

В.М. Боев

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С «НЕКОРРЕКТНЫМИ» НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ДЮАМЕЛЯ И РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Викладена методика розрахунку перехідних процесів з використанням інтеграла Дюамеля і розривних функцій. На конкретних прикладах розглянуто послідовність розрахунку «некоректних» задач шляхом розв'язання диференціальних рівнянь, складених за законами Кірхгофа, та за допомогою інтеграла Дюамеля. При цьому закони Кірхгофа і перехідна характеристика в інтегралі Дюамеля записуються за допомогою одиничних розривних функцій для електричного кола в цілому (до і після комутації). Показано, що використання розривних функцій для опису кусочно-неперервних входних сигналів і перемикань в електричному колі розширює область застосування інтеграла Дюамеля. Бібл. 9, рис. 3. Ключові слова: перехідні процеси, інтеграл Дюамеля, розривні функції.

Излагается методика расчета переходных процессов с использованием интеграла Дюамеля и разрывных функций. На конкретных примерах излагается порядок расчета «некорректных» задач по дифференциальным уравнениям, составляемым по законам Кирхгофа, и с помощью интеграла Дюамеля. При этом законы Кирхгофа и переходная характеристика в интеграле Дюамеля записываются с помощью единичных разрывных функций для электрической цепи в целом (до и после коммутации). Показано, что применение разрывных функций для описания кусочно-непрерывных входных сигналов и переключений в электрической цепи расширяет область применимости интеграла Дюамеля. Библ. 9, рис. 3. Ключевые слова: переходные процессы, интеграл Дюамеля, разрывные функции.

Состояние вопроса и постановка задачи. В теоретической электротехнике основными методами расчета переходных процессов в электрических цепях являются: классический, операторный, частотный (спектральный) и основанный на использовании интеграла Дюамеля [1]. Областью предпочтительного применения интеграла Дюамеля являются электрические цепи с входным сигналом произвольной формы.

В последние годы появились публикации, в которых интеграл Дюамеля применяется для расчета процесса распространения электромагнитного поля (грозовых разрядов, промышленных помех и др.) в неоднородной среде [2, 3]. При этом полевая задача представляется схемой замещения в виде длинной линии или четырехполюсника [3, 4]. Переходная характеристика, необходимая для интеграла Дюамеля, определяется по схеме замещения. В работе [5] интеграл Дюамеля используется в процессе расчета электромагнитного поля в слоистой среде. Таким образом, интеграл Дюамеля остается востребованным методом и расширение области его применимости (в данном случае на электрические цепи с «некорректными» начальными условиями, когда законы коммутации в формулировке для тока в индуктивности и напряжения на емкости неприменимы) является актуальным.

К недостаткам интеграла Дюамеля относят требование нулевых начальных условий и невозможность учета переключений, изменяющих структуру электрической цепи (схемы). Эти ограничения могут быть нивелированы с помощью использования разрывных (ступенчатых) функций для описания кусочно-непрерывных входных сигналов и изменений структуры схемы при переключениях.

Включение электрической цепи на постоянное напряжение U_1 при нулевых начальных условиях может рассматриваться как действие входного напряжения $U = 1(t)U_1$ в уже включенной цепи [1], где $1(t)$ – единичная функция Хевисайда (функция включения) (рис. 1). Это утверждение справедливо и для переменного входного напряжения $u(t) = 1(t) \cdot u_1(t)$. Тогда

интеграл Дюамеля может быть представлен в виде интеграла

$$i(t) = \int_{-t_0}^t u'(\Theta) h(t - \Theta) d\Theta, \quad i(t) = \int_{-t_0}^t u'(\Theta) h(t - \Theta) d\Theta, \quad (1)$$

где

$$u'(\Theta) = \frac{du(t)}{dt} \Big|_{t=\Theta} = [1(t)u_1(t)] \Big|_{t=\Theta} = [\delta(t)u_1(0) + 1(t)u'_1(t)] \Big|_{t=\Theta} = \delta(\Theta)u_1(0) + 1(\Theta)u'_1(\Theta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_{-t_0}^t [\delta(\Theta)u_1(0) + 1(\Theta)u'_1(\Theta)] h(t - \Theta) d\Theta = \\ &= u_1(0)h(t) \int_{-t_0}^t \delta(\Theta) d\Theta + \int_{-t_0}^t u'_1(\Theta) h(t - \Theta) \cdot 1(\Theta) d\Theta = \quad (2) \\ &= u_1(0)h(t) + \int_0^t u'_1(\Theta) h(t - \Theta) d\Theta. \end{aligned}$$

Здесь учтено фильтрующее свойство единичной функции и δ – функции. Θ – время возникновения скачков напряжения, на которые разбивается входное напряжение $u_1(t)$ в соответствии с физическим смыслом интеграла Дюамеля, $(t - \Theta)$ – время действия каждого из скачков напряжения, $h(t - \Theta)$ – переходная проводимость для каждого из скачков напряжения.

Формула (2) представляет собой одну из разновидностей интеграла Дюамеля. Формулы (1), (2) мы записали для тока. Но выходной функцией может быть напряжение (или ток) в любой ветви схемы электрической цепи и тогда переходную проводимость $h(t - \Theta)$ следует заменить соответствующей переходной функцией по напряжению (или току).

Если входной сигнал $u_1(t)$ начинает действовать при $t < 0$, то в формулах (1), (2) нижний предел интегрирования можно отнести в бесконечность $t_0 = \infty$.

© В.М. Боев

В работах [6, 7] показано, что переходный процесс, возникающий в электрической цепи под действием сложного кусочно-непрерывного сигнала (в том числе начинающего действовать при $t = t_0 < 0$) может быть рассчитан двумя способами:

1. Описание входного сигнала и общего вида решения одним аналитическим выражением с помощью единичных ступенчатых функций и подстановка общего вида решения в дифференциальное уравнение для искомой величины.

2. По формулам интеграла Дюамеля. При этом описание входного сигнала одним аналитическим выражением с помощью разрывных (ступенчатых) функций позволяет использовать интеграл Дюамеля и для сигналов, начинающих действовать и при $t = t_0 < 0$.

В работах [6, 7] приведены примеры таких расчетов.

Ненулевые начальные условия имеют место в электрической цепи, когда переходной процесс возникает в результате изменения структуры цепи (подключение или отключение отдельных элементов цепи). Переходной процесс при этом также может быть рассчитан двумя рассматриваемыми способами:

1. Изменение параметров электрической цепи описывается с помощью разрывных функций и оказывается учтенным в дифференциальном уравнении для искомой величины. Входное напряжение полагаем включенным в некоторый предшествующий коммутации момент $t = t_0 < 0$. Решение дифференциального уравнения записываем с помощью разрывных функций как состоящее из двух частей (для $t < 0$ и $t > 0$) и подставляем в дифференциальное уравнение. Если до коммутации ($t = 0$) процесс считать установившимся, то это и будет исходное состояние цепи с ненулевыми начальными условиями (при этом в решении для $t < 0$ используем только принужденную составляющую).

2. В формулах интеграла Дюамеля входное напряжение также считаем начинающим действовать в момент $t = t_0 < 0$, что записывается с помощью разрывных функций. Переходную функцию $h(t)$ (по току или напряжению) записываем с помощью разрывных функций как состоящую из двух частей, соответствующих схемам до и после коммутации.

В работах [6, 7] приведены примеры с переключениями в схемах, изменяющими активное сопротивление R . Вопрос о переходных процессах для общего случая, при переключениях, изменяющих индуктивность L и емкость C (когда законы коммутации в формулировке для тока в индуктивности и напряжения в емкости неприменимы) остается нерешенным, что и составляет предмет данной статьи.

Цель статьи – обосновать возможность расчета переходных процессов в электрической цепи с «некорректными» начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля и разрывных функций.

Основная часть. Для описания скачкообразных изменений напряжений, токов и параметров электрической цепи будем использовать разрывные функции, записанные с помощью модуль-функции [6] (рис. 1):

- рис. 1,а: $f_1(t) = 1(t-a) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t-a|}{t-a} \right)$ – единичная функция Хевисайда;

- рис. 1,б:

$$f_2(t) = 1(t-a) + 1(b-t) - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{|t-a|}{t-a} - \frac{|t-b|}{t-b} \right), \quad a < b;$$

- рис. 1,в: $f_3(t) = 1(b-t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t-b|}{t-b} \right)$ – обратная функция Хевисайда.

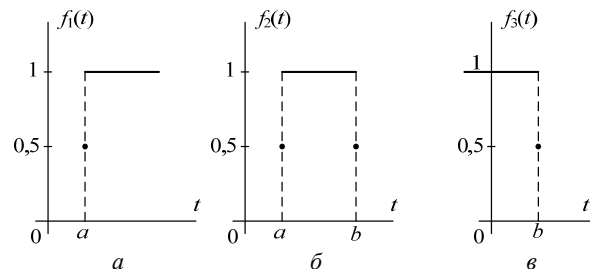


Рис. 1

Расчет будем вести и по дифференциальным уравнениям, составленным по законам Кирхгофа, и по интегралу Дюамеля. В первом случае законы Кирхгофа составляются для электрической цепи в целом (до и после коммутации), а различие этих цепей учитывается с помощью единичных разрывных функций. Во втором случае переходная характеристика в интеграле Дюамеля записывается для цепи в целом (до и после коммутации) с помощью единичных разрывных функций.

Рассмотрим схему (рис. 2), в которой ток в индуктивности изменяется скачком.

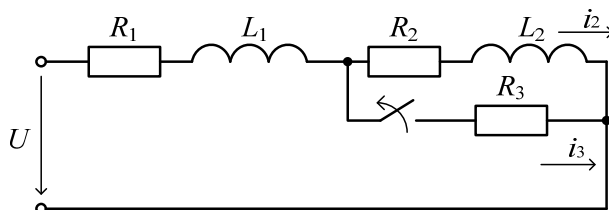


Рис. 2

Законы Кирхгофа для такой цепи:

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = U; \quad (3)$$

$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = R_3 i_3; \quad (4)$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right). \quad (5)$$

Здесь мы учли изменение структуры параллельного участка с помощью единичных разрывных функций и законы Кирхгофа составили для цепи в целом (до и после коммутации).

Из (4) находим

$$i_3 = \frac{R_2}{R_3} i_2 + \frac{L_2}{R_3} \frac{di_2}{dt}.$$

Решение будем вести относительно тока i_2 :

$$i_2(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) i_0(t) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) i(t).$$

Тогда из уравнения (5) получим:

$$i_1(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) (i_0 + i_3) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) i =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \left(i_0 + \frac{R_2}{R_3} i_0 + \frac{L_2}{R_3} \frac{di_0}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) i.$$

Подставляем в уравнение (3):

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) R_1 i_0 + \frac{R_1}{R_3} L_2 \frac{di_0}{dt} \right] + L_1 \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{di_0}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_2}{R_3} \frac{d^2 i_0}{dt^2} \right] \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) + L_1 \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) i_0 + \frac{L_2}{R_3} \frac{di_0}{dt} \right] (-\delta(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \left[R_2 i_0 + L_2 \frac{di_0}{dt} \right] - \delta(t) i_0 L_2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \times$$

$$\times \left[(R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} \right] + \delta(t) (L_1 + L_2) i =$$

$$= U = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) U + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) U.$$

Приравниваем множители при одинаковых разрывных функциях:

$$1) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) : \frac{R_3 + R_2}{R_3} \left(R_1 i_0 + \frac{di_0}{dt} L_1 \right) +$$

$$+ \frac{L_2}{R_3} \left(R_1 \frac{di_0}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_0}{dt^2} \right) + R_2 i_0 + L_2 \frac{di_0}{dt} = U, \quad (6)$$

$$2) \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) : (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = U, \quad (7)$$

$$3) \quad \delta(t) : L_1 \frac{R_3 + R_2}{R_3} i_0 + \frac{L_1 L_2}{R_3} \frac{di_0}{dt} + L_2 i_0 = (L_1 + L_2) i. \quad (8)$$

Равенство (6) – это дифференциальное уравнение цепи до коммутации:

$$\frac{L_1 L_2}{R_3} \frac{d^2 i_0}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{R_3} L_2 + \frac{R_3 + R_2}{R_3} L_1 + L_2 \right) \frac{di_0}{dt} +$$

$$+ \frac{R_3 + R_2}{R_3} R_1 i_0 + R_2 i_0 = U.$$

Его решение:

$$i_0(t) = i_{пр} + i_{св} = i_{пр} + A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t},$$

где $i_{пр}$, $i_{св}$ – принужденная и свободная составляющие тока соответственно.

Но до коммутации нас интересует установившийся процесс, т.е. $i_{пр} = \text{const}$:

$$i_{пр} = i_0 = \frac{UR_3}{(R_2 + R_3)R_1 + R_2 R_3} = i_2(0-). \quad (9)$$

Равенство (7) – это дифференциальное уравнение цепи после коммутации. Его решение:

$$i(t) = i_{пр} + i_{св} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}. \quad (10)$$

В уравнении (8) учтем, что $di_0/dt = 0$, т.к.

$$i_0 = i_{пр} = \text{const} \text{ и } \frac{R_3 + R_2}{R_3} i_0 = i_1(0-). \text{ Тогда}$$

$$L_1 i_1(0-) + L_2 i_2(0-) = (L_1 + L_2) i_2(0+),$$

т.к. в наших обозначениях $i(0) = i_2(0+)$.

Таким образом, уравнение (8) – это первый закон коммутации для потокоцеплений.

Подставляем значения:

$$\left(\frac{R_2 + R_3}{R_3} L_1 + L_2 \right) \frac{UR_3}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} =$$

$$= \left(\frac{U}{R_1 + R_2} + A \right) (L_1 + L_2).$$

Находим постоянную A :

$$A = \frac{U}{L_1 + L_2} \cdot \frac{(R_2 + R_3)L_1 + R_3 L_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} - \frac{U}{R_1 + R_2} =$$

$$= \frac{UR_2(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)}. \quad (11)$$

Такое же решение получено в [8].

Если $R_3 = 0$, т.е. до коммутации участок $(R_2 - L_2)$ был закорочен, то

$$A = \frac{U(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)R_1},$$

что совпадает с решением, приведенным в [1].

Решим эту задачу с помощью интеграла Дюамеля и получим тот же результат. Считаем, что электрическая цепь до коммутации была включена на напряжение U в момент $t = -t_0 < 0$

$$u(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t + t_0|}{t + t_0} \right) U. \quad (12)$$

Считая, что переходной процесс от включения к моменту коммутации $t = 0$ уже закончился, запишем переходную проводимость схемы до коммутации для тока i_2 по принужденной составляющей (9):

$$h_0(t) = \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

Переходная проводимость для схемы после коммутации, согласно (10), (11), равна:

$$h(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Тогда, согласно (1), получим:

$$i_2(t) = \int_{-t_0}^t u'(\Theta') \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) h_0(t - \Theta') + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) h(t - \Theta') \right] d\Theta' =$$

$$= \int_{-t_0}^t U \delta(\Theta + t_0) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)} \right] \times$$

$$\times e^{-\frac{(t - \Theta - t_0)}{\tau}} \left. \right] d\Theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \frac{R_3 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left[\frac{U}{R_1 + R_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R_2(L_1 R_2 - L_2 R_1) U}{(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3)(L_1 + L_2)(R_1 + R_2)} e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Здесь: $\Theta' = \Theta + t_0$ – координата входного сигнала

$$\int_{-t'_0}^t \delta(\Theta + t_0) d\Theta = 1; \quad \int_{-t'_0}^t \delta(\Theta + t_0) f d\Theta = f(-t_0).$$

Здесь: нижний предел $-t'_0$ меньше $-t_0$ на бесконечно малую величину (т.е. $-t'_0 = -t_0 - 0$);

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) = 1 \quad (\text{при } t < 0) - \text{множитель при токе до коммутации};$$

коммутации;

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) = 1 \quad (\text{при } t > 0) - \text{множитель при токе после коммутации}.$$

Эти множители в интегрировании по Θ не учтывают, поскольку разделяют область действия формул переходной проводимости выходного сигнала до и после коммутации.

Рассмотрим схему с емкостным накопителем энергии, когда коммутация изменяет величину емкости в цепи (рис. 3).

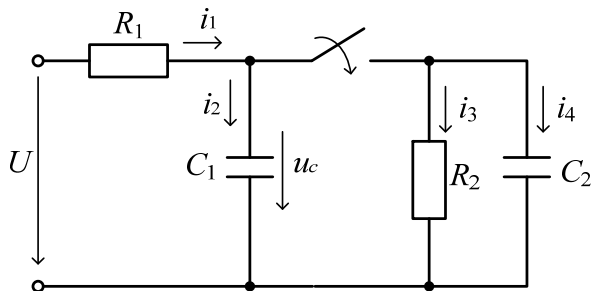


Рис. 3

Исходные данные: $U = 60$ В, $R_1 = R_2 = 1$ кОм, $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ. Определим i_1 .

Законы Кирхгофа для схемы в целом (до и после коммутации):

$$R_1 i_1 + u_c = U;$$

$$i_1 = i_2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) (i_3 + i_4);$$

$$i_2 = c_1 \frac{du_c}{dt};$$

$$i_3 = \frac{u_c}{R_2};$$

$$i_4 = c_2 \frac{du_c}{dt}.$$

Подставляем токи в первое уравнение:

$$R_1 c_1 \frac{du_c}{dt} + u_c + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left(R_1 c_2 \frac{du_c}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u_c \right) = U. \quad (13)$$

Напряжение u_c запишем как разделенную единичными разрывными функциями сумму напряжений до и после коммутации.

$$u_c(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) u_0 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) u.$$

Подставляем в дифференциальное уравнение (13)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \left[u_0 + R_1 c_1 \frac{du_0}{dt} \right] - \delta(t) R_1 c_1 u_0 + \\ & + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) u + R_1 (c_1 + c_2) \frac{du}{dt} \right] + \\ & + \delta(t) R_1 (c_1 + c_2) u = U. \end{aligned}$$

Приравняем множители при одинаковых разрывных функциях:

$$1) \quad \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right): R_1 c_1 \frac{du_0}{dt} + u_0 = U; \quad (14)$$

$$2) \quad \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right): R_1 (c_1 + c_2) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) u = U; \quad (15)$$

$$3) \quad \delta(t): -R_1 c_1 u_0 + R_1 (c_1 + c_2) u = 0. \quad (16)$$

Решение уравнения (14) для схемы до коммутации имеет вид:

$$u_0(t) = U + A e^{\frac{t}{\tau}} = U - U e^{\frac{-(t+t_0)}{\tau}}; \quad \tau = \frac{1}{R_1 c_1};$$

Так как до коммутации в некоторый момент времени $t = -t_0 < 0$ произошло включение цепи $(R_1 - c_1)$ на напряжение U , то этот переходный процесс считаем закончившимся до момента $t = 0$. Тогда:

$$u_0(t) = u_{c_1}(0-) = U.$$

Решение уравнения (15) для схемы после коммутации равно:

$$u(t) = \frac{U R_2}{R_2 + R_1} + A e^{\frac{-t}{\tau}} = 30 + A e^{\frac{-t}{\tau}};$$

$$\tau = (c_1 + c_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Уравнение (16) – это второй закон коммутации для зарядов

$$c_1 u_0(0-) = (c_1 + c_2) u(0+),$$

то есть

$$c_1 u_{c_1}(0-) = (c_1 + c_2) u_c(0+).$$

После подстановки получим равенство для определения постоянной A

$$c_1 U = (c_1 + c_2) \left[\frac{U R_2}{R_1 + R_2} + A \right].$$

Отсюда:

$$A = U \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) = 60 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -10.$$

Тогда:

$$u_c(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) 60 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left(30 - 10 e^{\frac{-2}{3} \cdot 10^3 t} \right).$$

Ток источника:

$$i_1(t) = (c_1 + c_2) \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{R_2} = 3 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} e^{\frac{-2}{3} \cdot 10^3 t}.$$

Такой же результат получен в [9].

Решим эту же задачу с помощью интеграла Дюамеля. Переходная характеристика цепи для напряжения до и после коммутации имеет вид:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) \cdot 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{\frac{-(t-\Theta')}{\tau}} \right].$$

Считаем, что цепь до коммутации была включена в некоторый момент $t = -t_0 < 0$ на напряжение (12) и этот переходной процесс закончился до момента коммутации $t = 0$. Тогда интеграл Дюамеля (1) будет иметь вид:

$$u_c(t) = \int_{-t_0}^t u'(\Theta') h(t - \Theta') d\Theta' = \int_{-t_0}^t U \delta(\Theta + t_0) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \times e^{\frac{-(t-\Theta-t_0)}{\tau}} \right] \right] d\Theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|t|}{t} \right) U + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|t|}{t} \right) \times \left[\frac{R_2 U}{R_1 + R_2} + U \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{\frac{-t}{\tau}} \right].$$

Такое же решение для u_c было получено выше. Если в этом решении $R_2 \rightarrow \infty$, то получим решение для схемы (рис. 3) без R_2 , которое приведено в [1]:

$$u_c(t) = U + U \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2} - 1 \right) e^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Выводы.

1. Впервые обоснована возможность расчета переходных процессов в электрической цепи с «некорректными» начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля и разрывных функций.

2. Предложенное решение задачи расчета переходных процессов в схеме электрической цепи с ненулевыми и «некорректными» начальными условиями с помощью интеграла Дюамеля, является более компактным по сравнению с известными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. Учебник для вузов. Том 1. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 536 с.
2. Kochetov S.V., Wollenberg G. Stable and Effective Full-Wave PEEC Models by Full-Spectrum Convolution Macromodeling // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 2007. – vol.49. – no.1. – pp. 25-34. doi: 10.1109/temc.2006.888183.
3. Конников И.А. Помехи элементарного источника электромагнитного поля в радиоэлектронном модуле // Технологии электромагнитной совместимости. – 2006. – №4. – С 18-26.
4. Elmore W.C. The Transient response of Damped Linear Networks with Particular Regard to wideband Amplifiers // Journal of Applied Physics. – 1948. – vol.19. – no.1. – pp. 55-63. doi: 10.1063/1.1697872.
5. Конников И.А. Расчет электромагнитного поля в слоистой среде // Электричество. – 2017. – №7. – С. 60-67.
6. Боев В.М. Использование разрывных функций для расчета переходных процессов и импульсных воздействий в линейных электрических цепях. 1. Переходные процессы // Электронное моделирование. – 2002. – Т.24. – №6. – С. 67-79.
7. Боев В.М. Использование разрывных функций для расчета переходных процессов и импульсных воздействий в ли-

- нейных электрических цепях. 2. Импульсные воздействия // Электронное моделирование. – 2003. – Т.25. – №1. – С. 83-97.
8. Рибалко М.П., Есауленко В.О., Костенко В.И. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола: Підручник. – Донецьк: Новий світ, 2003. – 513 с.
9. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. М.: Высшая школа, 1982. – 488 с.

REFERENCES

1. Neyman L.R., Demirchyan K.S. *Teoreticheskie osnovy elektrotekhniki. V 2-kh t. T. 1* [Theoretical bases of electrical engineering. In 2 vols. Vol. 1]. Leningrad, Energoizdat Publ., 1981, p. 536. (Rus).
2. Kochetov S.V., Wollenberg G. Stable and Effective Full-Wave PEEC Models by Full-Spectrum Convolution Macromodeling. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2007, vol.49, no.1, pp. 25-34. doi: 10.1109/temc.2006.888183.
3. Konnikov I.A. Interference of an elementary source of an electromagnetic field in an electronic module. *Technology of electromagnetic compatibility*, 2006, no.4, pp.18-26. (Rus).
4. Elmore W.C. The Transient response of Damped Linear Networks with Particular Regard to wideband Amplifiers. *Journal of Applied Physics*, 1948, vol.19, no.1, pp. 55-63. doi: 10.1063/1.1697872.
5. Konnikov I.A. Calculation of the electromagnetic field in a layered medium. *Electricity*, 2017, no.7, pp. 60-67. (Rus).
6. Boev V.M. The use of discontinuous functions for the calculation of transient processes and impulse actions in linear electric circuits. 1. Transient processes. *Electronic modeling*, 2002, vol.24, no.6, pp. 67-79. (Rus).
7. Boev V.M. The use of discontinuous functions for the calculation of transient processes and impulse actions in linear electric circuits. 2. Impulse effects. *Electronic modeling*, 2003, vol.25, no.1, pp. 83-97. (Rus).
8. Rybalko M.P., Esaulenko V.O., Kostenko V.I. *Teoretichni osnovi elektrotekhniki. Liniyni elektrichni kola: Pidruchnik*. [Theoretical foundations of electrical engineering. Linear electric circuits: Textbook]. Donetsk, Novyi Svit Publ., 2003. 513 p. (Ukr).
9. Shebes M.P. *Zadachnik po teorii lineynykh elektricheskikh tsepey* [Tasks of problems in the theory of linear electrical circuits]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982. 488 p. (Rus).

Поступила (received) 03.04.2018

Боев Вячеслав Михайлович, д.т.н., проф.,
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
61002, Харьков, ул. Кирпичева, 2,
тел/phone +380 57 7076961

V.M. Boev

National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
2, Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

Calculation of transients in electrical circuits with «incorrect» initial conditions with the help of the Duhamel integral and discontinuous functions.

A technique for calculating transients using the Duhamel integral and discontinuous functions is presented. On specific examples, the procedure for calculating «incorrect» problems with respect to differential equations, compiled according to Kirchhoff laws, and using the Duhamel integral is presented. In this case, the Kirchhoff law and the transition characteristic in the Duhamel integral are written using unitary discontinuous functions for the electrical circuit as a whole (before and after commutation). It is shown that the application of discontinuous functions for describing piecewise continuous input signals and switching in an electric circuit extends the domain of applicability of the Duhamel integral. References 9, figures 3.

Key words: transients, Duhamel integral, discontinuous functions.