DOI:10.12737/article_5b115a6671c109.46170366

Уварова Н.Б., канд. техн. наук, доц.,
Парамонов Е.Е., студент
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

РАСЧЕТ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛИТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

evg.paramonov@yandex.ru

В основе расчета лежит аппроксимация исходного дифференциального уравнения изгиба тонкой изотропной пластинки с использованием обобщенных уравнений метода конечных разностей (МКР), полученных относительно вторых производных функции прогибов. Эти уравнения позволяют решать задачу в пределах интегрируемой области с учетом разрывов искомой функции, ее первой производной и правой части исходного дифференциального уравнения. Из системы уравнений получаем значения вторых производных искомой функции в каждой расчетной точке сетки. Используя известные зависимости можно перейти к изгибающим моментам, что упрощает решение. В статье изложен алгоритм решения задач с использованием предложенной методики. Приведены примеры расчетов с различными граничными условиями и нагрузкой при минимальном числе разбиений. Результаты сравниваются с решением С.П. Тимошенко в рядах. Такой подход может быть использован в качестве методических рекомендаций, а также для проведения поверочных расчетов при проектировании конструкций.

***Ключевые слова**: изгибаемая плита, тонкая, изотропная, искомая функция, разрыв функции, численное решение, обобщенные уравнения метода конечных разностей.*

Разрешающее дифференциальное уравнение изгиба тонкой пластинки [1] имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \qquad (1)$$

где W – прогиб; q – интенсивность распределенной нагрузки; D – цилиндрическая жесткость.

Перейдем к безразмерным параметрам и понизим порядок уравнения (1), введя обозначения

$$w^{\xi\xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; \quad w^{\eta\eta} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \qquad (2)$$

получим:

$$\frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^{\xi\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w^{\eta\eta}}{\partial \eta^2} = p, \qquad (3)$$

где $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{a}$; $p = \frac{q}{q_0}$; $w = \frac{WD}{q_0 a^4}$; q_0 - интенсивность нагрузки в какой-либо точке, a – длина одной из сторон плиты.

Внутренние усилия также запишем в безразмерном виде:

$$\begin{cases} m^{(\xi)} = \frac{M_x}{q_0 a^2}; \; m^{(\eta)} = \frac{M_y}{q_0 a^2}; \; m^{(\xi\eta)} = \frac{M_{xy}}{q_0 a^2}, \\ m^{(\xi)} = -\left(w^{\xi\xi} + \mu w^{\eta\eta}\right), \\ m^{(\eta)} = -\left(w^{\eta\eta} + \mu w^{\xi\xi}\right). \end{cases} \qquad (4)$$

Приведем разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (3), используя обобщенное уравнение метода конечных разностей МКР (2.1.17) [2] при $\delta = \beta = \sigma = 0$, $\alpha = \gamma = 1$ с заменой ω на $w^{\xi\xi}$ и $w^{\eta\eta}$.

$$w^{\xi\xi}_{i-1,j} + w^{\xi\xi}_{i,j-1} - 4w^{\xi\xi}_{i,j} + w^{\xi\xi}_{i,j+1} + w^{\xi\xi}_{i+1,j} + w^{\eta\eta}_{i-1,j} + w^{\eta\eta}_{i,j-1} - 4w^{\eta\eta}_{i,j} + w^{\eta\eta}_{i,j+1} + w^{\eta\eta}_{i+1,j} + \frac{h}{2}\left({}^{I-II}\Delta q^{\xi}_{i,j} + {}^{III-IV}\Delta q^{\xi}_{i,j} + {}^{I-III}\Delta q^{\eta}_{i,j} + {}^{II-IV}\Delta q^{\eta}_{i,j}\right) = \frac{h^2}{4}\left({}^{I}p_{i,j} + {}^{II}p_{i,j} + {}^{III}p_{i,j} + {}^{IV}p_{i,j}\right), \qquad (5)$$

$$w^{\eta\eta}_{i-1,j} + w^{\eta\eta}_{i+1,j} - w^{\xi\xi}_{i,j-1} - w^{\xi\xi}_{i,j+1} - 2\left(w^{\eta\eta}_{i,j} - w^{\xi\xi}_{i,j}\right) = 0; \qquad (6)$$

Здесь $\Delta q^{\eta}_{i,j}$ и $\Delta q^{\xi}_{i,j}$ – величины разрывов безразмерной поперечной силы в направлениях η и ξ соответственно в точке, расположенной на бесконечно малом расстоянии от точки i, j.

Уравнения записываем на квадратной сетке с шагом h. Фрагмент сетки на которой строится численное решение показан на рис. 1.

Алгоритм расчета сводится к следующему: для определения $w^{\xi\xi}$ и $w^{\eta\eta}$ необходимо совместное решение систем уравнений (5) и (6) с учетом граничных условий.

При шарнирном опирании на контуре $w^{\xi\xi} = w^{\eta\eta} = 0$, поэтому для решения достаточно уравнений (5) и (6).

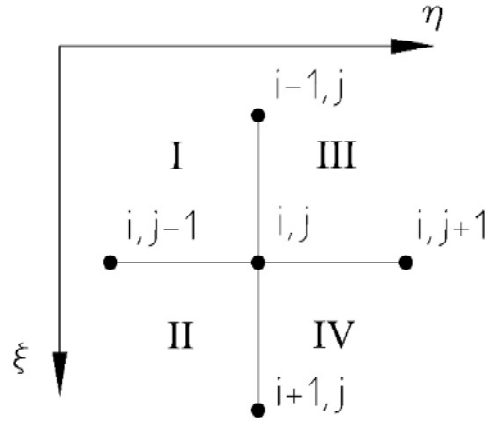


Рис. 1. Шаблон с расчётными точками

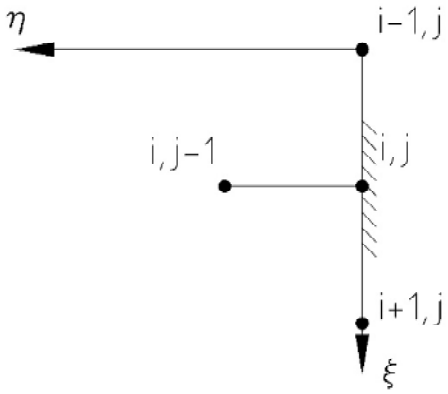


Рис. 2. Шаблон для записи граничных условий

Получим уравнение описывающее граничные условия при жестком защемлении стороны $\eta = 1$, параллельной оси ξ . Граничные условия можно записать в виде уравнения метода последовательных аппроксимаций используя (3.1.6) [2]:

$$-hw_{ij}^{\eta} - w_{ij} + w_{i,j-1} + \frac{h^2}{6}\left(2m_{ij} + m_{i,j-1}\right) = \\ = -\frac{h^5}{12^2}p_{i,j}^{\eta} - \frac{h^4}{12^2}\left(5p_{i,j} + p_{i,j-1}\right) \qquad (7)$$

и выражение $m_{ij} = -(w_{ij}^{\xi\xi} + w_{ij}^{\eta\eta})$, при $w_{ij} = w^{\eta} = 0$, где i, j – точка края, получим

$$w_{i,j-1} - \frac{h^2}{6}\left(2w_{i,j}^{\xi\xi} + 2w_{i,j}^{\eta\eta} + w_{i,j-1}^{\eta\eta} + w_{i,j-1}^{\xi\xi}\right) = \\ = -\frac{h^5}{12^2}p_{i,j}^{\eta} - \frac{h^4}{12^2}\left(5p_{i,j} + p_{i,j-1}\right) \qquad (8)$$

Для других краев плиты эти уравнения записываются по аналогии с заменой η, i, j на ξ, j, i. Фрагмент сетки приведен на рис. 2.

Для вычисления вторых производных w воспользуемся известными формулами метода конечных разностей:

$$w_{ij}^{\xi\xi} = (w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j})/h^2 \qquad (9)$$

Формула для $w_{ij}^{\eta\eta}$ следует из (9) с заменой i, j на j, i.

Приведем решение нескольких задач.

1. Рассмотрим квадратную шарнирно опёртую по контуру плиту, нагруженную распределенными моментами по краям $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Расчетная схема изображена на рис.3. Принимаем $h = 1/4$. При такой нагрузке момент на контуре $m^{(\xi)} = 1$, а $w^{\eta\eta} = 0$. $w^{\xi\xi}$ на контуре найдем из зависимостей (4) - $w^{\xi\xi} = -1$. Для решения необходимо записать уравнения (5) и (6) для расчетных точек поля с учетом симметрии при $\Delta q^{\xi} = \Delta q^{\eta} = 0$.

Решая систему получим: $w_1^{\xi\xi} = -0{,}185$; $w_1^{\eta\eta} = -0{,}312$. Из (4) определим: $m_1^{(\xi)} = 0{,}281$; $m_1^{(\eta)} = 0{,}369$. Результаты, приведенные в работе С.П. Тимошенко [1]: $m_1^{(\xi)} = 0{,}256$; $m_1^{(\eta)} = 0{,}394$. Погрешность по моментам $m_1^{(\xi)}$ – 9,7%, $m_1^{(\eta)}$ – 6,7%.

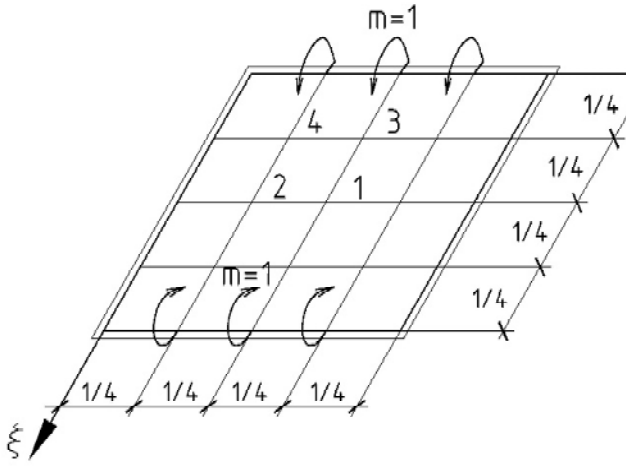


Рис. 3. Расчетная схема к задаче 1

2. Квадратная пластинка, три края которой свободно оперты и один защемлен, загружена равномерно распределенной нагрузкой $p = 1$. Граничные условия как на рис 4.

Для решения этой задачи наряду с уравнениями (5) и (6) составленных для точки поля 22, необходимо записать уравнение (8) для точки контура 23, учитывающее граничные условия. Значение прогиба в точке 22, в уравнении (8), запишем с использованием известного уравнения метода конечных разностей (9).

$$\begin{cases} -4w_{22}^{\xi\xi} + w_{23}^{\eta\eta} - 4w_{22}^{\eta\eta} = \frac{0.5^2}{4}(1+1+1+1), \\ -w_{22}^{\eta\eta} + w_{22}^{\xi\xi} = 0, \\ \frac{w_{22}^{\xi\xi}\cdot 0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^2}{6}\left(2w_{23}^{\eta\eta} + w_{22}^{\eta\eta} + w_{22}^{\xi\xi}\right) = \frac{0{,}5^4}{12^2}(5\cdot 1 + 1); \end{cases} \qquad (10)$$

Решая (10) найдем: $w_{22}^{\xi\xi} = w_{22}^{\eta\eta} = -0{,}0208$; $w_{23}^{\eta\eta} = 0{,}0833$. С учётом (4) $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}0833$;

$m_{22}^{(\eta)} = m_{22}^{(\xi)} = 0{,}027$. Прогиб $w_{22} = 0{,}0028$. Решение в рядах [1] для этой задачи дает: $w_{22} = 0{,}0026$;

$m_{22}^{(\eta)} = 0{,}034$; $m_{22}^{(\xi)} = 0{,}039$; $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}084$. Погрешность по прогибам - 7,7 %, по моменту в заделке – 0.84 %.

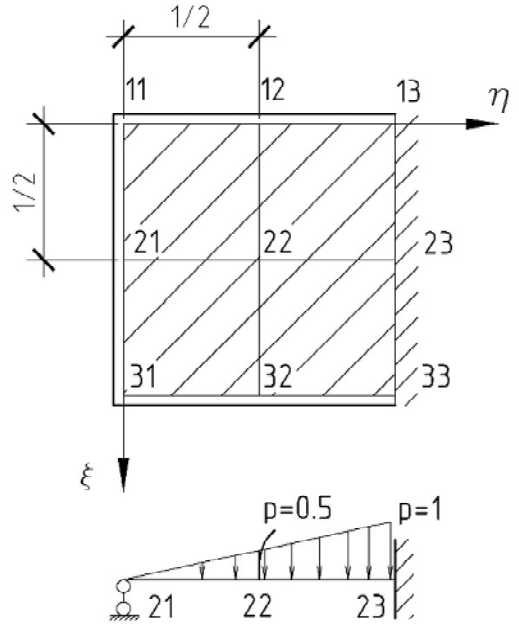


Рис. 4. Расчетная схема к задаче 3

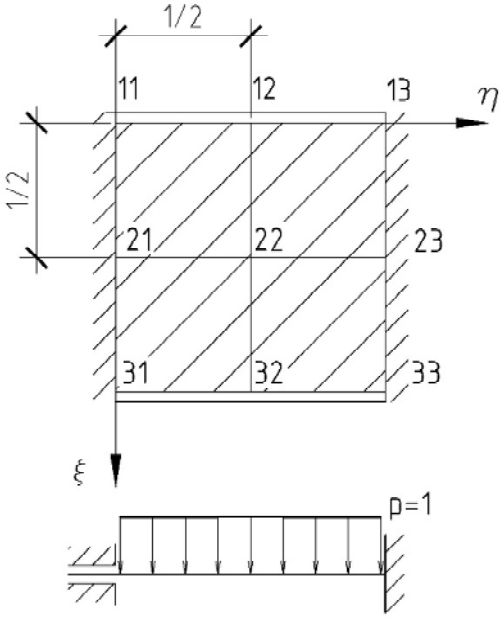


Рис. 5. Расчетная схема к задаче 4

3. Рассмотрим плиту, представленную на рис. 4 под действием гидростатической нагрузки. Уравнения (5) и (6) записываются аналогично предыдущему примеру, при этом $p_{22} = 0{,}5$. Уравнение (8) записываем с учетом (9) полагая $p_{23}^{\eta} = 1$. В результате получим: $w_{22}^{\xi\xi} = w_{22}^{\eta\eta} = -0{,}0092$; $w_{23}^{\eta\eta} = 0{,}0516$. С учётом (4) при $\mu = 0{,}3$ – $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}0516$; $m_{22}^{(\eta)} = m_{22}^{(\xi)} = 0{,}0119$. Прогиб $w_{22} = 0{,}0011$. Решение [1]: $w_{22} = 0{,}0013$; $m_{22}^{(\eta)} = 0{,}019$; $m_{22}^{(\xi)} = 0{,}016$; $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}048$. Погрешность по прогибам – 14,3 %, по моменту в заделке - 7,4 %.

4. Пластинка, жестко закрепленная двумя противоположными сторонами и свободно опертая двумя другими под действием равномерно распределенной нагрузки по всей поверхности (рис. 5). Для решения записываем уравнения (5) и (6) для точки 22, уравнение (8), с учетом (9) для точки 23. При шаге $h = 1/2$, получим следующие результаты: $w_{22}^{\xi\xi} = w_{22}^{\eta\eta} = -0{,}01442$; $w_{23}^{\eta\eta} = 0{,}0673$. С учётом (4) при $\mu = 0{,}3$ - $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}0673$; $m_{22}^{(\eta)} = m_{22}^{(\xi)} = 0{,}0187$. Прогиб $w_{22} = 0{,}0018$. Решение [1]: $w_{22} = 0{,}00195$; $m_{22}^{(\eta)} = 0{,}0332$; $m_{22}^{(\xi)} = 0{,}0244$; $m_{23}^{(\eta)} = -0{,}0698$. Погрешность по прогибу - 8,3 %, по моменту в заделке - 3,7 %.

Таблица 1

Результаты расчетов задач на сетке с шагом $h = 1/2$ и $h = 1/4$

	h	w_{22} в центре	$m_{22}^{(\xi)}$ в центре	$m_{22}^{(\eta)}$ в центре	$m_{23}^{(\eta)}$ в заделке
задача №1	1/2	0,0312	0,422	0,422	-
	1/4	0,0356	0,281	0,369	-
решение [1]		0,0368	0,256	0,394	-
задача №2	1/2	0,0026	0,027	0,027	-0,083
	1/4	0,0027	0,035	0,031	-0,0838
решение [1]		0,0028	0,039	0,034	-0,084
задача №3	1/2	0,0011	0,012	0,012	-0,051
	1/4	0,0013	0,015	0,017	-0,043
решение [1]		0,0013	0,016	0,019	-0,048
задача №4	1/2	0,0018	0,019	0,019	-0,067
	1/4	0,00187	0,022	0,028	-0,069
решение [1]		0,0019	0,024	0,033	-0,069

Решен ряд тестовых задач. Из анализа приведенных результатов следует, что решения с помощью изложенного алгоритма достоверны, погрешность при минимальном числе разбиений плиты на элементы не значительная. Нагрузка может быть любого типа, в том числе сосредоточенная с использованием подхода, показанного в [5], [8], [9], [11]. Исходя из этого, данный метод может быть использован для проведения расчетов подобных задач и для задач с другими вариантами нагрузок и граничных условий. Работа может представлять интерес с методической точки зрения, а также в связи с возможностью определения непосредственно моментов. В заключении отметим, что существует обширная

литература, посвященная расчету изгибаемых плит. Расчет методом конечных разностей в традиционной форме представлен в работах [3], [4], [12]. Вариационные методы использованы в [1], [7], [10]. А также решение методом конечных элементов реализовано в вычислительных комплексах [6], [13].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки пер. с англ. М., Изд-во Наука, 1966, 635 с.

2. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. М.: Изд-во АСВ, 2008. 280 с.

3. Киселев В.А. Расчет пластин. М: Изд-во Стройиздат, 1973. 151 с.

4. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. К.: Изд-во Будивельник, 1973. 488 с.

5. Михайлов Б.А. Пластинки и оболочки с разрывными параметрами. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 196 с.

6. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2009. 336 с

7. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Изд-во: М.: Изд-во Инфра-М; издание 2-е, испр. и доп. 2011. 638 с.

8. Gabbasov R. F., Filotov V.V., Ovarova N.B., Mansour A.M. Dissection method applications for complex shaped membranes and plates // Procedia engineering. 2016. Pp. 444–449.

9. Уварова Н.Б., Парамонов Е.Е. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету изгибаемых плит на локальные и разрывные нагрузки. // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2018. №1. С. 56-59.

10.Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. М.: Изд-во Машиностроение, 1968. 831 с.

11.Габбасов Р.Ф., Ань Хоанг Туан, Ань Нгуен Хоанг. Сравнение результатов расчета тонких изгибаемых плит с использованием обобщенных уравнений методов конечных разностей и последовательных аппроксимаций. // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №1. С. 62–64.

12.Жилкин В.А. Расчет шарнирно опертых прямоугольных пластин методом конечных разностей в MathCAD. АПК России. 2017. Т. 24. №1. С. 119–129.

13.Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Фиалко С.Ю. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. Изд-во: «СКАД СОФТ», 2015. 848 с.

Информация об авторах

Уварова Наталия Борисовна, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики.
E-mail: nbuvarova@yandex.ru
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Парамонов Евгений Евгеньевич, студент.
E-mail: evg.paramonov@yandex.ru
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет.
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Поступила в марте 2018 г.
© Уварова Н.Б., Парамонов Е.Е., 2018

N.B. Uvarova, E.E. Paramonov

BENT PLATES CALCULATION WITH GENERALIZED EQUATIONS USAGE OF THE FINITE DIFFERENCE METHOD ACCORDING TO THE SECOND DERIVATIVES OF THE REQUIRED FUNCTION

The calculation is based on the approximation of the initial differential equation of the bent of a thin isotropic plate due to generalized equations of the finite difference method (FDM) as to the second derivatives of the deflection function. These equations allow to solve a problem taking into account the discontinuities of a required function, its first-order derivative and the right-hand side of a primitive differential equation within integration domain. Solving the system of equations we can obtain the values of the second derivatives of the required function at each calculated point of mesh. Using known values, we can move to bent

moments, which simplifies the solution. The article describes the algorithm for solving problems using the proposed methodology. Examples of calculations with various boundary conditions and load with the minimum number of partitions. The results are compared with the decision of S.P. Timoshenko in the sequences. Such approach can be used as methodological recommendations, also for carrying out verification calculations in the design of structures.

Keywords: *bent plate, refined, isotropic, the required function, discontinuities of the function, computational solution, generalized equations of finite difference method.*

REFERENCES

1. Gabbasov R.F., Gabbasov A.R. Filatov V.V. Numerical construction of discontinuous solutions to the problems of structural mechanics. M.: ASV, 2008. 280 p.

2. Timoshenko S.P. Voinovskiy-Kriger S. Plate and shell translation from English. M, Science, 1966. 635 p.

3. Kiselev V.A. Calculation of plates. M: Stroiizdat, 1973. 151 p.

4. Vainberg D.V. Handbook of strength, stability and oscillations of wafers. K.: Budevilnik, 1973. 488 p.

5. Mikhailov B.A. Plates and shells with discontinuous parameters. L.: Publishing house of the Leningrad university, 1980. 196 p.

6. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.A. Mozgaleva M.L. Numerical and analytical methods for calculation building structures. M.: ASV, 2009. 336 p.

7. Vardanyan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. Resistance of materials with the fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. M.: Infra-M; izdanie 2-e ispr. i dop. 2011. 638 p.

8. Gabbasov R. F., Filotov V.V., Ovarova N.B., Mansour A.M. Dissection method applications for complex shaped membranes and plates. Procedia engineering, 2016, pp. 444–449.

9. Uvarova N.B., Paramonov E.E. Application of the generalized equations of finite difference method to the calculation of bent plates of local and discontinuous loadings. Bulletin of BSTU named after V.G. Shokhov, 2018, no.1, pp. 56–59.

10.Birger I.A., Panovko Ya.G. Strenght, stability, vibrations. Reference book in 3 volumes. Volume 1. M: Mashinostroenie, 1968, 831 p.

11.Gabbasov R.F., An Hoang Tuan, An Nguen Hoang Comparison of the results of calculating thin bending plates using generalized equations of finite difference methods and successive approximations. Industrial and civil constrictions, 2014, no. 1, pp. 62–64.

12.Zhilkin V.A. Calculation of articulated rectangular plates by the finite difference method in MathCAD. APK Russian, 2017, vol. 24, no.1, pp. 119–129.

13.
arpilovskiy V.S., Kriskunov V.S., Malarenko E.Z., Perelmuter A.V., Perelmuter M.F., Fialko S.U. SCAD Office. Version 21. Computer complex SCAD++. «SCAD Soft», 2015. 848 p.

Information about the author
Natalia B. Uvarova, PhD, Assistant professor.
E-mail: nbuvarova@yandex.ru
National Research Moscow State University of Civil Engineering.
Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Evgeniy E. Paramonov, student.
E-mail: evg.paramonov@yandex.ru
National Research Moscow State University of Civil Engineering.
Russia, 129337, Moscow, Yaroslavskoye shosse, 26.

Received in March 2018