



МАТЕМАТИКА

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

П. К. Корнеев, Е. Н. Гончарова, И. А. Журавлева, Е. В. Непретимова

ACCELERATION OF CONVERGENCE
OF POLYNOMIAL AND
FRACTIONAL-RATIONAL EXPANSION
APPROXIMATING TRIGONOMETRIC AND
HYPERBOLIC FUNCTIONS

Korneev P. K., Goncharova E. N.,
Zhuravleva I. A., Nepretimova E. V.

The article develops the idea of argument change as a method to accelerate the convergence of polynomial and fractional-rational expressions being approximants of approximately calculated trigonometric and hyperbolic functions, as the result the initial interval of the argument change reduces 2^k ($k=1,2,\dots$) times, which naturally results in the acceleration of the consequences' convergence of the approximants corresponding to the calculated functions.

В статье развивается идея изменения аргумента как метод ускорения сходимости полиномиальных и дробно-рациональных выражений, являющихся аппроксимантами приближенно вычисляемых тригонометрических и гиперболических функций, в результате чего первоначальный отрезок изменения аргумента сокращается в 2^k ($k=1,2,\dots$) раз, что естественно влечет ускорение сходимости последовательностей соответствующих аппроксимант вычисляемых функций.

Ключевые слова: аппроксимация, степенные разложения, дробно-рациональные разложения, сходимость.

УДК 519.651

В процессе решения многих практических задач приходится исследовать функциональные зависимости между величинами, которые приближенно либо точно выражаются с помощью элементарных функций. Следует отметить, что вычисление этих функций занимает значительную долю времени решения всей задачи на компьютере.

Элементарные функции принадлежат к классу функций, представимых степенными рядами.

Основными методами для вычисления элементарных функций на компьютере являются следующие: степенные разложения, многочленные и рациональные приближения, разложения в цепные дроби, итеративные процессы. Широко используется также кусочно-многочленная и кусочно-рациональная аппроксимации.

При вычислении значений элементарных функций различными методами всегда возникает одна и та же проблема – проблема ускорения счета. Разработано много методов такого ускорения. Мы остановимся на одном из них – методе уменьшения интервала изменения аргумента.

Сущность предлагаемого метода ускорения сходимости в следующем. Исследуемая тригонометрическая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0, a]$, на предмет вычисления ее значений преобразуется в последовательность тождественно ей равных функций на $[0, a]$:



$$f(x) \equiv j_1\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \cdot j_1\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \equiv j_2\left(\operatorname{tg} \frac{x}{4}\right) \cdot \dots \cdot j_{k-1}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2^{k-1}}\right) \equiv j_k\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2^k}\right) \cdot \dots$$

В результате этих преобразований отрезок $[0, a]$ уменьшается в 2^k ($k = 1, 2, \dots$) раз, т. е. переходит в отрезок $\left[0, \frac{a}{2^k}\right]$, что и влечет ускорение сходимости счета.

Функции $\operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$ ($k = 1, 2, \dots$) будем приближать частичными суммами их тейлоровских разложений в ряд и подходящими дробями цепных дробей, соответствующих тейлоровским разложениям, что позволит разложить тригонометрические функции в ветвящиеся цепные дроби [2].

Функции $\operatorname{tg} \frac{x}{2^k}$ должны принимать такие значения, при которых имеют смысл все приводимые ниже формулы.

Предлагаемый метод уменьшения интервала в 2^k ($k = 1, 2, \dots$) раз рассмотрим на примере вычисления приближенных значений функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x. \quad (1)$$

Приведем соответствующие разложения функции (1) в тейлоровский ряд и цепную дробь [1, 3]:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} \cdot (2^{2k} - 1)}{(2k)!} |B_{2k}| \cdot x^{2k-1}, \quad (2)$$

где $|x| < \frac{p}{2}$, B_{2k} – числа Бернулли.

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \mathbf{K} - \frac{x^2}{2k+1} - \mathbf{K}}, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}, |x| < \frac{p}{2}. \quad (3)$$

1. Вопрос приближения функции (1) частичными суммами ряда Тейлора и подходящими дробями соответствующей цепной дроби исследован в статье «Сравнительный анализ приближений элементарных функций многочленами и цепными дробями», помещенной в этом же журнале.

Все дальнейшие результаты будем сравнивать с соответствующими результатами указанной выше статьи. За исходный отрезок исследования возьмем отрезок $\left[0, \frac{p}{4}\right]$.

2. Пусть $k = 1$.

Рассмотрим известное преобразование

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (4)$$

и представим его в виде

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}, \quad (5)$$



Если вместо функции $y = tg \frac{x}{2}$ подставить ее разложение в цепную дробь, то получим разложение функции $y = tg x$ в ветвящуюся цепную дробь с двумя ветвями:

$$tg x = \frac{-2}{\frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \dots}}}} - \frac{1}{\frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \dots}}}}, \quad (6)$$

где $z = \frac{x}{2}$.

Вместо функции $y = tg \frac{x}{2}$ можно подставить в (5) ее тейлоровское разложение. Тогда представление (5) преобразуется к виду:

$$tg x = \frac{-2}{T(z) - \frac{1}{T(z)}}, \quad (7)$$

где $T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} \cdot (2^{2k} - 1)}{(2k)!} |B_{2k}| \cdot z^{2k-1}$, $z = \frac{x}{2}$.

Теперь будем функцию $tg z \left(z = \frac{x}{2} \right)$ приближать частичными суммами ряда (2) и подходящими дробями цепной дроби (3). Оценки норм соответствующих погрешностей приближений будем получать по результатам проводимого вычислительного эксперимента. Корректность оценок норм погрешностей рассматриваемых приближений нами обосновано в статье «Сравнительный анализ приближений элементарных функций многочленами и цепными дробями».

2.1. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_3(z) = z + \frac{1}{3}z^3, \quad (8)$$

$$tg z \approx d_2(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3}} \quad (9)$$

и найдем приближенные значения функции $tg x$ при помощи представлений (8) и (9) на сетке

$$w_h = \left\{ x_i = \frac{p}{40} \cdot i, i = 0, 1, 2, \dots, K, 10 \right\}. \quad (10)$$

Все вычисления организуем в среде MathCAD.

Здесь tp_i , td_i , t_i , rp_i , rd_i – сеточные функции, а именно: tp_i – таблица приближенных значений $tg x$, полученная при

```

pi := 4 * atan(1)      h := pi/40      i := 1..10
pi = 3.14159265        h = 0.07853982

p(x) := x + x^3/3      d(x) := x/(1 - x^2/3)
tp(x) := -2/(p(x) - 1/p(x))  td(x) := -2/(d(x) - 1/d(x))
xi := i * h      zi := .5 * xi      tpi := tp(zi)      tdi := td(zi)
ti := tan(xi)      rpi := |ti - tpi|      rdi := |ti - tdi|
x0 := 0      tp0 := 0      td0 := 0      t0 := 0      rp0 := 0
rd0 := 0      i := 0..10

```



помощи полиномиального приближения; td_i – таблица приближенных значений $tg x$, полученная при помощи приближения подходящей дробью; t_i – таблица точных значений $tg x$; rp_i , rd_i – таблицы соответствующих абсолютных погрешностей.

Результаты вычислений представлены в таблицах 1, 2.

Таблица 1

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.07853982	0.07870168	0.07870171	2.50352035e-8
0.15707963	0.15838363	0.15838444	8.13920961e-7
0.23561945	0.24007241	0.24007876	6.34769361e-6
0.31415927	0.32489191	0.32491970	2.77812534e-5
0.39269908	0.41412447	0.41421356	8.90954714e-5
0.47123890	0.50928953	0.50952545	2.35919911e-4
0.54977871	0.61225074	0.61280079	5.50043345e-4
0.62831853	0.72536835	0.72654253	1.17417674e-3
0.70685835	0.85172504	0.85408069	2.35564649e-3
0.78539816	0.99547370	1.00000000	4.52629509e-3

Таблица 2

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.07853982	0.07870170	0.07870171	4.17483316e-9
0.15707963	0.15838430	0.15838444	1.35952974e-7
0.23561945	0.24007770	0.24007876	1.06321854e-6
0.31415927	0.32491502	0.32491970	4.67137603e-6
0.39269908	0.41419851	0.41421356	1.50566865e-5
0.47123890	0.50948533	0.50952545	4.01168400e-5
0.54977871	0.61270656	0.61280079	9.42270755e-5
0.62831853	0.72633962	0.72654253	2.02903397e-4
0.70685835	0.85366949	0.85408069	4.11199035e-4
0.78539816	0.99920062	1.00000000	7.99380791e-4

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_3(x)\|_{C[0; \frac{\pi}{4}]} < 4.53 \cdot 10^{-3}, \quad (11)$$

$$\|tg x - td_2(x)\|_{C[0; \frac{\pi}{4}]} < 8 \cdot 10^{-4}. \quad (12)$$

2.2. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_5(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5, \quad (13)$$

$$tg z \approx d_3(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5}}} \quad (14)$$

и найдем приближенные значения функции $y = tg x$ на сетке (10) при помощи приближений (13), (14). Результаты вычислений приведены в таблицах 3, 4.



Таблица 3

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.078539816340	0.078701706809	0.078701706825	1.562681928302e-11
0.157079632679	0.158384438292	0.158384440325	2.032183504808e-9
0.235619449019	0.240078723420	0.240078759080	3.565998468735e-8
0.314159265359	0.324919418774	0.324919696233	2.774590426857e-7
0.392699081699	0.414212171994	0.414213562373	1.390378693233e-6
0.471238898038	0.509520147628	0.509525449494	5.301866013774e-6
0.549778714378	0.612783961121	0.612800788140	1.682701898265e-5
0.628318530718	0.726495599830	0.726542528005	4.692817515994e-5
0.706858347058	0.853961474542	0.854080685463	1.192109212081e-4
0.785398163397	0.999716975215	1.000000000000	2.830247850268e-4

Таблица 4

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.078539816340	0.078701706824	0.078701706825	1.839500773926e-13
0.157079632679	0.158384440301	0.158384440325	2.397296250400e-11
0.235619449019	0.240078758658	0.240078759080	4.221010763139e-10
0.314159265359	0.324919692933	0.324919696233	3.299955309011e-9
0.392699081699	0.414213545734	0.414213562373	1.663876497693e-8
0.471238898038	0.509525385564	0.509525449494	6.393080653755e-8
0.549778714378	0.612800583397	0.612800788140	2.047431111318e-7
0.628318530718	0.726541950973	0.726542528005	5.770319869702e-7
0.706858347058	0.854079201884	0.854080685463	1.483579960548e-6
0.785398163397	0.999996429401	1.000000000000	3.570598807512e-6

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_5(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3 \cdot 10^{-4}, \quad (15)$$

$$\|tg x - td_3(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3.6 \cdot 10^{-6}. \quad (16)$$

2.3. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_7(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7, \quad (17)$$

$$tg z \approx d_3(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7}}. \quad (18)$$

и с их помощью вычислим приближенные значения функции $y = tg(x)$ на сетке (10).

Результаты вычислений приведены в таблицах 5, 6.

Таблица 5

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824609	0.078701706824618	9.756084828894e-15
0.157079632679490	0.158384440319457	0.158384440324536	5.079769938021e-12
0.235619449019234	0.240078758879556	0.240078759080116	2.005598742638e-10
0.314159265358979	0.324919693458696	0.324919696232906	2.774210750012e-9
0.392699081698724	0.414213540651379	0.414213562373095	2.172171637005e-8



0.471238898038469	0.509525330218398	0.509525449494429	1.192760311630e-7
0.549778714378214	0.612800272878821	0.612800788139932	5.152611107784e-7
0.628318530717959	0.726540651097126	0.726542528005361	1.876908234499e-6
0.706858347057703	0.854074650941918	0.854080685463467	6.034521548015e-6
0.785398163397448	0.999982311396601	1.000000000000000	1.768860339868e-5

Таблица 6

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000000000000000
0.157079632679490	0.158384440324534	0.158384440324536	2.331468351713e-15
0.235619449019234	0.240078759080023	0.240078759080116	9.306444503920e-14
0.314159265358979	0.324919696231613	0.324919696232906	1.293631868293e-12
0.392699081698724	0.414213562362898	0.414213562373095	1.019739848118e-11
0.471238898038469	0.509525449437971	0.509525449494429	5.645828249357e-11
0.549778714378214	0.612800787893634	0.612800788139932	2.462975379203e-10
0.628318530717959	0.726542527097901	0.726542528005361	9.074598850134e-10
0.706858347057703	0.854080682507561	0.854080685463467	2.955905964441e-9
0.785398163397448	0.999999991206992	1.000000000000000	8.793008099417e-9

Здесь нормы погрешностей оцениваются следующим образом:

$$\|tg \, x - tp_7(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.8 \cdot 10^{-5},$$

$$\|tg \, x - td_4\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 9 \cdot 10^{-9}.$$

2.4. Возьмем приближения

$$tg \, z \approx P_9(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9, \quad (19)$$

$$tg \, z \approx d_5(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} - \frac{z^2}{9}}. \quad (20)$$

и с их помощью вычислим приближенные значения функции $y = tg(x)$ на сетке (10).

Результаты вычислений приведены в таблицах 7, 8.

Таблица 7

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000000000
0.157079632679490	0.158384440324488	0.158384440324536	4.82114348e-14
0.235619449019234	0.240078759077591	0.240078759080116	2.52517451e-12
0.314159265358979	0.324919696185925	0.324919696232906	4.69813077e-11
0.392699081698724	0.414213561883910	0.414213562373095	4.89185359e-10
0.471238898038469	0.509525445993999	0.509525449494429	3.50043006e-9
0.549778714378214	0.612800768861295	0.612800788139932	1.92786366e-8
0.628318530717959	0.726542440307773	0.726542528005361	8.76975880e-8
0.706858347057703	0.854080339836174	0.854080685463467	3.45627293e-7
0.785398163397448	0.999998778301432	1.000000000000000	1.22169857e-6



Таблица 8

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.00000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.00000000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.00000000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.00000000
0.392699081698724	0.414213562373091	0.414213562373095	3.99680289e-15
0.471238898038469	0.509525449494397	0.509525449494429	3.16413562e-14
0.549778714378214	0.612800788139744	0.612800788139932	1.88404847e-13
0.628318530717959	0.726542528004454	0.726542528005361	9.06719144e-13
0.706858347057703	0.854080685459726	0.854080685463467	3.74045239e-12
0.785398163397448	0.99999999986255	1.000000000000000	1.37453382e-11

Здесь нормы погрешностей оцениваются следующим образом:

$$\|tg x - tp_9(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.2 \cdot 10^{-6},$$

$$\|tg x - td_5\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.4 \cdot 10^{-11}.$$

2.5. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_{11}(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \frac{1382}{155975}z^{11}, \quad (21)$$

$$tg z \approx d_6(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} - \frac{z^2}{9} - \frac{z^2}{11}}. \quad (22)$$

и с их помощью вычислим приближенные значения функции $y = tg(x)$ на сетке (10). Результаты вычислений приведены в таблицах 9, 10.

Таблица 9

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.00000000
0.157079632679490	0.158384440324501	0.158384440324536	3.55271368e-14
0.235619449019234	0.240078759078713	0.240078759080116	1.40343293e-12
0.314159265358979	0.324919696213389	0.324919696232906	1.95170546e-11
0.392699081698724	0.414213562218003	0.414213562373095	1.55091717e-10
0.471238898038469	0.509525448617287	0.509525449494429	8.77141471e-10
0.549778714378214	0.612800784157686	0.612800788139932	3.98224587e-9
0.628318530717959	0.726542512380048	0.726542528005361	1.56253132e-8
0.706858347057703	0.854080629864470	0.854080685463467	5.55989971e-8
0.785398163397448	0.999999814735008	1.000000000000000	1.85264992e-7

Таблица 10

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.00000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.00000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.00000000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.00000000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.00000000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.00000000



0.471238898038469	0.509525449494429	0.509525449494429	0.00000000
0.549778714378214	0.612800788139932	0.612800788139932	0.00000000
0.628318530717959	0.726542528005360	0.726542528005361	0.00000000
0.706858347057703	0.854080685463463	0.854080685463467	3.44169138e-15
0.785398163397448	0.999999999999985	1.000000000000000	1.45439216e-14

Здесь нормы погрешностей оцениваются следующим образом:

$$\|tg x - tp_{11}(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 7 \cdot 10^{-8}, \quad (23)$$

$$\|tg x - td_6\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.5 \cdot 10^{-14}. \quad (24)$$

3. Пусть $k = 2$.

Если для функции $tg \frac{x}{2}$ воспользоваться равенством (5), то для функции tgx получим представление:

$$tgx = \frac{-2}{\frac{-2}{tg \frac{x}{4} - \frac{1}{tg \frac{x}{4}}} - \frac{1}{-2}}, \quad (25)$$

Если вместо функции $tg \frac{x}{4}$ в представлении (25) подставить ее разложение в цепную дробь, то получим разложение tgx в ветвящуюся цепную дробь с четырьмя ветвями:

$$tgx = \frac{-2}{\frac{-2}{1 - \frac{z}{3 - \frac{z^2}{5 - \frac{z^2}{\ddots}}}} - \frac{1}{\frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \frac{z^2}{\ddots}}}}} - \frac{1}{-2}}, \quad (26)$$

$$z = \frac{x}{4}.$$

Если вместо функции $tg \frac{x}{4}$ в равенстве (25) подставить ее тейлоровское разложение в ряд, то получим представление:

$$tgx = \frac{-2}{\frac{-2}{\frac{T(z)}{T(z)} - \frac{1}{T(z)}} - \frac{1}{\frac{z}{T(z)} - \frac{1}{T(z)}}}, \quad (27)$$



$z = \frac{x}{4}$, $T(z)$ - тейлоровское разложение

функции $\operatorname{tg} \frac{x}{4}$.

Теперь будем функцию $\operatorname{tg} z$ ($z = \frac{x}{4}$)

в равенствах (26), (27) приближать частичными суммами ряда (2) и подходящими дробями цепной дроби (3).

3.1. Возьмем приближения

$$\operatorname{tg} z \approx P_3(z) = z + \frac{1}{3}z^3, \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} z \approx d_2(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3}}. \quad (29)$$

и найдем приближенные значения функции $\operatorname{tg} x$ при помощи представлений (28) и (29) на сетке (10).

Все вычисления организуем в среде MathCAD. Результаты вычислений представлены в таблицах 11, 12.

$$\begin{aligned} \pi &:= 4 \cdot \operatorname{atan}(1) & h &:= \frac{\pi}{40} & i &:= 1..10 \\ \pi &= 3.14159265 & h &= 0.07853982 \\ p(x) &:= x + \frac{x^3}{3} & d(x) &:= \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3}} \\ u(x) &:= \frac{-2}{p(x) - \frac{1}{p(x)}} & v(x) &:= \frac{-2}{d(x) - \frac{1}{d(x)}} \\ tp(x) &:= \frac{-2}{u(x) - \frac{1}{u(x)}} & td(x) &:= \frac{-2}{v(x) - \frac{1}{v(x)}} \\ x_i &:= i \cdot h & z_i &:= .25 \cdot x_i & tp_i &:= tp(z_i) & td_i &:= td(z_i) \\ t_i &:= \tan(x_i) & rp_i &:= |t_i - tp_i| & rd_i &:= |t_i - td_i| \\ x_0 &:= 0 & tp_0 &:= 0 & td_0 &:= 0 & t_0 &:= 0 & rp_0 &:= 0 \\ rd_0 &:= 0 & i &:= 0..10 \end{aligned}$$

Таблица 11

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000	0.000000000	0.000000000000	0.000
0.078539816	0.078701705	0.078701706825	1.566e-9
0.157079633	0.158384389	0.158384440325	5.101e-8
0.235619449	0.240078360	0.240078759080	3.992e-7
0.314159265	0.324917941	0.324919696233	1.756e-6
0.392699082	0.414207896	0.414213562373	5.666e-6
0.471238898	0.509510330	0.509525449494	1.512e-5
0.549778714	0.612765208	0.612800788140	3.558e-5
0.628318531	0.726465745	0.726542528005	7.678e-5
0.706858347	0.853924684	0.854080685463	1.560e-4
0.785398163	0.999695846	1.000000000000	3.042e-4

Таблица 12

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000	0.000000000	0.000000000000	0.000
0.078539816	0.078701707	0.078701706825	2.610e-10
0.157079633	0.158384432	0.158384440325	8.506e-9
0.235619449	0.240078692	0.240078759080	6.662e-8
0.314159265	0.324919403	0.324919696233	2.933e-7
0.392699082	0.414212615	0.414213562373	9.476e-7
0.471238898	0.509522917	0.509525449494	2.533e-6
0.549778714	0.612794818	0.612800788140	5.970e-6
0.628318531	0.726529617	0.726542528005	1.291e-5
0.706858347	0.854054391	0.854080685463	2.629e-5
0.785398163	0.999948594	1.000000000000	5.141e-5



На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_3(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3.1 \cdot 10^{-4}, \quad (30)$$

$$\|tg x - td_2(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 5.2 \cdot 10^{-5}. \quad (31)$$

3.2. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_5(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5, \quad (32)$$

$$tg z \approx d_3(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - 5}} \quad (33)$$

и найдем приближенные значения функции $tg x$ при помощи представлений (32) и (33) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 13, 14.

Таблица 13

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000
0.078539816	0.078701708	0.078701707	7.825e-10
0.157079633	0.158384466	0.158384440	2.546e-8
0.235619449	0.240078958	0.240078759	1.988e-7
0.314159265	0.324920567	0.324919696	8.713e-7
0.392699082	0.414216362	0.414213562	2.800e-6
0.471238898	0.509532882	0.509525449	7.433e-6
0.549778714	0.612818170	0.612800788	1.738e-5
0.628318531	0.726579771	0.726542528	3.724e-5
0.706858347	0.854155737	0.854080685	7.505e-5
0.785398163	1.000144989	1.000000000	1.450e-4

Таблица 14

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000	0.000000000	0.000000000000	0.000
0.078539816	0.078701707	0.078701706825	2.873e-15
0.157079633	0.158384440	0.158384440325	3.748e-13
0.235619449	0.240078759	0.240078759080	6.606e-12
0.314159265	0.324919696	0.324919696233	5.171e-11
0.392699082	0.414213562	0.414213562373	2.612e-10
0.471238898	0.509525448	0.509525449494	1.005e-9
0.549778714	0.612800785	0.612800788140	3.228e-9
0.628318531	0.726542519	0.726542528005	9.121e-9
0.706858347	0.854080662	0.854080685463	2.352e-8
0.785398163	0.999999943	1.000000000000	5.681e-8

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_5(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 4.8 \cdot 10^{-6}, \quad (34)$$

$$\|tg x - td_3(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 5.7 \cdot 10^{-8}. \quad (35)$$

3.3. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_7(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7, \quad (36)$$



$$\operatorname{tg} z \approx d_4(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} \quad (37)$$

и найдем приближенные значения функции $\operatorname{tg} x$ при помощи представлений (32) и (33) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 15, 16.

Таблица 15

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000
0.078539816340	0.078701706825	0.078701706825	0.000
0.157079632679	0.158384440325	0.158384440325	1.987e-14
0.235619449019	0.240078759079	0.240078759080	7.884e-13
0.314159265359	0.324919696222	0.324919696233	1.096e-11
0.392699081699	0.414213562287	0.414213562373	8.633e-11
0.471238898038	0.509525449017	0.509525449494	4.777e-10
0.549778714378	0.612800786057	0.612800788140	2.083e-9
0.628318530718	0.726542520338	0.726542528005	7.668e-9
0.706858347058	0.854080660508	0.854080685463	2.495e-8
0.785398163397	0.999999925837	1.000000000000	7.416e-8

Таблица 16

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000	0.000
0.078539816340	0.078701706825	0.078701706825	0.000
0.157079632679	0.158384440325	0.158384440325	0.000
0.235619449019	0.240078759080	0.240078759080	0.000
0.314159265359	0.324919696233	0.324919696233	5.052e-15
0.392699081699	0.414213562373	0.414213562373	3.997e-14
0.471238898038	0.509525449494	0.509525449494	2.217e-13
0.549778714378	0.612800788139	0.612800788140	9.684e-13
0.628318530718	0.726542528002	0.726542528005	3.576e-12
0.706858347058	0.854080685452	0.854080685463	1.167e-11
0.785398163397	0.999999999965	1.000000000000	3.482e-11

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|\operatorname{tg} x - tp_7(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 7.5 \cdot 10^{-8}, \quad (38)$$

$$\|\operatorname{tg} x - td_4(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3.5 \cdot 10^{-11}. \quad (39)$$

3.4. Возьмем приближения

$$\operatorname{tg} z \approx P_9(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9, \quad (40)$$

$$\operatorname{tg} z \approx d_4(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} - \frac{z^2}{9} \quad (41)$$

и найдем приближенные значения функции $\operatorname{tg} x$ при помощи представлений (40) и (41) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 17, 18.



Таблица 17

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000
0.235619449019234	0.240078759080115	0.240078759080116	1.110e-15
0.314159265358979	0.324919696232879	0.324919696232906	2.737e-14
0.392699081698724	0.414213562372758	0.414213562373095	3.373e-13
0.471238898038469	0.509525449491742	0.509525449494429	2.687e-12
0.549778714378214	0.612800788123986	0.612800788139932	1.595e-11
0.628318530717959	0.726542527928685	0.726542528005361	7.668e-11
0.706858347057703	0.854080685147635	0.854080685463467	3.158e-10
0.785398163397448	0.999999998841227	1.000000000000000	1.159e-9

Таблица 18

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.000
0.471238898038469	0.509525449494429	0.509525449494429	0.000
0.549778714378214	0.612800788139932	0.612800788139932	0.000
0.628318530717959	0.726542528005360	0.726542528005361	0.000
0.706858347057703	0.854080685463463	0.854080685463467	3.775e-15
0.785398163397448	0.999999999999986	1.000000000000000	1.366e-14

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_9(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.2 \cdot 10^{-9}, \quad (42)$$

$$\|tg x - td_5(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.7 \cdot 10^{-14}. \quad (43)$$

3.5. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_9(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 + \frac{1382}{155925}z^{11}, \quad (44)$$

$$tg z \approx d_4(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} - \frac{z^2}{9} - \frac{z^2}{11}}. \quad (45)$$

и найдем приближенные значения функции $tg x$ при помощи представлений (44) и (45) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 19, 20.

Таблица 19

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.000
0.392699081698724	0.414213562373094	0.414213562373095	1.388e-15



0.471238898038469	0.509525449494414	0.509525449494429	1.510e-14
0.549778714378214	0.612800788139810	0.612800788139932	1.223e-13
0.628318530717959	0.726542528004594	0.726542528005361	7.666e-13
0.706858347057703	0.854080685459469	0.854080685463467	3.997e-12
0.785398163397448	0.99999999981894	1.000000000000000	1.811e-11

Таблица 20

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.000
0.471238898038469	0.509525449494429	0.509525449494429	0.000
0.549778714378214	0.612800788139932	0.612800788139932	0.000
0.628318530717959	0.726542528005361	0.726542528005361	0.000
0.706858347057703	0.854080685463467	0.854080685463467	0.000
0.785398163397448	1.000000000000000	1.000000000000000	0.000

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_{11}(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.9 \cdot 10^{-11}, \quad (46)$$

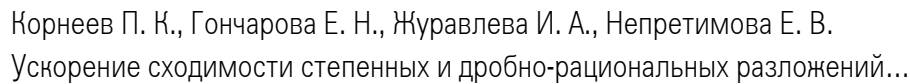
$$\|tg x - td_6(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 10^{-17}. \quad (47)$$

4. Пусть $k = 3$.

Если для функции $tg \frac{x}{4}$ воспользоваться равенством (25), то для функции $tg x$ получим представление:

$$tg x = \frac{-2}{\frac{-2}{tg \frac{x}{8} - \frac{1}{tg \frac{x}{8}}} - \frac{1}{\frac{-2}{tg \frac{x}{8} - \frac{1}{tg \frac{x}{8}}} - \frac{1}{\frac{-2}{tg \frac{x}{8} - \frac{1}{tg \frac{x}{8}}} - \frac{1}{\frac{-2}{tg \frac{x}{8} - \frac{1}{tg \frac{x}{8}}}}. \quad (48)$$

Если вместо функции $tg \frac{x}{8}$ в представлении (48) подставить ее разложение в цепную дробь, то получим разложение $tg x$ в ветвящуюся цепную дробь с восьмью ветвями:



(49)

$$\frac{x}{8}.$$

Если вместо функции $tg \frac{x}{8}$ в равенстве (48) подставить ее тейлоровское разложение в ряд, то равенство (48) примет вид:

(50)

$$z = \frac{x}{8}, \quad T(z) - \text{тейлоровское разложение функции } tg \frac{x}{8}.$$

Теперь будем функцию $tgz(z = \frac{x}{8})$ в равенствах (49), (50) приближать частичными суммами ряда (2) и подходящими дробями цепной дроби (3).

4.1. Возьмем приближения

(51)

(52)

и найдем приближенные значения функции tq x при помощи представлений (51) и (52) на сетке (10).

Результаты помещены в таблицах 21, 22.



$$pi := 4 \cdot atan(1) \quad h := \frac{pi}{40}$$

$$p(x) := x + \frac{1}{3}x^3 \quad d(x) := \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3}}$$

$$u(x) := \frac{-2}{p(x) - \frac{1}{p(x)}} \quad u1(x) := \frac{-2}{u(x) - \frac{1}{u(x)}}$$

$$tp(x) := \frac{-2}{u1(x) - \frac{1}{u1(x)}} \quad v(x) := \frac{-2}{d(x) - \frac{1}{d(x)}}$$

$$v1(x) := \frac{-2}{v(x) - \frac{1}{v(x)}} \quad td(x) := \frac{-2}{v1(x) - \frac{1}{v1(x)}}$$

$$i := 1..10 \quad x_i := i \cdot h \quad z_i := .125 \cdot x_i$$

$$tp_i := tp(z_i) \quad td_i := td(z_i) \quad t_i := \tan(x_i)$$

$$rp_i := |t_i - tp_i| \quad rd_i := |t_i - td_i| \quad i:=0..10$$

Таблица 21

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706727	0.078701706824618	9.787795574034e-11
0.157079632679490	0.158384437134	0.158384440324536	3.190352343418e-9
0.235619449019234	0.240078734091	0.240078759080116	2.498890150360e-8
0.314159265358979	0.324919586201	0.324919696232906	1.100314274138e-7
0.392699081698724	0.414213206722	0.414213562373095	3.556512694902e-7
0.471238898038469	0.509524498616	0.509525449494429	9.508786652512e-7
0.549778714378214	0.612798545473	0.612800788139932	2.242666522934e-6
0.628318530717959	0.726537675502	0.726542528005361	4.852503327935e-6
0.706858347057703	0.854070797037	0.854080685463467	9.888426639848e-6
0.785398163397448	0.999980655432	1.0000000000000000	1.934456828889e-5

Таблица 22

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706808	0.078701706824618	1.631353385712e-11
0.157079632679490	0.158384439793	0.158384440324536	5.317986051523e-10
0.235619449019234	0.240078754914	0.240078759080116	4.166107542281e-9
0.314159265358979	0.324919677884	0.324919696232906	1.834867702222e-8
0.392699081698724	0.414213503047	0.414213562373095	5.932626889749e-8
0.471238898038469	0.509525290818	0.509525449494429	1.586764463157e-7
0.549778714378214	0.612800413730	0.612800788139932	3.744095137259e-7
0.628318530717959	0.726541717468	0.726542528005361	8.105374990075e-7
0.706858347057703	0.854079032778	0.854080685463467	1.652685008069e-6
0.785398163397448	0.999996764745	1.0000000000000000	3.235254630529e-6



На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_3(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 2 \cdot 10^{-5}, \quad (53)$$

$$\|tg x - td_2(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3.3^{-6}. \quad (54)$$

4.2. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_5(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5, \quad (55)$$

$$tg z \approx d_3(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5}} \quad (56)$$

и найдем приближенные значения функции $tg x$ при помощи представлений (55) и (56) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 23, 24.

Таблица 23

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824615	0.078701706824618	3.816391647148976e-15
0.157079632679490	0.158384440324038	0.158384440324536	4.977962486663046e-13
0.235619449019234	0.240078759071342	0.240078759080116	8.773842763432072e-12
0.314159265358979	0.324919696164225	0.324919696232906	6.868094981626882e-11
0.392699081698724	0.414213562026227	0.414213562373095	3.468680898066623e-10
0.471238898038469	0.509525448158978	0.509525449494429	1.335450861006393e-9
0.549778714378214	0.612800783852852	0.612800788139932	4.287080135334520e-9
0.628318530717959	0.726542515889690	0.726542528005361	1.211567135506186e-8
0.706858347057703	0.854080654215964	0.854080685463467	3.124750225236284e-8
0.785398163397448	0.999999924531703	1.0000000000000000	7.546829694504709e-8

Таблица 24

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	3.816391647148976e-15	0.078701706824618	0.0000000000000000
0.157079632679490	4.977962486663046e-13	0.158384440324536	5.856426454897701e-15
0.235619449019234	8.773842763432072e-12	0.240078759080116	1.033062524413708e-13
0.314159265358979	6.868094981626882e-11	0.324919696232906	8.084644065320390e-13
0.392699081698724	3.468680898066623e-10	0.414213562373095	4.085065619108264e-12
0.471238898038469	1.335450861006393e-9	0.509525449494429	1.573519092801234e-11
0.549778714378214	4.287080135334520e-9	0.612800788139932	5.054112683922085e-11
0.628318530717959	1.211567135506186e-8	0.726542528005361	1.429245610751195e-10
0.706858347057703	3.124750225236284e-8	0.854080685463467	3.688820360281397e-10
0.785398163397448	7.546829694504709e-8	1.0000000000000000	8.916355431765055e-10

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_5(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 7.6 \cdot 10^{-8}, \quad (57)$$

$$\|tg x - td_3(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 9 \cdot 10^{-10}. \quad (58)$$



4.2. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_7(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7, \quad (59)$$

$$tg z \approx d_4(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7}} \quad (60)$$

и найдем приближенные значения функции $tg x$ при помощи представлений (59) и (60) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 25, 26.

Таблица 25

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000000000000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000000000000000
0.235619449019234	0.240078759080113	0.240078759080116	3.053113317719181e-15
0.314159265358979	0.324919696232863	0.324919696232906	4.285460875053104e-14
0.392699081698724	0.414213562372756	0.414213562373095	3.387290448131353e-13
0.471238898038469	0.509525449492551	0.509525449494429	1.877831223850990e-12
0.549778714378214	0.612800788131727	0.612800788139932	8.204770196584832e-12
0.628318530717959	0.726542527975076	0.726542528005361	3.028532979953980e-11
0.706858347057703	0.854080685364611	0.854080685463467	9.885547935795103e-11
0.785398163397448	0.99999999705242	1.000000000000000	2.947574406775289e-10

Таблица 26

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.000000000000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.000000000000000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.000000000000000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.000000000000000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.000000000000000
0.471238898038469	0.509525449494428	0.509525449494429	0.000000000000000
0.549778714378214	0.612800788139928	0.612800788139932	3.885780586188048e-15
0.628318530717959	0.726542528005347	0.726542528005361	1.409983241273949e-14
0.706858347057703	0.854080685463421	0.854080685463467	4.551914400963142e-14
0.785398163397448	0.999999999999863	1.000000000000000	1.364464097264317e-13

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg x - tp_7(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 3 \cdot 10^{-10}, \quad (61)$$

$$\|tg x - td_4(x)\|_{C[0; \frac{p}{4}]} < 1.4 \cdot 10^{-13}. \quad (62)$$

4.3. Возьмем приближения

$$tg z \approx P_9(z) = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9, \quad (63)$$

$$tg z \approx d_5(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \frac{z^2}{7} - \frac{z^2}{9}}. \quad (64)$$



и найдем приближенные значения функции $tg\ x$ при помощи представлений (63) и (64) на сетке (10). Результаты помещены в таблицах 27, 28.

Таблица 27

x_i	tp_i	t_i	rp_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.0000000000000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.0000000000000000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.0000000000000000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.0000000000000000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.0000000000000000
0.471238898038469	0.509525449494426	0.509525449494429	2.664535259100376e-15
0.549778714378214	0.612800788139916	0.612800788139932	1.565414464721471e-14
0.628318530717959	0.726542528005285	0.726542528005361	7.571721027943568e-14
0.706858347057703	0.854080685463154	0.854080685463467	3.129718706418316e-13
0.785398163397448	0.999999999998848	1.000000000000000	1.151634343443675e-12

Таблица 26

x_i	td_i	t_i	rd_i
0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.078539816339745	0.078701706824618	0.078701706824618	0.0000000000000000
0.157079632679490	0.158384440324536	0.158384440324536	0.0000000000000000
0.235619449019234	0.240078759080116	0.240078759080116	0.0000000000000000
0.314159265358979	0.324919696232906	0.324919696232906	0.0000000000000000
0.392699081698724	0.414213562373095	0.414213562373095	0.0000000000000000
0.471238898038469	0.509525449494429	0.509525449494429	0.0000000000000000
0.549778714378214	0.612800788139932	0.612800788139932	0.0000000000000000
0.628318530717959	0.726542528005361	0.726542528005361	0.0000000000000000
0.706858347057703	0.854080685463467	0.854080685463467	0.0000000000000000
0.785398163397448	1.000000000000000	1.000000000000000	0.0000000000000000

На основе результатов этих таблиц заключаем, что

$$\|tg\ x - tp_9(x)\|_{C\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} < 1.2 \cdot 10^{-12}, \quad (65)$$

$$\|tg\ x - td_5(x)\|_{C\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} < 10^{-16}. \quad (66)$$

По результатам проведенного вычислительного эксперимента сделаем следующие выводы.

1. При уменьшении интервала изменения аргумента в *два* раза в случае тейлоровского приближения каждой ветви выражения (7) переход от многочлена $P_{2k-1}(z)$ к многочлену $P_{2k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на порядок; в случае же приближения каждой ветви выражения (6) подходящей дробью переход от подходящей дроби $d_k(z)$ к $d_{k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на 2-3 порядка.

2. При уменьшении интервала изменения аргумента в *четыре* раза в случае тейлоровского приближения каждой ветви выражения (27) переход от многочлена $P_{2k-1}(z)$ к многочлену $P_{2k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на 2 порядка; в случае же приближения



каждой ветви выражения (26) подходящей дробью переход от подходящей дроби $d_k(z)$ к $d_{k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на 3 порядка.

3. При уменьшении интервала изменения аргумента в *восемь* раз в случае тейлоровского приближения каждой ветви выражения (50) переход от многочлена $P_{2k-1}(z)$ к многочлену $P_{2k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на 2 порядка; в случае же приближения каждой ветви выражения (49) подходящей дробью переход от подходящей дроби $d_k(z)$ к $d_{k+1}(z)$ улучшает качество аппроксимации на 3-4 порядка.

4. Из двух рассмотренных методов приближения по простоте реализации и качеству приближения несомненным преимуществом обладает метод цепных дробей.

5. Увеличение количества звеньев разложения функции $tg(x)$ в ветвящуюся цепную дробь практически не усложняет алгоритм вычисления приближенных значений указанной функции.

Примечание. Аналогичные результаты можно получить при аппроксимации функции $y = th\ x$ подходящими дробями. Так как тригонометрические функции $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через функцию $tg\ \frac{x}{2}$, гиперболические функции $sh\ x$ и $ch\ x$ – через $th\ \frac{x}{2}$, показательная функция e^x – через $th\ \frac{x}{2}$, то указанные функции можно с успехом представлять ветвящимися цепными дробями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. СМБ. – М.: Физматгиз, 1963. – 248 с.
2. Скоробагатко В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983.
3. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехиздат, 1956.

Об авторах

Корнеев Петр Кириллович, Ставропольский государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики. Сфера научных интересов – численные методы, приближение функций с помощью цепных дробей.

teacher@pm.stavsu.ru

Гончарова Елена Николаевна, Ставропольский государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики. Сфера научных интересов – численные методы.

hele@rbcmail.ru

Журавлева Ирина Александровна, Ставропольский государственный университет, кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики. Сфера научных интересов – численные методы, методика преподавания информатики.

teacher@pm.stavsu.ru

Непретимова Елена Владимировна, Ставропольский государственный университет, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики. Сфера научных интересов – численные методы.

teacher@pm.stavsu.ru