Вестник Омского университета, 2002. №3. С. 30–32.
© Омский государственный университет
УДК 534.123:530.712-534.12

О ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ НА НЕКОМПАКТНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

В.В. Михеев

Омский государственный университет, кафедра общей физики
644077, Омск, пр.Мира, 55а[1]

Получена 17 мая 2002 г.

The main problem of the homogeneous spaces' thermodynamics is treated in the article from the viewpoint of orbits' method. The approach presented in the article allowed to find the trace of heat kernel on the non-compact Lie groups and to perform reasonable analysis of its high temperature asymptotic.

1. Введение.

Основной задачей термодинамики однородных пространств является отыскание статистической суммы (функции распределения) Z_β как суммы по спектру оператора энергии $H = -\Delta$ (оператора Лапласа-Бельтрами) вида:

$$Z_\beta = \sum_n d_n \exp(-\beta E_n), \qquad (1)$$

где d_n – кратность вырождения значения E_n, а β – обратная температура. Для эллиптического оператора H на компактном многоообразии ряд (1) всегда сходится.

Статистическая сумма (1) может быть также выражена как след матрицы плотности

$$Z_\beta = \int \rho_\beta(x,x) d\mu(x), \quad d\mu(x) = \sqrt{|g|}dx, \qquad (2)$$

подчиняющейся уравнению Блоха:

$$\frac{\partial \rho_\beta(x,x')}{\partial \beta} + H(x)\rho_\beta(x,x') = 0, \qquad (3)$$

с начальным условием

$$\rho_\beta(x,x')|_{\beta=0} = \delta(x,x'),$$

где $H(x)$ — оператор энергии системы (оператор Лапласа-Бельтрами).

В теории квантованных полей в сильном гравитационном поле принято рассматривать уравнение на функцию $G_t(x,x')$ ([2]):

$$-i\hbar\frac{G_t(x,x')}{\partial t} = (H(x) + m^2)G_t(x,x') \qquad (4)$$

с начальном условием

$$G_t(x,x')|_{\beta=0} = \delta(x,x').$$

Здесь $H(x)$ — оператор Клейна-Фока. Это уравнение с точностью до замены переменной t и оператора $H(x)$ аналогично уравнению Блоха (3).

Практически все известные результаты получены для компактных групп Ли и компактных симметрических пространств, что связано с расходимостью в (1) и (2), имеющей своей причиной бесконечный объем многообразия.

Асимптотическое поведение функции $G_t(x,x')$ при сближении аргументов определяет расходимости в эффективном лагранжиане

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\sqrt{-g}\int_0^\infty G_t(x,x)\frac{dt}{t}, \qquad (5)$$

возникающие на нижнем пределе интегрирования [2].

Ясно, что за расходимости в (5) ответственны первые три члена разложения функции $G_t(x,x)$ по степеням t, таким образом, перенормированная функция $G_t(x,x)$ имеет вид

$$G_t^{ren}(x,x) = e^{-im^2t}(z_{-it/\hbar} - z^{(3)}_{-it/\hbar}), \qquad (6)$$

где $z^{(3)}_{-it/\hbar}$ — первые три члена высокотемпературного разложения удельной статистической суммы.

Рассмотрение высокотемпературных асимптотик матрицы плотности позволит не только разрешить задачу о перенормировке лагранжиана скалярной частицы в фоновом гравитационном поле, но и исследовать топологические

[1] e-mail: mikheyev@phys.omsu.omskreg.ru

свойства пространства, поскольку коэффициенты разложения статистической суммы по степеням β несут информацию о спектральных инвариантах.

2. Построение точного решения уравнения Блоха.

Для решения уравнения Блоха на вещественной n-мерной унимодулярной группе Ли с оператором

$$H(x) = G^{ab}\xi_a(x)\xi_b(x), \qquad (7)$$

где ξ_a — левоинвариантные векторные поля на группе Ли и G^{ab} — постоянная матрица, определяющая положительно определенную квадратичную форму на алгебре Ли группы G, возможно применить метод, разработанный для построения решений квантовых уравнений на группах Ли, изложенный в [3]. Использование этого метода позволяет не только построить глобальное решение уравнения Блоха, но и удовлетворить поставленному начальному условию.

Основным инструментом метода является гармонический анализ на группах Ли. Обобщенное Фурье-преобразование осуществляется при помощи полного и ортогонального набора обобщенных функций $D^j_{qq'}(x)$ [4]. При осуществлении преобразования Фурье уравнение (3) на группе переходит в уравнение с меньшим числом независимых переменных в дуальном пространстве.

Решение уравнение Блоха (3) представим в виде

$$\rho_\beta(x,x') = \int \tilde\rho_\beta(q,q',j,\tilde q,\tilde q,\tilde j) D^j_{qq'}(x)\overline{D^{\tilde j}_{\tilde q\tilde q'}}(x') \times \\ \times d\mu(q)d\mu(q')d\mu(j)d\mu(\tilde q)d\mu(\tilde q')d\mu(\tilde j), \quad (8)$$

откуда, вспоминая свойства обобщенных функций $D^j_{qq'}(x)$ на унимодулярных группах Ли [4], получим окончательное выражение для матрицы плотности на унимодулярной группе Ли:

$$\rho_\beta(x,x') = \int \tilde\rho_\beta(q,\tilde q,j) D^j_{q\tilde q}(x'^{-1}x) \times \\ \times d\mu(q)d\mu(\tilde q)d\mu(j), \qquad (9)$$

где функция $\rho_\beta(q,\tilde q,j)$ может трактоваться как матрица плотности на орбите коприсоединенного представления, удовлетворяющая редуцированному уравнению Блоха:

$$\frac{\partial\tilde\rho_\beta(q,\tilde q,j)}{\partial\beta} + H(\hat f)\tilde\rho_\beta(q,\tilde q,j) = 0, \\ \tilde\rho_\beta(q,\tilde q,j)|_{\beta=0} = \delta(q,\tilde q), \qquad (10)$$

где $\hat f$ — квантованные функции перехода к каноническим координатам на K-орбите (см. [4]).

Интегрируя выражение (9), получим явный вид статистической суммы на группе Ли:

$$Z_\beta = Vol_G \int \tilde\rho_\beta(q,q,j)d\mu(q)d\mu(j). \qquad (11)$$

Отметим, что компактность группы нигде не предполагалась, формула (11) решает основную задачу термодинамики однородных пространств для некомпактных унимодулярных групп Ли и возможен переход к существенно конечной удельной статистической сумме:

$$z_\beta = Z_\beta/Vol_G = \int \tilde\rho_\beta(q,q,j)d\mu(q)d\mu(j). \qquad (12)$$

3. Высокотемпературная асимптотика матрицы плотности и статистической суммы на унимодулярных группах Ли.

Для рассмотрения высокотемпературной асимптотики матрицы плотности рассмотрим Фурье-образ функции $\rho_\beta(q,\tilde q,j)$:

$$\rho_\beta(q,p,j) = \int \rho_\beta(q,\tilde q,j)\exp(\frac{ip\tilde q}{\hbar})d\tilde q,$$

который в силу независимости оператора $H(\hat f(q,\partial_q,j))$ от переменной q' удовлетворяет уравнению Блоха (10) с начальным условием

$$\rho_\beta(q,p,j)|_{\beta=0} = \exp(\frac{ipq}{\hbar}).$$

Поскольку оператор Лапласа является оператором второго порядка, запишем его в виде, удобном для исследования высокотемпературной асимптотики (9) и (11):

$$\hat H(q) = h^{ab}(q)\hat p_a\hat p_b + h^a(q)\hat p_a + h(q). \qquad (13)$$

Сделав подстановку

$$\rho_\beta(q,p,j) = \exp(iS_\beta(q,p,j)/\hbar),$$

получим уравнение на функцию $S_\beta(q,p,j)$:

$$\tfrac{i}{\hbar}\tfrac{\partial S_\beta(q,p,j)}{\partial\beta} + h^{ab}(-i\hbar S_\beta(q,p,j)_{,ab} + S_\beta(q,p,j)_{,a} \times \\ \times S_\beta(q,p,j)_{,b}) + h^a S_\beta(q,p,j)_{,a} + h = 0, \qquad (14)$$

представленную в виде ряда:

$$S_\beta(q,p,j) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(q,p,j)\beta^k. \qquad (15)$$

В результате, подставив (15) в (14), получим рекуррентную формулу для коэффициентов ряда разложения (14):

$$S_{k+1} = \frac{i\hbar}{k+1}(-i\hbar h^{ab} S_{k,ab} + h^{ab} \sum_{m=0}^{k} S_{m,a} S_{k-m,b} +$$

$$+ h^a S_{k,a} + h\delta_k^0). \qquad (16)$$

В главном порядке высокотемпературного приближения имеем для матрицы плотности и статистической суммы следующие выражения:

$$\rho_\beta(x, x') = \int \frac{D^j_{q\tilde{q}}(x'^{-1}x)}{(2\pi\hbar)^{(n-r)/4}} e^{(\frac{ip}{\hbar}(q-\tilde{q}) - \beta H(q,p,j))} \times$$

$$\times d\mu(q) dp d\mu(\tilde{q}) d\mu(j); \qquad (17)$$

$$z_\beta^{(1)} = \int \exp(-\beta H(q,p,j)) dp d\mu(q) d\mu(j). \qquad (18)$$

В формуле (17) r — индекс алгебры Ли группы G, $H(q,p,j)$ — qp-символ оператора $H(\hat{f})$.

Таким образом, подтверждается известный из квантовой механики результат о том, что статистическа сумма в главном порядке высокотемпературного приближения совпадает с классической.

---

[1] *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. М.: Наука, 1984

[2] *Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1998.

[3] *Барановский С.П., Михеев В.В., Широков И.В.* Квантовые гамильтоновы системы на К–орбитах. Квазиклассический спектр квантового асимметрического ротатора // ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С.3

[4] *Широков И.В.* К–орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений: Препринт. Омск: ОмГУ, 1998.