для корреспонденции: *Юсупов Гулзорхон Амиршоевич. 734025, Республика Таджикистан, г.Душанбе, пр. Рудаки, 17, Таджикский национальный университет. E-mail: G_7777@mail.ru*

В этой статье будем рассматривать усложнённые квадратурные формулы [2], которые строятся следующим образом. Отрезок $[0,L]$ делят на N равных частей точками $s_k = kh,\ h = L/N,\ k = \overline{0,N}$ и на каждом интервале $[s_{k-1}, s_k], k = \overline{0,N}$ применяют заранее квадратурную формулу с узлами $s_{k-1} \le t_1 < t_2 < \cdots < t_m \le s_k$ и коэффициентами $p_i (i = 1,2,\cdots,m)$. В результате получим усложнённую квадратурную формулу

$$\int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \sum_{k=1}^{N} L\left(s_{k-1}, s_k : f\right) + R_N(f),$$

где

$$L\left(s_{k-1}, s_k : f\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i f\left(x(t_i), y(t_i)\right).$$

В этой статье мы дадим оценку погрешности усложнённой квадратурной формулы Симпсона, имеющей вид:

$$\int_0^L f\left(x(s), y(s)\right) ds = \frac{1}{6N}\{f\left(x(0), y(0)\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(x\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), y\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(x\left(\frac{kL}{N}\right), y\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + f\left(x(L), y(L)\right)\} + R_N(f, \Gamma) \tag{3}$$

для классов дифференцируемых на отрезке $[0,L]$ сложных функций $f\left(x(s), y(s)\right) \overset{def}{=} F(s)$ одного переменного, задаваемых модулями непрерывности. С этой целью вводим оператор набла $"\nabla"$, полагая

$$\nabla f = \nabla f\left(x(s), y(s)\right) := \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = F'(s),$$

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 := F''(s),$$

и для $k = 3,4,\ldots$ положим

$$\nabla^k f = \nabla\left(\nabla^{k-1} f\right). \tag{4}$$

Через $W_Q^{(k)}H^{\omega} := W_Q^{(k)}H^{\omega}[0,L],\ k \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(M) = f(x,y)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j}\partial y^{j}},\quad j = 0,1,\cdots,k$$

и для любых двух точек $s', s'' \in [0, L]$ функция (4) удовлетворяет условию

$$\left| \nabla^k f_{|s=s'} - \nabla^k f_{|s=s''} \right| \le \omega(|s' - s''|), \tag{5}$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая функция, в нуле равная нулю.

Очевидно, что в обозначении сложной функции $F(s) \overset{def}{=} f\left(x(s), y(s)\right)$ производные $F^{(k)} \overset{def}{=} \nabla^k f\left(x(s), y(s)\right)$, а условие (5) означает, что

$$\left| F^{(k)}(s') - F^{(k)}(s'') \right| \le \omega(|s' - s''|), \quad \forall s', s'' \in [0, L],$$

то есть функция $F(s) \in W^{(k)}H^{\omega}[0, L]$ (см.,например, [2], стр. 19). Записав для произвольной функции $f \in W_Q^{(2)}H^{\omega}$ как функции одного переменного $f\left(x(s), y(s)\right)$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, принимая во внимание, что формула Симпсона точна для всех многочленов третьей степени, остаток квадратурной формулы (3) запишем в виде

$$R_N(f, \Gamma) = \frac{1}{2}\int_0^L \nabla^2 f\left(x(s), y(s)\right) g_2(s) ds \overset{def}{=} \frac{1}{2}\int_0^L F''(s) g_2(s) ds,$$

где для $k = 1, 2, \cdots, N-1$ положено

$$g_2(s) = \begin{cases} (s - kh)\left(s - kh - \dfrac{h}{3}\right), & kh \le s \le kh + h/2, h \overset{def}{=} L/N, \\ (s - (k+1)h)\left(s - (k+1)h + \dfrac{h}{3}\right), & (k+1)h - h/2 \le s \le (k+1)h. \end{cases}$$

Так как

$$g_2\left(kh + s\right) = g_2(s), \quad 0 \le s \le h, \quad k = 1, 2, \cdots, N-1,$$

то для любого $f \in W_Q^{(2)}H^{\omega}$ имеем:

$$|R_N(f, \Gamma)| \le N \sup_{f \in W_Q^{(2)}H^{\omega}} \left| \int_0^{h/2} \nabla^2 f\left(x(s), y(s)\right) g_2(s) ds \right| =$$

$$= N \sup_{\varphi \in H^{\omega}} \left| \int_0^{h/2} \varphi(s) g_2(s) ds \right|. \tag{6}$$

Следуя схеме рассуждения работы [4], положим

$$g_3(s)=\int_0^s g_2(t)dt=\frac{1}{3}s^2\left(s-\frac{h}{2}\right),\quad 0\le s\le\frac{h}{2}$$

и заметим, что $g_3(s)$ строго убывает на $[0,h/3)$ и строго возрастает на $(h/3,h/2]$, причём $g_3(h/2)=0$. Введём в рассмотрение функцию $\rho(t)$, которая определяется равенством:

$$g_3(s)=g_3((\rho(s)),\quad (0\le s\le h/3,\ h/3\le\rho(s)\le h/2).$$

Используя лемму 5.1 из [3], будем иметь

$$\sup_{\varphi\in H^\omega}\left|\int_0^{L/(2N)} g_2(s)\varphi(s)ds\right|\le\int_0^{L/(3N)}|g_2(s)|\,\omega\big(\rho(s)-s\big)ds. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что для любой функции $f\in W_Q^{(2)}H^\omega$

$$|R_N(f,\Gamma)|\le N\int_0^{L/(3N)}|g_2(s)|\,\omega\big(\rho(s)-s\big)ds,$$

где $\omega(s)$ – заданный модуль непрерывности.

Если $\omega(s)$ выпуклый вверх модуль непрерывности, то в классе $H^\omega[0,L]$ существует возрастающая на $[0,h/2]$ функция $\varphi_0(s)$, которая реализует в (7) точную верхнюю грань. Она имеет вид:

$$\varphi_0(s)=\begin{cases}-\int_s^{h/2}\omega'\big(\rho(t)-t\big)dt, & 0\le s\le h/3,\\ \int_{h/2}^{s}\omega'\big(t-\rho^{-1}(t)\big)dt, & h/3\le s\le h/2,\end{cases}$$

где $\rho^{-1}(x)$ – функция, обратная к $\rho(x)$.

С помощью равенств

$$\varphi_0\left(\frac{h}{2}+s\right)=\varphi_0\left(\frac{h}{2}-s\right),\quad 0\le s\le\frac{h}{2},$$

$$\varphi_0\big(kh+s\big)=\varphi_0(s),\quad 0\le s\le h\nu,\quad k=1,2,\cdots,N-1$$

продолжим $\varphi_0(t)$ на весь отрезок $[0,L]$. Очевидно, что $\varphi_0\in H^\omega[0,L]$.

Пусть $f_0\big(x(s),y(s)\big)=F_0(s)$ – функция, у которой

$$F_0''(s)=\nabla^2\big(x(s),y(s)\big)=\varphi_0(s),\quad 0\le s\le L.$$

Тогда, используя схему рассуждений работы [4], нетрудно подсчитать, что

$$R_N(f_0,\Gamma)=N\int_0^{h/2} f_0(s)g_2(s)ds=N\int_0^{h/3} s\left(\frac{h}{3}-s\right)\omega\big(\rho(s)-s\big)ds=$$

$$=\frac{1}{27N^2}\int_0^1 s(1-s)\omega\left(\rho\left(\frac{s}{3N}\right)-\frac{s}{3N}\right)ds.$$

Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то в силу леммы 5.2 из [3] имеем:

$$\sup_{f\in W_Q^{(k)}H^\omega}\left|\int_0^{h/2}\nabla^2 f\left(x(s),y(s)\right)g_2(s)ds\right|=\int_0^{h/2}\bar{\psi}(s)\omega'(s)ds,$$

где $\bar{\psi}(s)$ – убывающая перестановка функции $|g_3(s)|$. В нашем случае $\bar{\psi}(s)=|y(s)|\ \ (0\le s\le h/2)$ и для любой $f\in W_Q^{(2)}H^\omega$

$$|R_N(f,\Gamma)|\le N\left|\int_0^{h/2}\nabla^2 f\left(x(s),y(s)\right)g_2(s)ds\right|\le N\int_0^{h/2}|y(s)|\,\omega'(s)ds=$$

$$=\frac{L}{2}\int_0^1\left|y\left(\frac{sL}{2N}\right)\right|\omega'\left(\frac{Ls}{2N}\right)ds. \tag{8}$$

Для введённой выше функции $f_0\left(x(s),y(s)\right)$ здесь имеет место знак равенства. Если учесть (8), то получим окончательно для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$:

$$\sup_{f\in W_Q^{(2)}H^\omega}|R_N(f,\Gamma)|=\frac{L^2}{648N^3}\int_0^1\left\{1-\cos\left[3\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}s-\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\}\omega'\left(\frac{Ls}{2N}\right)ds.$$

Оценку сверху для $R_N(f,\Gamma)$, удобную для практического использования, можно получить таким образом. В силу монотонности $y(x)$ из (8) имеем

$$\int_0^{h/2}|y(s)|\,\omega'(s)ds\le|y(0)|\int_0^a\omega'(s)ds, \tag{9}$$

где a определяется из равенства:

$$a\,|y(0)|=\int_0^{h/2}|y(s)|\,ds.$$

Легко подсчитать, что $a=\frac{9L}{32N}$, $|y(0)|=\max\limits_{0\le s\le L/(2N)}|g_3(s)|=\frac{L^3}{162N^3}$. Тогда для любой $f\in W_Q^{(2)}H^\omega$ из неравенства (9) следует, что

$$\left|R_N(f,\Gamma)\right| \le \frac{L^3}{162N^2}\cdot\omega\left(\frac{9L}{32N}\right).$$

Поступило 16.05.2012 г.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1952.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979, 254 с.
3. Корнейчук Н.П. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1971, т.35, №1, с. 93-124.
4. Бусарова Т.Н. – В сб.: Вопросы теории приближений функций и её приложений. – ИМ АН УССР, Киев, 1976.

Г.А.Юсупов, А.А.Шабозова

БАҲОИ АНИҚИ ИНТЕГРОНИИ ТАҚРИБИИ ИНТЕГРАЛҲОИ КАҶХАТТАИ НАВЪИ ЯКУМ БАРОИ БАЪЗЕ СИНФИ ФУНКСИЯҲО ВА ХАТҲОИ КАҶ

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Барои ҳисобкунии тақрибии интегралҳои каҷхаттаи навъи якум формулаи квадратурии мураккабкардашудаи Симпсон сохта шуда, барои синфи функсияҳои дифференсиронидашуда, ки ба воситаи модули бефосилагӣ дода мешаванд, хатогии формулаҳо баҳо дода шудааст.

Калимаҳои калидӣ: *интегралҳои каҷхаттаи навъи якум – формулаи квадратурии мураккабкардашудаи Симпсон – модули бефосилагӣ.*

G.A.Yusupov, A.A.Shabozova

EXACT ESTIMATES OF APPROXIMATE INTEGRATION OF CURVILINEAR INTEGRALS OF THE FIRST KIND ON SOME CLASSES FUNCTIONS AND CURVING LINES

Tajik National University

For approximate computation of the curvilinear integrals of the first kind of complicated quadrature Simpson’s formula is constructed and for classes differentiable functions, which assigned by the modulus of continuity, in the error estimate is found.

Key words: *curvilinear integrals of the first kind – the complicated quadrature Simpson’s formula – modulus of continuity.*