ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УЧЕБНЫХ ИННОВАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СПОСОБ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВНЕДРЕНИЯ НОВЫХ ФГОС

Глушков А.И.[1], **Шенцева Л.Н.**[2 ©]
[1]Преподаватель, Воронежский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова;
[2]кандидат географических наук, доцент, Воронежский филиал РЭУ им. Г.В. Плеханова

Аннотация

Статья посвящена прикладной и практической направленности обучения математике студентов ВУЗов и ССУЗов в *целях повышения качества математического образования и ориентацию его содержания и методов на тесную взаимосвязь с общественными, экономическими и другими науками. Авторы рассматривают применение математических методов при изучении различных явлений и процессов социально-экономической деятельности человека с использованием в процессе обучения современных информационных технологий.*

Summary

The article is devoted to applied and practical orientation of teaching mathematics students of Universities and Colleges in order to improve the quality of mathematical education and orientation of its content and methods in close relationship with social, economic, and other Sciences. The authors consider the application of mathematical methods in the study of various phenomena and processes of socio-economic activities of people using in the teaching process of modern information technologies.

Ключевые слова: последовательность, степень двойки, вероятность, закон Бенфорда, второй замечательный предел, правило «семидесяти двух»

Keywords: sequence a power of two, the probability that Benford's law, the second remarkable limit, the rule is "seventy-two"

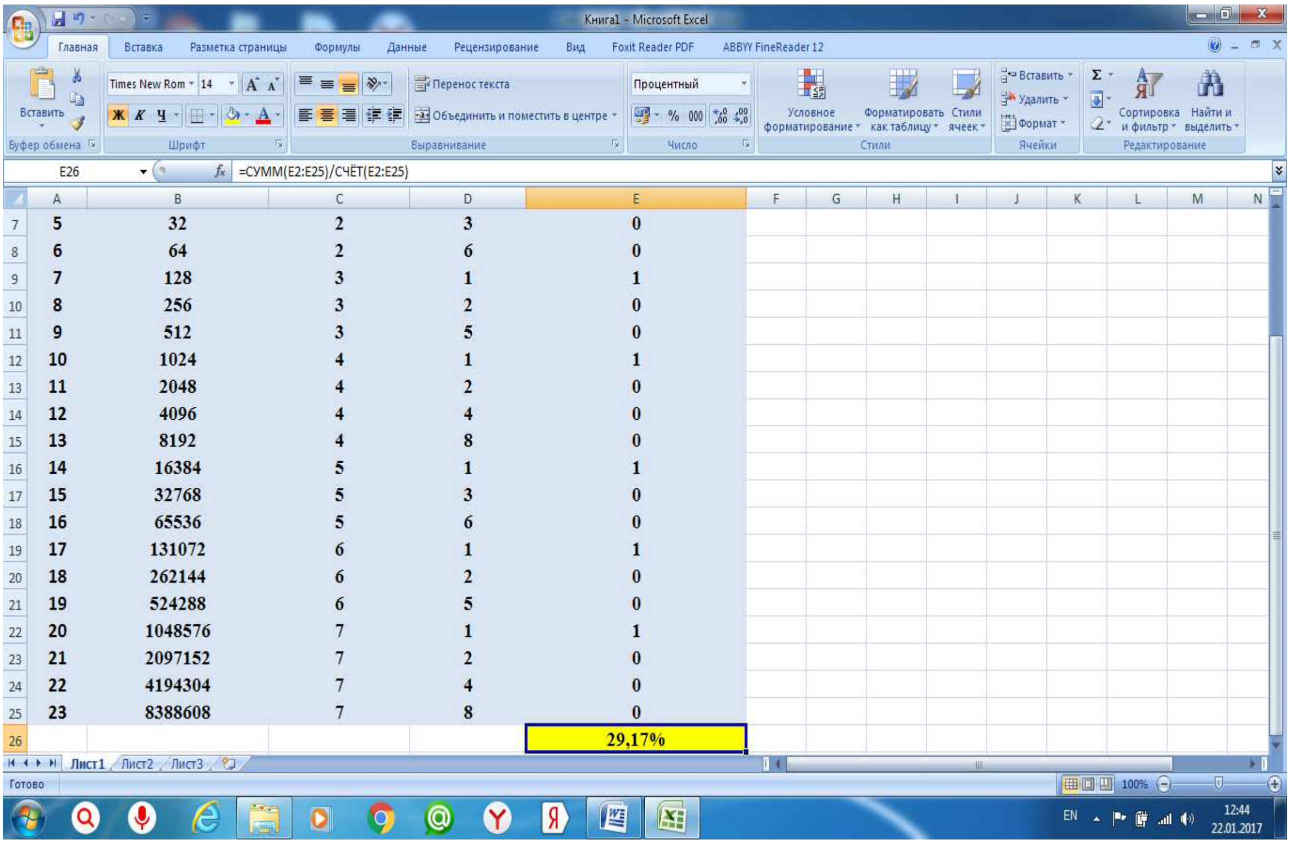
Присоединение Российской Федерации к Болонскому процессу привело к изменениям в приоритетах, содержании, структуре отечественного образования. Одним из направлений деятельности по совершенствованию системы образования становится работа по повышению его качества. Поиск нестандартных эффективных методов обучения, способных заинтересовать обучающихся, стимулировать и мотивировать процесс познания является важной учебной задачей.

Особое место в системе экономического образования занимает математика, которая дает возможность с высокой научной обоснованностью применять математические методы для сбора и обработки статистической информации, анализа результатов и решения задач в различных областях научной и практической деятельности [1]. В условиях увеличения часов для самостоятельной работы студентов и сокращения аудиторных занятий, важно научить студента мыслить самостоятельно, творчески, через систему учебных инновационных заданий. Для этого нужно решить проблему сочетания фундаментальной и прикладной направленности обучения студентов математике. В связи с этим нами рассмотрено применение закона степеней двойки и второго замечательного предела, как способов активизации познавательной активности студентов.

Опираясь на подходы А. Арнольда и В. Болтянского [2; 3; 5,22], рассмотрим задачу прикладного содержания, получившую название «закон степеней двойки» и применимую в экономических, региональных и других исследованиях. С помощью этой задачи можно провести анализ и описание различных подходов к определению вероятности.

Считаем целесообразным исследовать решение этой задачи со студентами при изучении различных подходов к определению вероятности.

Нужно найти степени двойки, которые начинаются с нужной последовательности цифр. Последовательность первых цифр чисел $2^n, n = 0, 1, 2, \dots$ начинается с цифр $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \dots$ Можно заметить, что чаще всего в данной последовательности встречается единица. Упростим задачу и найдём вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается с цифры 1. Как показывает компьютерный расчёт уже для первых нескольких десятков степеней двойки, единицы составляют примерно 30% членов этой последовательности. Такой расчёт можно сделать, например, с помощью электронных таблиц. В столбец A, начиная с ячейки $A2$, запишем показатели степеней $0, 1, 2, \dots$ В ячейку $B2$ поместим формулу $=\text{СТЕПЕНЬ}(2; A2)$. В ячейку $C2$ поместим формулу $=\text{ЦЕЛОЕ}(LOG10(B2)) + 1$. Поясним смысл этой формулы. Если число 2^n является k −значным, то $10^{k-1} \leq 2^n < 10^k$, $k - 1 \leq n \cdot lg2 < k$. Поэтому $[n \cdot lg2] = k - 1$, $[n \cdot lg2] + 1 = [lg2^n] + 1 = k$, где $[n \cdot lg2]$ целая часть иррационального числа $n \cdot lg2$. Для нахождения старшей цифры k −значного числа, необходимо это число разделить нацело на 10^{k-1}. Поэтому в ячейку $D1$ поместим формулу $= \text{ЦЕЛОЕ}(B2/\text{СТЕПЕНЬ}(10; C2 - 1))$. В ячейку $E2$ запишем логическую формулу для подсчёта степеней, начинающихся на 1: $= \text{ЕСЛИ}(D2 = 1; 1; 0)$. Скопируем ведённые формулы в соответствующие столбцы. Для нахождения искомой вероятности в последнюю ячейку столбца E ($E26$) запишем формулу $= \text{СУММ}(E2{:}E25)/\text{СЧЁТ}(E2{:}E25)$, предварительно преобразовав формат данной ячейки в «процентный». Формула $= СУММ(E2{:}E25)$ подсчитает количество единиц в столбце D, с помощью формулы $= СЧЁТ(E2{:}E25)$ посчитаем число всех цифр в данной ячейке. Как видно из таблицы для $n = 23$ p =29,17%.



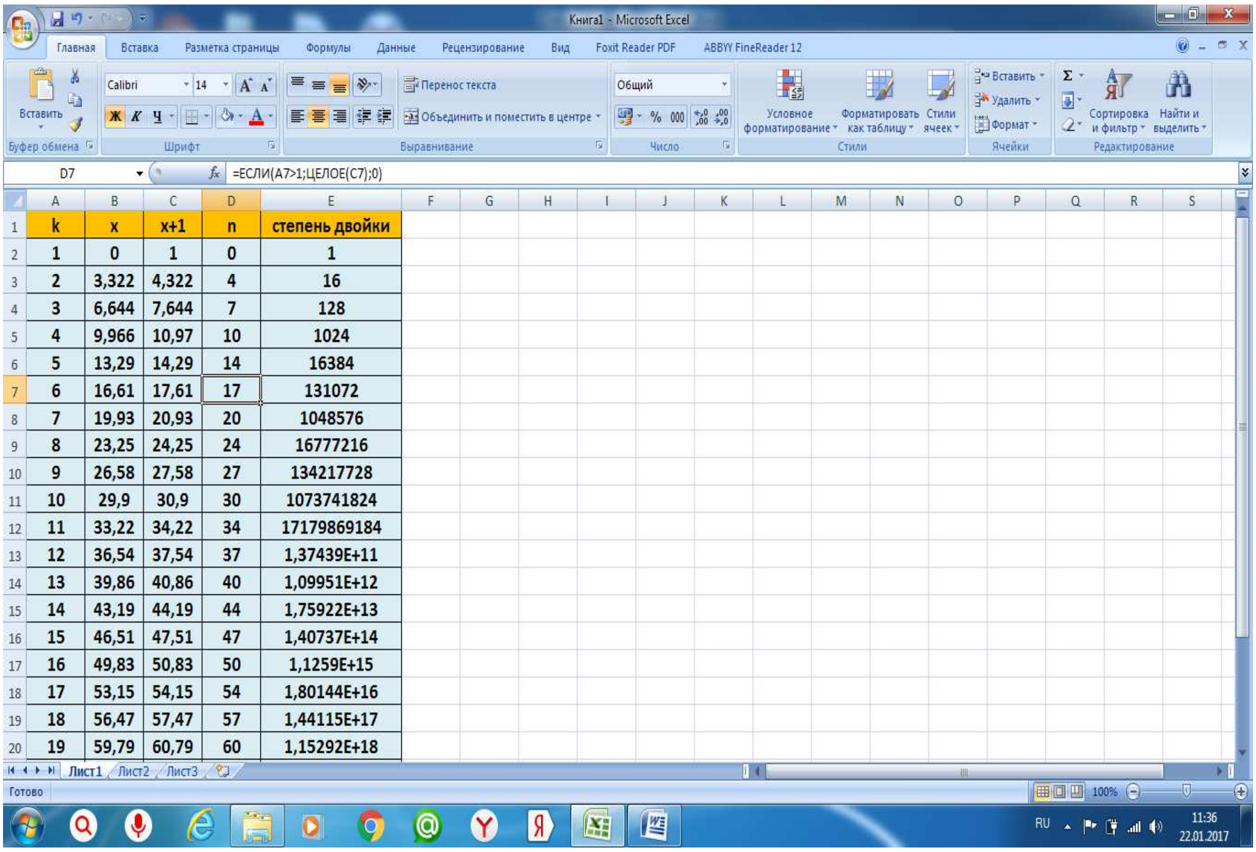
	A	B	C	D	E
7	5	32	2	3	0
8	6	64	2	6	0
9	7	128	3	1	1
10	8	256	3	2	0
11	9	512	3	5	0
12	10	1024	4	1	1
13	11	2048	4	2	0
14	12	4096	4	4	0
15	13	8192	4	8	0
16	14	16384	5	1	1
17	15	32768	5	3	0
18	16	65536	5	6	0
19	17	131072	6	1	1
20	18	262144	6	2	0
21	19	524288	6	5	0
22	20	1048576	7	1	1
23	21	2097152	7	2	0
24	22	4194304	7	4	0
25	23	8388608	7	8	0
26					29,17%

После проведённого компьютерного эксперимента можно приступать вместе со студентами к доказательству данного факта. Доказать этот факт можно с помощью теоремы

Г. Вейля, которая утверждает, что если x – иррациональное число, то последовательность $\{nx\}$ дробных долей чисел nx, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ равномерно распределена на интервале $(0, 1)$. Но для этого потребуется сначала доказать саму теорему Вейля, которая может вызвать затруднение у некоторых студентов. Также нужно учитывать отведённое программой число часов на изучение математики. Попытаемся установить данный факт без использования теоремы Вейля. Возьмём n первых степеней двойки, пусть среди них b_n чисел начинаются с единицы. Тогда частота того, что число, наудачу выбранное из степеней двойки, начинается цифрой 1, равна $\frac{b_n}{n}$. По определению вероятности, вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой 1, равна $p = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}$.

При проведении компьютерного эксперимента, студенты должны заметить закономерность, что среди однозначных чисел ровно одно начинается с единицы. Аналогично среди двузначных, трёхзначных и т. д. чисел, являющихся степенями двойки, ровно одно начинается с единицы. Выдвигаем гипотезу, что среди k −значных чисел, являющихся степенями двойки, имеется ровно одно, начинающееся с цифры 1. Докажем это предположение. Если n −я степень двойки является k −значным числом $(k = 1, 2, 3, \dots)$, то $10^{k-1} \le 2^n < 10^k$. Если это число начинается с 1, то оно попадает в диапазон $10^{k-1} \le 2^n < 2 \cdot 10^{k-1}$, $k - 1 \le n \cdot lg2 < k - 1 + lg2$, $\frac{k-1}{lg2} \le n < \frac{k-1}{lg2} + 1$. Покажем, что полученное неравенство при любом $k \epsilon \mathbb{N}$ имеет единственное решение $n, n = 0,1, 2, \dots$ Введём обозначение $x = \frac{k-1}{lg2}$. Заметим, что при $k = 1$ $x = 0$, а при $k > 1$ x есть иррациональное число, так как $lg2$ является иррациональным числом. Последнее неравенство запишется в виде $x \le n < x + 1$. Неотрицательный интервал $[x; x + 1)$, длина которого равна 1, содержит только одно целое число. Найдём его. При $k = 1$ получаем интервал $[0; 1)$. В этом интервале содержится одно целое число $n = 0$. Пусть $k > 1$. Так как $x \le [x + 1] < x + 1$, то $n = [x + 1] = [\frac{k-1}{lg2} + 1]$. Таким образом, мы установили, что среди k −значных чисел, являющихся степенями двойки, имеется ровно одно, начинающееся с цифры 1, причём показатель степени находится по формулам $n = \begin{cases} 0, \text{ при } k = 1, \\ \left[\frac{k-1}{lg2} + 1\right] \text{ при } k > 1. \end{cases}$

Проверим полученные теоретические выводы экспериментально. В столбец A введём значения k, В столбец B введём значения x, записав в ячейку $B2$ формулу $= (A2 - 1)/LOG10(2)$ и скопировав её в остальные ячейки столбца B. В ячейку C2 поместим формулу $= B2 + 1$, скопировав её в остальные ячейки столбца C. В данном столбце будут значения $x + 1$. В ячейку $D2$ введём формулу $=$ ЕСЛИ$(A2 > 1;$ ЦЕЛОЕ$(C2); 0)$, копируя её в остальные ячейки данного столбца. Этот столбец будет содержать значения n, при которых степень двойки начинается на единицу. В столбец Е поместим степени двойки.



k	x	x+1	n	степень двойки
1	0	1	0	1
2	3,322	4,322	4	16
3	6,644	7,644	7	128
4	9,966	10,97	10	1024
5	13,29	14,29	14	16384
6	16,61	17,61	17	131072
7	19,93	20,93	20	1048576
8	23,25	24,25	24	16777216
9	26,58	27,58	27	134217728
10	29,9	30,9	30	1073741824
11	33,22	34,22	34	17179869184
12	36,54	37,54	37	1,37439E+11
13	39,86	40,86	40	1,09951E+12
14	43,19	44,19	44	1,75922E+13
15	46,51	47,51	47	1,40737E+14
16	49,83	50,83	50	1,1259E+15
17	53,15	54,15	54	1,80144E+16
18	56,47	57,47	57	1,44115E+17
19	59,79	60,79	60	1,15292E+18

Если проанализировать результаты столбца E, то видим, что степени двойки начинаются на единицу при $n = 0, 4, 7, 10, 14, 17, 20, \ldots$, причём однозначные, двухзначные, трёхзначные и т. д. числа встречаются по одному разу. Приходим к выводу, что если число 2^n является k - значным, то среди чисел $2^0,\ 2^1, \ldots,\ 2^n$ имеется ровно k чисел, начинающихся с 1. т.е. $b_n = k$. Но если число 2^n является k —значным, то $10^{k-1} \le 2^n < 10^k$, $k - 1 \le n \cdot lg2 < k$. Так как $b_n = k$, то $b_n - 1 \le n \cdot lg2 < b_n$, $\frac{b_n}{n} - \frac{1}{n} \le lg2 < \frac{b_n}{n}$, $-\frac{b_n}{n} < -lg2 \le \frac{1}{n} - \frac{b_n}{n}$, $lg2 < \frac{b_n}{n} \le \frac{1}{n} + lg2$. Так как $\lim_{n\to\infty} lg\,2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + lg2\right) = lg2$, то по теореме сжатия (лемме о двух милиционерах) получаем $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = lg2$. Следовательно, $p = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = lg2 \approx 0{,}301$. Значит, чуть больше 30% степеней двойки начинаются с единицы, что и было получено экспериментальным путём.

Решим теперь данную задачу в общем виде. Пусть дана последовательность степеней числа m. Найдём вероятность появления в этой последовательности степени, начинающейся на цифру i. Один из способов решения с использованием теоремы о дробных частях приведён в [3, 3]. Приведём ещё один вариант решения этой задачи, используя понятие геометрического определения вероятности. Предположим, что m^n начинается на цифру i. Введём обозначение $x = m^n$, где x есть $k-$ значное число. По условию задачи $i \cdot 10^{k-1} \le x < (i+1)\cdot 10^{k-1}$ или $k - 1 + \lg i \le lgx < k - 1 + \lg(i+1)$. Так как $1 \le i \le 9$, то $0 \le lgi < 1$, $0 < \lg(i+1) \le 1$, причём $\lg(i+1) = 1$, если $i = 9$. $[k - 1 + l\,g\,i] \le [lgx] < [k - 1 + lg(i+1)]$, $[k - 1 + lgi] = k - 1$, $[k - 1 + l\,g(i+1)] = \begin{cases} k-1,\ 0 < i < 9, \\ \quad k,\ i = 9. \end{cases}$

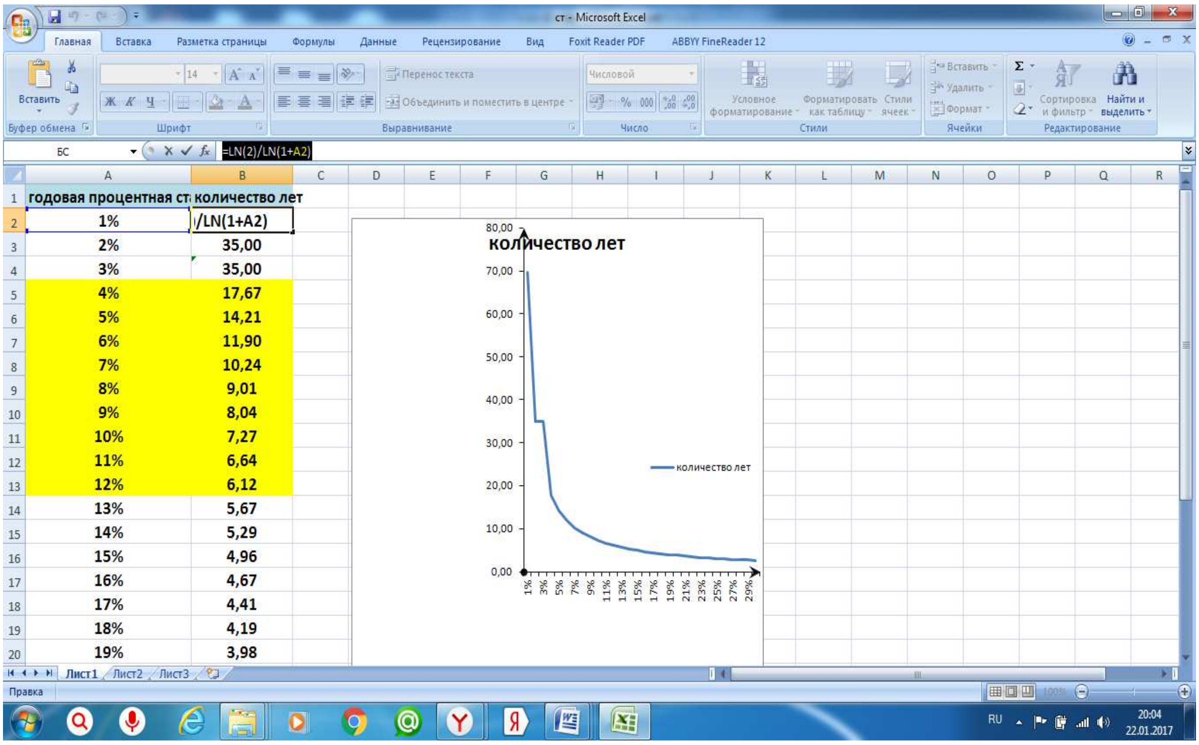
Поэтому $[lgx] = k - 1$. Неравенство $k - 1 + lg\,i \le lgx < k - 1 + lg(i+1)$ запишем в виде $[lgx] + lg\,i \le lgx < [lgx] + lg(i+1)$, $lgi \le lg2 - [lg2] < lg(i+1)$. Так как $lg2 - [lg2] = \{lg2\}$, то будет справедливо неравенство $lgi \le \{lgx\} < lg(i+1)$. Поставленная задача свелась к следующей задаче: «Какова вероятность того, что для произвольно взятого натурального числа n справедливо неравенство $lgi \le \{lgx\} < \lg(i+1)$, где $x = m^n$, $0 < i < 9$?». Для нахождения искомой вероятности, воспользуемся геометрическим определением вероятности. Напомним, что геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области. Так как дробная часть числа может принимать значения из промежутка $[0; 1)$, то мера всей области равна $L = 1 - 0 = 1$. Из неравенства $lgi \leq \{lgx\} < \lg(i+1)$ следует, что мера области, благоприятствующей появлению события, равна $l = \lg(i+1) - lgi = \lg\left(\frac{i+1}{i}\right) = \lg(1 + \frac{1}{i})$. $p = \frac{l}{L} = \frac{\lg(i+1) - lgi}{1} = \lg(i+1) - lgi$. Таким образом, вероятность появления в последовательности чисел m^n числа, начинающегося на цифру i, находится по формуле $p = lg(i+1) - lgi$. Заметим, что данная вероятность не зависит от основания степени.

После получения формулы для нахождения вероятности появления в последовательности чисел m^n числа, начинающегося на цифру i студентам можно предложить посчитать вероятность населения городов России численностью от 10 тыс. до 20 тыс., от 100 тыс. до 200 тыс. и от 1 млн. до 2 млн. человек. Численность населения городов, удовлетворяющих данным условиям, начинается на единицу. По данным на 01.01.2016 г. в России насчитывалось 1112 городов. Из них с населением от 10 тыс. до 20 тыс. - 252 города, с населением от 100 тыс. до 200 тыс. - 72 города; 13 городов имеют население от 1 млн. до 2 млн.человек. Всего таких городов 237 [4]. Находим отношение $\frac{237}{112} \approx 0303$. Получается, что в России города, численность населения которых начинается на единицу, составляют 30% от общего количества городов России, т.е. подчиняются закону степеней двойки. Можно проверить, что не только численность населения городов отдельно взятой страны подчиняется закону степеней двойки, но население и площади стран мира, число работающих крупных мировых компаний, доходы этих компаний, ВВП на душу населения стран мира и т. д. распределены так же, как и первые цифры степеней двойки.

Объяснение этого факта пытался дать известный математик В.И. Арнольд, используя теорему Вейля и теорию Мальтуса, согласно которой население каждой страны растёт в геометрической прогрессии [2; 5,22]. Хотя площади, доходы и т. д. не растут в геометрической прогрессии и теория Мальтуса к ним не применима. На сегодняшний день существует большое количество математических гипотез этого факта, часть из которых доказана, а часть лишь подтверждена компьютерными экспериментами и ожидает строгого доказательства. Отметим, что вероятность распределения степеней двойки подчиняется закону Бенфорда или закону первой цифры, который гласит, что в таблицах чисел, основанных на данных источников из реальной жизни, цифра 1 на первом месте встречается гораздо чаще, чем все остальные. Более того, чем больше цифра, тем меньше вероятности, что она будет стоять в числе на первом месте. Закон Бенфорда в теории вероятностей называют также парадоксом Бенфорда, так как вероятность того, что случайное число начинается с любой цифры от 1 до 9 , должна быть равна $\frac{1}{9} \approx 11\%$. С помощью закона степеней двойки было показано, что данная вероятность подчиняется закону $p = lg(i+1) - lgi$, который Бенфордом был открыт экспериментально.

Закон Бенфорда не распространяется на все случаи распределения чисел, тем не менее, многие данные соответствуют этому закону. Поэтому с помощью анализа частоты первой цифры, анализа частоты первой и второй цифры, анализа первой пары цифр и т. д. он находит практическое применение во многих сферах деятельности человека: от геофизики до выявления подделки и фабрикации данных в бухгалтерии. Данные из различных финансовых документов подчиняются этому закону.

Также заслуживает особого внимания пример практического применения второго замечательного предела в экономике. Как правило, при изучении данной темы показывают как, используя этот предел, получить формулу $S = P \cdot e^{jn}$ для начисления непрерывных процентов, где j – номинальная ставка, n количество лет начисления процентов, P и S - приведённая и будущая стоимости. В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е., наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко, поэтому формула для начисления непрерывных процентов не представляет практического значения. На практике чаше используется так называемое эмпирическое правило «семидесяти двух», которое утверждает, что удвоение начальной суммы по небольшим ставкам сложных процентов происходит за $\frac{72}{\mathrm{i}}$ лет, где i берётся в процентах. Так, при $\mathrm{i} = 12\%$ удвоение начального капитала произойдет за $\mathrm{n} = \frac{72}{12} = 6$ лет. Но это правило редко моделируют на занятиях по математике. Убедиться в справедливости данного правила можно с помощью формулы второго замечательного предела, записанной в виде $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ и формулы начисления сложных процентов $S = P\cdot(1+j)^n$, где P и S начальная и конечная суммы, j - процентная ставка, выраженная десятичной дробью. Из формулы второго замечательного предела вытекает, что $\ln(1+t) \approx t$ при $t \to 0$. По условию $S = 2\cdot P$. Значит $2 = (1+j)^n$, $ln2 = n\cdot\ln(1+j) \approx n\cdot j$, $n \approx \frac{ln2}{j}$. Так как $ln2 \approx 69$, $j = \frac{i}{100}$, где - проценты, то $n \approx \frac{69}{i}$. На практике в качестве делителя используют множитель 72. Он имеет большое количество делителей, соответствующих малым процентам $(1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12)$, и потому более удобен для использования в качестве делимого по сравнению с более точным значением 69. После можно сделать компьютерную модель данного правила.



Распределение степеней двойки, закон Бенфорда, правило «семидесяти двух» – наглядные примеры того, как чисто теоретическая математика превращается в прикладную математику. Кроме того, эти примеры показывают, что понятия целой и дробной частей действительного числа используются не только в различных разделах математики, но также в информатике, экономике и других науках. Как показывает практика, математическое моделирование задач с прикладным содержанием, собранными вместе по всем темам, изучаемым студентами, как ВУЗов, так и ССУЗов, позволяет соединить теоретические знания студентов с их профессиональными потребностями.

Литература

1. Концепция развития математического образования в России [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/3650/файл/2730/Концепция

2. В. И. Арнольд - Статистика первых цифр степеней двойки и переде мира//Квант-1998-№ 1.-С. 2-4.
3. В. Г. Болтянский - Часто ли степени двойки начинаются с единицы? //Квант - 1978 - № 5. - С. 2-7.
4. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.gks.ru
5. В. И. Арнольд - "Жесткие" и "мягкие" математические модели. М., 2000.