

УДК 621.396.67

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Н. ЕГОРОВ, В.В. ГЛАДЕЙЧУК

Военная академия Республики Беларусь, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 5 мая 2017

Аннотация. Предложена методика численного решения задачи распределения тока для проволочных антенн произвольной геометрии. Методика отличается сочетанием универсальности по отношению к геометрии излучателя, высокой достоверности решения и возможности полной автоматизации вычислений. Оценка достоверности выполнена решением тестовой задачи для линейного симметричного вибратора.

Ключевые слова: проволочные антенны, численные методы.

Abstract. The method of the numerical solution of a task of distribution of current for wire antennas of any geometry is offered. The method differs in a universality combination in relation to geometry of a radiator, high reliability of the decision and a possibility of full automation of calculations. The assessment of reliability is executed by the solution of a test task for the linear symmetric vibrator.

Keywords: wire antennas, numerical methods.

Doklady BGUIR. 2017, Vol. 106, No. 4, pp. 56–61
Method of the numerical solution of a task of distribution
of current for wire antennas by method of the integrated equations
Yu.N. Egorov, V.V. Gladeychuk

Введение

Проволочные антенны являются широко распространенным типом излучателей. Их строгий электродинамический анализ выполняется методом интегральных уравнений, имеющих много разновидностей, обусловленных, в основном, необходимостью оптимизации решения с учетом геометрии антенны, требуемой точности и доступных вычислительных ресурсов. Одной из актуальных задач теории проволочных антенн является разработка математической модели проволочных антенн, сочетающей в себе универсальность по отношению к геометрии излучателя, высокую достоверность решения и возможность полной автоматизации вычислений. Для построения такой модели авторами предложена методика численного решения задачи распределения тока на основе интегрального уравнения Поклингтона.

Математическая модель проволочных антенн произвольной геометрии на основе интегрального уравнения Поклингтона

Интегральное уравнение Поклингтона для криволинейного проводника длиной L и радиусом r_0 может быть представлено в виде [1, 2]

$$\int_L I(s')K(s, s')ds' = U(s), \quad (1)$$

где $I(s')$ – искомая функция тока, текущего в проводнике; $K(s, s') = \frac{\partial^2 G(s, s')}{\partial s \partial s'} - k^2 G(s, s') \vec{s}_0 \vec{s}'$ – ядро интегрального уравнения Поплингтона; $U(s) = i \frac{k}{\rho_0} \vec{E}_\tau(s)$ – функция, определяющая возбуждение проводника; $\vec{E}_\tau(s)$ – касательная составляющая электрического поля, возбуждающего проводник; $G(s, s') = G = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$ – функция Грина свободного пространства; $r = \sqrt{(\vec{s} - \vec{s}')^2 + r_0^2}$ – расстояние между точками наблюдения и истока; \vec{s}, \vec{s}' – радиус-векторы точек на оси проводника; \vec{s}_0, \vec{s}'_0 – единичные векторы, касательные к проводнику антенны; $\rho_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi$ – волновое сопротивление свободного пространства; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Один из основных вариантов построения математической модели проволочных антенн произвольной геометрии базируется на численном решении уравнения (1) методом моментов [1, 3] и заключается в сведении исходного интегрального уравнения (1) к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{n=1}^N I_n K_{mn} = U_m \quad (2)$$

или в сокращенной матричной форме

$$KI = U, \quad (3)$$

где $K_{mn} = \int_L w_m(s) \int_L K(s, s') f_n(s') ds' ds$ – элементы матрицы обобщенных сопротивлений K ;

$U_m = \int_L w_m(s) U(s) ds$ – элементы столбца обобщенных напряжений U ; $f_n(s')$, $w_m(s)$ –

соответственно базисные и весовые функции; I_n – элементы строки искомого коэффициентов разложения тока I ; $m, n \in [1; N]$.

При использовании в качестве базисных кусочно-постоянных функций, а в качестве весовых – дельта-функций Дирака (метод Крылова-Боголюбова [4, 5]) элементы матриц K и U принимают вид:

$$K_{mn} = \int_{\Delta L_n} K(s_m, s') ds', \quad (4)$$

$$U_m = i \frac{k}{\rho_0} E_\tau(s_m), \quad (5)$$

где ΔL_n – длина n -го сегмента разбиения; s_n, s_m – координаты центра n -го и m -го сегмента соответственно.

Интеграл в (4) необходимо определять с высокой точностью. Алгоритм численного интегрирования, сочетающий низкие затраты вычислительных ресурсов при заданной точности, предложен в [4].

Величина ΔL является основным параметром численной модели, фактически определяющим ее достоверность и ресурсоемкость.

Методика оценки устойчивости решения

Интегральное уравнение (1) принадлежит к классу уравнений Фредгольма 1-го рода, приводящих к некорректным, по Адамару, задачам [6]. Это проявляется в неустойчивости вычислительного алгоритма. Для получения устойчивого решения применяется метод саморегуляризации, рассматривающий в качестве регуляризирующей переменной длину сегмента разбиения ΔL проволочного излучателя [1, 2]. При этом критерием устойчивости является сходимость каких-либо параметров, связанных с искомым током. Значения

оцениваемых параметров, полученные на интервале сходимости, могут сверяться с иными теоретическими или экспериментальными данными, если таковые известны.

Применение метода саморегуляризации требует затрат времени на определение интервала сходимости путем неоднократного повторения процедуры расчета. Снижение временных затрат может достигаться ограничением числа расчетов на относительно узком интервале рекомендуемых значений длин сегментов, на котором решение подобных задач обычно сходится. Но и в этом случае решение о достоверности полученных результатов принимается на основе нечетких критериев, что практически исключает возможность полной автоматизации вычислений.

Важное значение при исследовании решения на сходимость имеет выбор оцениваемого параметра. Для проволочных антенн вопросы настройки и согласования обычно имеют первоочередное значение, поэтому в качестве такого параметра удобно использовать входное сопротивление $Z_{вх}$. Однако в работе [5] на примере линейного симметричного вибратора показано, что наличие интервала сходимости по входному сопротивлению антенны не является однозначным свидетельством его высокой достоверности. Более высокая точность решения по $Z_{вх}$ достигается, если в роли оцениваемого параметра использовать число обусловленности СЛАУ (2). При этом в качестве критерия устойчивости рассматривается его локальный экстремум на интервале $r_0 < \Delta L < 2r_0$. Благодаря однозначности критерия этот способ позволяет полностью автоматизировать численное решение уравнения (1), но необходимость поиска экстремума все же ограничивает скорость расчета.

Максимальное сокращение времени вычислений может достигаться использованием заранее известных значений ΔL , при котором решение уравнения (1) априорно обеспечивало бы приемлемо высокую точность по $Z_{вх}$ в широком частотном диапазоне. Возможность существования таких значений исследована авторами на основе тестовой задачи для линейных симметричных вибраторов.

Анализ достоверности решения при различных условиях сегментации

Исходные данные для решения тестовой задачи взяты из [7], где в виде таблиц представлены значения входного сопротивления вибраторов из проводников разного радиуса, полученные для следующих соотношений: $l/r_0 = 10...100$; $l/\lambda = 0,01...0,55$; $\Delta/l = 0,01...0,1$ (рис. 1).

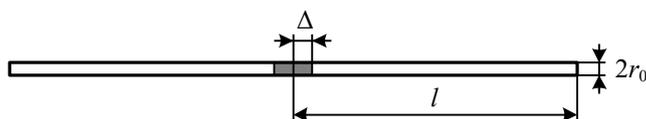


Рис. 1. Линейная симметричная вибраторная антенна

В ходе моделирования учитывалось, что при изменении длины сегмента ΔL изменяется также и ширина зазора возбуждения 2Δ , влияющая на входное сопротивление антенны. Поэтому подбор тестовых значений из [7] осуществлялся с учетом максимального соответствия параметров Δ и ΔL . Первичное поле в зазоре возбуждения также задавалось одинаково, с использованием модели δ -генератора [5].

Для исследования были взяты три вибратора разной толщины: $l/r_0 = 40, 70, 100$. Расчеты их входного сопротивления выполнялись в диапазоне $l/\lambda = 0,01...0,55$ с шагом 0,01. Проводники антенн равномерно разбивались на сегменты, длина которых выбиралась из диапазона $r_0 < \Delta L < 3r_0$. В результате для каждого вибратора получено семейство характеристик входного сопротивления $Z_{вх,p}(l/\lambda) = R_{вх,p} + iX_{вх,p}$, рассчитанных при различных значениях $\Delta L/r_0$.

Оценка степени соответствия расчетных и тестовых характеристик выполнена путем вычисления средней относительной погрешности определения активной и реактивной составляющих входного сопротивления в диапазоне $l/\lambda \in [0,01; 0,55]$:

$$\overline{\Delta R_{\text{вх}}} = \frac{1}{55} \sum_{l/\lambda=0,01}^{0,55} \left| 1 - \frac{R_{\text{вх},p}(l/\lambda)}{R_{\text{вх},m}(l/\lambda)} \right| \cdot 100\%, \quad (4)$$

$$\overline{\Delta X_{\text{вх}}} = \frac{1}{55} \sum_{l/\lambda=0,01}^{0,55} \left| 1 - \frac{X_{\text{вх},p}(l/\lambda)}{X_{\text{вх},m}(l/\lambda)} \right| \cdot 100\%, \quad (5)$$

где $R_{\text{вх},p}(l/\lambda)$, $X_{\text{вх},p}(l/\lambda)$ – расчетные зависимости; $R_{\text{вх},m}(l/\lambda)$, $X_{\text{вх},m}(l/\lambda)$ – тестовые зависимости, взятые из [7].

Графики изменения вычисленных средних погрешностей (4) и (5) в зависимости от параметра сегментации $\Delta L/r_0$ представлены на рис. 2.

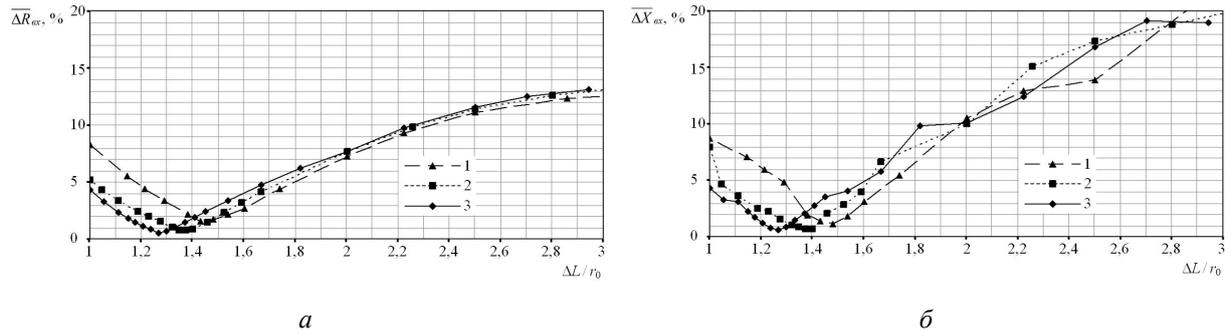


Рис. 2. Средняя относительная погрешность решения определения активной (а) и реактивной (б) составляющих входного сопротивления: 1 – $l/r_0 = 40$; 2 – $l/r_0 = 70$; 3 – $l/r_0 = 100$

Анализ графиков показывает, что применение фиксированного значения длины сегментов разбиения ($\Delta L/r_0 = \text{const}$), взятого на установленном в [5] участке сходимости числа обусловленности СЛАУ (2) $r_0 < \Delta L < 2r_0$, может обеспечить достаточно высокую точность решения во всем рабочем диапазоне длин волн ($l/\lambda = 0,01..0,55$). При этом изменяющееся в 55-кратном диапазоне число базисных функций на длине волны и отношение r_0/λ не оказывают существенного влияния на достоверность полученных результатов.

Значительное влияние на качество решения, по мнению авторов, имеет отношение длины проводника к его радиусу (l/r_0). С увеличением l/r_0 минимальное значение средней относительной погрешности определения активной и реактивной составляющих $Z_{\text{вх}}$ уменьшается. Физически это можно объяснить, во-первых, повышением точности аппроксимации искомого тока за счет увеличения числа базисных функций не только на длине волны, но и на длине проводника. Это обстоятельство имеет большое значение при расчете электрически коротких ($l \ll \lambda$) излучателей, когда сегментация модели, исходя из кажущегося достаточным числа базисных функций на длине волны, может привести к большим ошибкам в решении. Во-вторых, тонкопроволочное приближение, на котором базируется интегральное уравнение Поклингтона, применимо лишь в тех случаях, когда исследуемая структура состоит из проводников с весьма малыми поперечными размерами [1, 3]. То есть чем больше l/r_0 , тем лучше математическая модель тонкопроволочного излучателя отвечает физической сущности решаемой задачи.

Для сопоставления точности решения со сходимостью числа обусловленности СЛАУ (2) вычислены его средние нормированные значения в виде

$$\bar{\mu} = \frac{1}{55 \cdot \mu_{\text{max}}} \sum_{l/\lambda=0,01}^{0,55} \mu(l/\lambda), \quad (6)$$

где $\mu(l/\lambda) = \|K\| \cdot \|K^{-1}\|$ – число обусловленности; $\|K\| = \max_m \sum_n |K_{mn}|$ – m -норма матрицы K ;

μ_{\max} – максимальное значение $\mu(l/\lambda)$.

Полученные с помощью (6) зависимости $\bar{\mu}$ от параметра сегментации $\Delta L/r_0$ представлены в виде графиков на рис. 3.

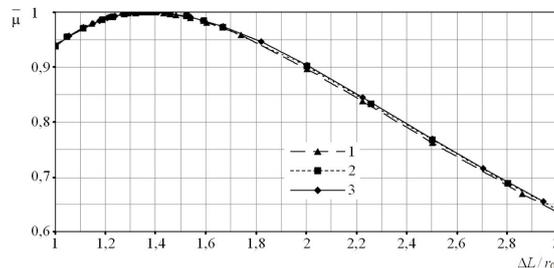


Рис. 3. Среднее нормированное число обусловленности СЛАУ: 1 – $l/r_0 = 40$; 2 – $l/r_0 = 70$; 3 – $l/r_0 = 100$

Из графиков видно, что для вибраторов разной толщины кривые $\bar{\mu}$ идентичны друг другу и плавно сходятся к экстремумам, сосредоточенным на узком интервале $1,3r_0 < \Delta L < 1,4r_0$. Анализ значений средних относительных погрешностей (4) и (5), взятых на указанном интервале ΔL , показывает, что они близки к минимальным и для рассмотренных вибраторов разной толщины составляют порядка 1–3 % (рис. 2).

Для наглядного подтверждения высокой точности решения в табл. 1 представлены результаты расчета входного сопротивления $Z_{\text{вх.}p}(l/\lambda) = R_{\text{вх.}p} + iX_{\text{вх.}p}$ рассматриваемых вибраторов, полученные по критерию устойчивости числа обусловленности СЛАУ при $\Delta L/r_0 \approx 1,37$, и соответствующие им тестовые значения $Z_{\text{вх.}m}(l/\lambda) = R_{\text{вх.}m} + iX_{\text{вх.}m}$, взятые из [7] с учетом ширины зазора возбуждения $2\Delta = 2\Delta L$.

Таблица 1. Расчетные и тестовые значения входных сопротивлений вибраторов

l/λ	$l/r_0 = 40$		$l/r_0 = 70$		$l/r_0 = 100$	
	$Z_{\text{вх.}m}$	$Z_{\text{вх.}p}$	$Z_{\text{вх.}m}$	$Z_{\text{вх.}p}$	$Z_{\text{вх.}m}$	$Z_{\text{вх.}p}$
0,01	0,067 – 4934i	0,068 – 4963i	0,066 – 5888i	0,067 – 5934i	0,066 – 6515i	0,067 – 6584i
0,05	1,723 – 954,8i	1,748 – 957,5i	1,709 – 1139i	1,724 – 1146i	1,706 – 1260i	1,726 – 1272i
0,1	7,567 – 420,2i	7,685 – 421,2i	7,461 – 503,5i	7,527 – 506,9i	7,425 – 558i	7,503 – 563,8i
0,15	20,03 – 210i	20,39 – 210,2i	19,55 – 254,9i	19,73 – 257i	19,34 – 284,2i	19,51 – 287,8i
0,2	45,39 – 72,52i	46,39 – 71,77i	43,71 – 93,06i	44,11 – 94,19i	42,90 – 106,6i	43,17 – 108,9i
0,25	99,52 + 45,51i	102,2 + 47,3i	94,55 + 47,82i	95,44 + 47,39i	91,96 + 48,31i	92,12 + 46,74i
0,3	222,8 + 149,1i	230,1 + 150,8i	212,7 + 188,5i	214,6 + 188,5i	206 + 209,4i	204,8 + 207,9i
0,35	468,4 + 134,1i	481,6 + 126,4i	496,1 + 260,4i	499,6 + 259,8i	497,6 + 333,1i	490,2 + 335,6i
0,4	583,1 – 180,2i	580,8 – 198,8i	811,5 – 91,71i	814,8 – 94,91i	946,5 + 7,95i	952,2 + 32,11i
0,45	362,9 – 360,8i	352,9 – 365,9i	536,2 – 469,6i	537,8 – 472,6i	678,8 – 536i	701,2 – 537,3i
0,5	190,3 – 326,8i	185,2 – 326,5i	257,3 – 438,9i	258,8 – 441,7i	309,6 – 520,7i	320,4 – 529,6i
0,55	106,7 – 251,9i	104,6 – 251,2i	132,9 – 332,9i	134,1 – 335,7i	151,7 – 390,7i	157 – 398,6i

Поведение кривых средних погрешностей (4) и (5) на интервале $2,5r_0 < \Delta L < 3r_0$ (рис. 2) свидетельствует о сходимости решения по входному сопротивлению, но при этом их значения составляют порядка 12–13 % по $R_{\text{вх}}$ и 18–20 % по $X_{\text{вх}}$, что полностью подтверждает выводы, установленные в [5].

Заключение

На примере тестовой задачи авторами установлено, что при использовании в качестве критерия устойчивости численного решения интегрального уравнения Поклингтона методом Крылова-Боголюбова максимума среднего в диапазоне частот числа обусловленности СЛАУ на интервале $1,3r_0 < \Delta L < 1,4r_0$ точность расчета возрастает примерно в 4 раза по активной

и в 6 раз по реактивной составляющей входного сопротивления антенны в сравнении с результатами, полученными по критерию сходимости этих параметров на интервале $2,5r_0 < \Delta L < 3r_0$. Таким образом, максимум числа обусловленности СЛАУ на интервале $1,3r_0 < \Delta L < 1,4r_0$ является не только однозначным критерием устойчивости решения, но и обеспечивает его высокую достоверность в широком частотном диапазоне.

Полученные результаты подтверждают возможность построения на основе предложенной методики простой, универсальной и достаточно точной модели проволочных излучателей с полной автоматизацией вычислений за счет использования фиксированных значений длин сегментов разбиения. Благодаря малым значениям рекомендуемых длин сегментов такая модель способна обеспечить высокое качество аппроксимации исходной геометрии антенн и широкие возможности имитации сложных способов их возбуждения [1].

Список литературы

1. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М. : Мир, 1977. 485 с.
2. Демидчик В.И., Калашников Н.В., Рунов А.В. Алгоритм расчета токораспределения электрически длинных криволинейных проводников // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 3. С. 82–84.
3. Бузова М.А., Юдин В.В. Проектирование проволочных антенн на основе интегральных уравнений : Учеб. пособие. М. : Радио и связь, 2005. 172 с.
4. Егоров Ю.Н., Гладейчук В.В. Математическая модель проволочных фрактальных антенн произвольной геометрии // Электроника инфо. 2015. № 6 (120). С. 51–55.
5. Егоров Ю.Н., Гладейчук В.В. Оценка устойчивости численного решения ИУ Поклингтона методом Крылова-Боголюбова // Вестник Воен. акад. Респ. Беларусь. 2016. № 2 (51). С. 55–61.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач М. : Наука, 1979. 288 с.
7. Социлин А.В., Эминов С.И. Таблицы входных сопротивлений вибраторных антенн : справ. / Под ред. Л.Д. Бахраха. М. : Радиотехника, 2005. 78 с.

References

1. Vychislitel'nyye metody v elektrodinamike / Pod red. R. Mitry. M. : Mir, 1977. 485 s. (in Russ.)
2. Demidchik V.I., Kalashnikov N.V., Runov A.V. Algoritm rascheta tokoraspredeleniya elektricheski dlinnykh krivolineynykh provodnikov // Izvestiya VUZov. Radioelektronika. 1983. T. 26. № 3. S. 82–84. (in Russ.)
3. Buzova M.A., Yudin V.V. Proyektirovaniye provolochnykh antenn na osnove integral'nykh uravneniy : Ucheb. posobiye. M. : Radio i svyaz', 2005. 172 s. (in Russ.)
4. Egorov Yu.N., Gladeychuk V.V. Matematicheskaya model' provolochnykh fraktal'nykh antenn proizvol'noy geometrii // Elektronika info. 2015. № 6 (120). S. 51–55. (in Russ.)
5. Egorov Yu.N., Gladeychuk V.V. Otsenka ustoychivosti chislennogo resheniya IU Poklingtona metodom Krylova-Bogolyubova // Vestn. Voyen. akad. Resp. Belarus'. 2016. № 2 (51). S. 55–61. (in Russ.)
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach M. : Nauka, 1979. 288 s. (in Russ.)
7. Sochilin A.V., Eminov S.I. Tablitsy vkhodnykh soprotivleniy vibratorynykh antenn : Sprav. / Pod red. L.D. Bakhrakha. M. : Radiotekhnika, 2005. 78 s. (in Russ.)

Сведения об авторах

Гладейчук В.В., к.т.н., доцент, начальник кафедры радиотехники Военной академии Республики Беларусь.

Егоров Ю.Н., начальник цикла кафедры радиотехники Военной академии Республики Беларусь.

Information about the authors

Gladeychuk V.V., Ph.D, associate professor, head of department of radio engineering of Military academy of the Republic of Belarus.

Egorov Yu.N., head of cycle of department of radio engineering of Military academy of the Republic of Belarus.

Адрес для корреспонденции

220057, Республика Беларусь,
г. Минск, пр. Независимости, д. 220,
Военная академия Республики Беларусь
тел. +375-29-778-19-05;
e-mail: egorov_yury@mail.ru;
Егоров Юрий Николаевич

Address for correspondence

220057, Republic of Belarus,
Minsk, Nezavisimosti ave., 220,
Military academy of the Republic of Belarus
tel. +375-29-778-19-05;
e-mail: egorov_yury@mail.ru;
Egorov Yury Nikolaevich