РАДИОТЕХНИКА

УДК517.9

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПЕРЕХОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ВЛАСЕНКО Л.А., РУТКАС А.Г.

Изучается задача оптимального управления переходными процессами в электрических цепях с сосредоточенными линейными элементами. Качество управления характеризует квадратичный функционал энергии, зависящий от параметров цепи. Переходные процессы моделируются линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, для которых получены условия существования и единственности оптимального управления. Результаты применяются для расчета оптимального управляющего напряжения в цепи.

Ключевые слова: оптимальное управление, переходной процесс, электрическая цепь, дифференциально-алгебраическое уравнение.

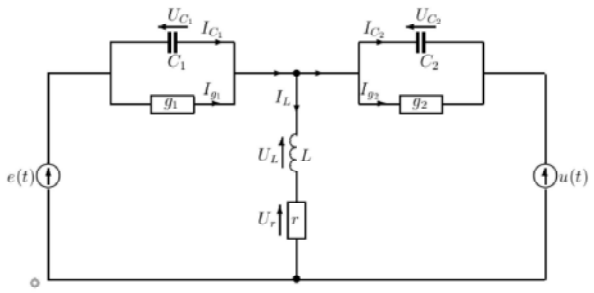
Key words: optimal control, transient process, electrical circuit, differential-algebraic equation.

1. Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления в электрических цепях, математические модели которых описываются с помощью дифференциально-алгебраических уравнений. Для этого изучим линейно-квадратичную задачу оптимального управления в системе, динамика которой описывается дифференциально-алгебраическим уравнением. Такие системы управления также называют дескрипторными. Существует обширная литература по задаче оптимального управления для дескрипторных систем (см., например, [1-4]). Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4]. В отличие от работы [4] здесь не налагаются никакие ограничения на резольвенту характеристического пучка матриц, отвечающего уравнению. Ограничения также сняты в задаче импульсного управления в [5].

2. Постановка задачи для электрической цепи

Для демонстрации предлагаемого метода оптимального управления рассмотрим электрический четырехполюсник, изображенный на рисунке. Четырехполюсник имеет два источника напряжения $e(t)$ и $u(t)$; $e(t)$ – заданная функция от времени, $u(t)$ – управляемый источник напряжения. Параллельно с емкостями C_1, C_2 включены проводимости g_1, g_2. На внутренней ветви расположены индуктивность L и сопротивление r.



Электрический четырехполюсник

Токи $I_{C_1}, I_{C_2}, I_{g_1}, I_{g_2}, I_L$ и напряжения $U_{C_1}, U_{C_2}, U_r, U_L$ удовлетворяют законам Кирхгофа

$$\begin{gathered} I_{C_1} + I_{g_1} = I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \\ U_{C_1} + U_L + U_r = E,\ U_{C_1} + U_{C_2} + u = E, \end{gathered} \tag{1}$$

и уравнениям

$$\begin{gathered} U_L = L\frac{d}{dt} I_L,\ U_r = rI_L, \\ I_{C_j} = C_j \frac{d}{dt} U_{C_j},\ I_{g_j} = g_j U_{C_j},\ j = 1,2, \end{gathered} \tag{2}$$

где L, r, C_j, g_j – положительные постоянные. Состояние электрической цепи характеризуется вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^{tr} = (I_L(t), U_{C_1}(t), U_{C_2}(t))^{tr},$$

состоящим из «энергетических» компонент, которые отвечают инерционным элементам. С помощью (1),(2) получаем систему трех дифференциально-алгебраических уравнений относительно «энергетических» компонент:

$$\begin{gathered} L\frac{d}{dt} I_L + U_{C_1} + rI_L = e(t), \\ C_1 \frac{d}{dt} U_{C_1} - C_2 \frac{d}{dt} U_{C_2} - I_L + g_1 U_{C_1} - g_2 U_{C_2} = 0, \\ U_{C_1} + U_{C_2} = e(t) - u(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Перепишем систему уравнений (3) в векторной форме относительно вектора состояний $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + Ku(t), \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$f(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ 0 \\ e(t) \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Задача оптимального управления в системе (3) состоит в выборе входного (управляющего) напряжения $u(t)$, реализующего минимум «энергетического» квадратичного функционала качества этой системы. Вид функционала уточним в разделе 4 данной статьи.

3. Постановка и решение задачи оптимального управления для дифференциально-алгебраического уравнения

В данном разделе относительно уравнения (4) будем предполагать: A, B – вещественные матрицы размеров $n \times n$, K – вещественная матрица размера $n \times m$, $f(t)$ – n-мерная вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^n$. Управление системой (4) осуществляется с помощью m-мерного вектора управления $u(t)$, которому отвечает n-мерный вектор состояния системы $x(t) = x(t;u)$. Уравнение (4) будем рассматривать на отрезке времени $[0,T]$. Начальное условие зададим в виде

$$Ax(0) = q. \qquad (6)$$

Чтобы исследовать задачу оптимального управления в системе (4),(6), опишем решения $x(t) = x(t;u)$ этой системы при различных допустимых управлениях.

Введем обозначения: $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ – пространство вектор-функций со значениями в $\mathbf{R}^n$, суммируемых с квадратом нормы на $[0,T]$; $W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ – пространство Соболева порядка k вектор-функций из $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, у которых обобщенные производные до порядка k включительно принадлежат $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$. Функции из $W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$ будем считать непрерывными на $[0,T]$, изменив их, если необходимо, на множестве нулевой меры. Символ $<\cdot,\cdot>$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^m$, символ E обозначает единичную матрицу соответствующей размерности, а транспонированную матрицу к матрице K обозначаем через K'.

Пусть $f(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, $u(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$. Функцию $x(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ назовем р*ешением задачи (4),(6) на отрезке* $[0,T]$, если $Ax(t) \in W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$, функция $x(t)$ почти всюду удовлетворяет уравнению (4) и выполнено начальное условие (6). Управлению $u(t)$ отвечает решение $x(t) = x(t;u)$ системы (4),(6).

На динамику системы существенно влияет пучок матриц $\lambda A + B$. Будем предполагать, что этот пучок матриц является регулярным, т.е. его определитель $\det(\lambda A + B)$ отличен от тождественного нуля. Тогда в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $|\lambda| \geq \vartheta$ нет собственных чисел пучка $\lambda A + B$ (или нулей многочлена $\det(\lambda A + B)$ в комплексной плоскости). Определим матрицы:

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{|\lambda|=\vartheta} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1,$$

$$G = Q_1 A + Q_2 B, \quad W = -BG^{-1}Q_1, \quad F = Q_2 A G^{-1},$$

где матрица F является нильпотентной с индексом нильпотентности ν ($F^\nu = 0$, $F^{\nu-1} \neq 0$). Заметим, что матрицы Q_1, Q_2 являются вещественными, хотя контурное интегрирование осуществляется по комплексной переменной. Будем предполагать, что $FK = 0$, и если $\nu > 1$, то $F^k f(t) \in W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ для $k = 1,...,\nu-1$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1 из [6], получаем, что для любого вектора q из начального условия (6) такого, что

$$Q_2 q = \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}[F^{k+1} f(t)]_{t=0}, \qquad (7)$$

существует единственное решение $x(t)$ начальной задачи (4),(6) на отрезке $[0,T]$ и это решение допускает представление

$$x(t) = G^{-1}\left\{ e^{Wt} Q_1 q + \int_0^t e^{W(t-\tau)} Q_1 [f(\tau) + Ku(\tau)] d\tau \right\} +$$

$$+ G^{-1} Q_2 \left\{ \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k}[F^k f(t)] + Ku(t) \right\}.$$

Подобный результат для более общего дифференциально-операторного уравнения можно найти в [7].

Задача оптимального управления заключается в определении управления $u(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$, реализующего минимум функционала качества

$$\min_{u \in L_2} J(u),$$

$$J(u) = \int_0^T \left[< N_1 x(t), x(t) >_{\mathbf{R}^n} + < N_2 u(t), u(t) >_{\mathbf{R}^m} \right] dt \qquad (8)$$

на решениях $x(t) = x(t;u)$ задачи (4),(6), где N_1, N_2 – квадратные неотрицательно определенные матрицы соответственно размеров n, m, причем $N_2 \geq \delta I$, $\delta > 0$. Управление $u_*(t)$, на котором достигается минимум функционала (8), будем называть оптимальным управлением, а соответствующее решение $x_*(t) = x(t;u_*)$ – оптимальным решением. Будем придерживаться схемы метода, предложенной в [4]. Существование и единственность оптимального управления устанавливает

Теорема 1. *Пусть пучок матриц* $\lambda A + B$ *является регулярным;* $f(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$*; если индекс нильпотентности* ν *матрицы* F *больше 1, то* $F^k f(t) \in W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ *для* $k = 1,...,\nu-1$*; матрица* K

при управлении в уравнении (4) такая, что $FK = 0$. *Тогда для любого начального вектора* q *в условии (6), удовлетворяющем соотношению (7), существует единственное оптимальное управление* $u_*(t)$, *минимизирующее функционал качества (8).*

Доказательство. Доказательство теоремы 1 осуществляется по схеме доказательства теоремы 2 из [4]. Единственное решение $x(t;u)$, задачи (4),(6) и функционал $J(u)$ (8) представимы в виде

$$x(t;u) = L(u)(t) + w(t),$$

$$J(u) = < N_1(Lu + w), Lu + w > + < N_2 u), u >,$$

где L – ограниченный линейный оператор из $L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$ в $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ вида

$$(Lu)(t) = G^{-1}\int_0^t e^{W(t-\tau)}Q_1 Ku(\tau)]d\tau + G^{-1}Q_2 Ku(t),$$

$$w(t) = G^{-1}\left\{e^{Wt}Q_1 q + \int_0^t e^{W(t-\tau)}Q_1 f(\tau)d\tau\right\} +$$
$$+ G^{-1}Q_2\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}[F^k f(t)].$$

К оператору L определим сопряженный оператор L^* из $L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$ в $L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$:

$$(L^* v)(t) = K'Q_1'\int_t^T e^{W'(\tau-t)}(G')^{-1}v(\tau)d\tau + \\ + K'Q_2'(G')^{-1}v(t). \qquad (9)$$

Оператор $M = N_2 + L^* N_1 L$ является ограниченным линейным оператором в $L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$, который самосопряжен и имеет ограниченный обратный, норма которого оценивается как $\| M^{-1} \| \le 1/\delta$. Функция

$$u_*(t) = -(M^{-1}L^* N_1 w)(t) \qquad (10)$$

является единственным оптимальным управлением задачи (4),(6),(8), так как непосредственные вычисления показывают, что $J(u) - J(u_*) \ge \delta \| u - u_* \|$ для всех $u \in L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$. На этом доказательство теоремы завершается.

Согласно подходу, принятому в [8], введем в рассмотрение *сопряженное состояние* $p(t)$ и *сопряженную систему*, решением которой является сопряженное состояние. Для этого заметим, что соотношение

$$N_2 u + L^* N_1 x(u) = 0 \qquad (11)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $u = u_*$ является оптимальным управлением и $x(u_*) = x_*$ является оптимальным решением (ср. с утверждением 1 [4]). Используя вид сопряженного оператора L^* (9), равенство (11) переписываем в форме

$$N_2 u + K'Q_1'\int_t^T e^{W'(\tau-t)}(G')^{-1}N_1 x(\tau)d\tau + \\ + K'Q_2'(G')^{-1}N_1 x(t) = 0.$$

Теперь можно ввести сопряженное состояние

$$p(t) = Q_1'\int_t^T e^{W'(\tau-t)}(G')^{-1}N_1 x(\tau)d\tau + \\ + Q_2'(G')^{-1}N_1 x(t). \qquad (12)$$

Тогда оптимальное управление (10) вычисляется через сопряженное состояние (12) по формуле:

$$u_*(t) = -N_2^{-1}K'p(t). \qquad (13)$$

Нетрудно проверить, что функция

$$Q_1' p(t) = \int_t^T e^{W'(\tau-t)}Q_1'(G')^{-1}N_1 x(\tau)d\tau$$

является единственным решением задачи

$$\frac{d}{dt}[Q_1' p(t)] + W'[Q_1' p(t)] + Q_1'(G')^{-1}N_1 x(t) = \\ = 0, \ \text{п.в.}\, t \in [0,T], \quad Q_1' p(T) = 0,$$

таким, что $Q_1' p(t) \in W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$. Отсюда следует, что функция $p(t)$ (12) является единственным решением задачи

$$\frac{d}{dt}[A'Q_1' p(t)] = B'p(t) - N_1 x(t), \\ \text{п.в.}\, t \in [0,T], \ \ Q_1' p(T) = 0, \qquad (14)$$

таким, что $A'Q_1' p(t) \in W_2^1(0,T;\mathbf{R}^n)$. Согласно соотношению (13) оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) + KN_2^{-1}K'p(t) = f(t), \\ \text{п.в.}\, t \in [0,T], \ \ Ax(0) = q. \qquad (15)$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть пучок матриц* $\lambda A + B$ *является регулярным;* $f(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$*; если индекс нильпотентности* ν *матрицы* F *больше 1, то* $F^k f(t) \in W_2^k(0,T;\mathbf{R}^n)$ *для* $k = 1,...,\nu-1$*; матрица* K *при управлении в уравнении (4) такая, что* $FK = 0$*;*

начальный вектор q *в условии (6) удовлетворяет соотношению (7). Тогда задача (14),(15) имеет единственное решение* $p(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$, $x(t) = x_*(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^n)$. *Оптимальное управление* $u_*(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^m)$ *строится по формуле (13).*

Заметим также, что подход, в котором анализируются задачи оптимального управления с точки зрения функционального анализа, изложен в [9].

4. Приложение результатов раздела 3 к исследованию задачи оптимального управления входным напряжением в электрических цепях

Вернемся к системе (3), описанной в разделе 2. Начальные условия (6) предполагают задание в начальный момент времени следующих значений:

$$LI_L(0) = q_1,\ C_1U_{C_1}(0) - C_2U_{C_2}(0) = q_2. \qquad (16)$$

Задача оптимального управления в системе (3),(16) состоит в выборе входного напряжения $u(t) \in L_2(0,T)$, реализующего минимум функционала энергии инерционных элементов и управления:

$$J(u) = \int_0^T \left[LI_L^2(t) + C_1U_{C_1}^2(t) + C_2U_{C_2}^2(t) + u^2(t)\right]dt.$$

Эта задача допускает представление в виде (4),(6),(8) с параметрами (5) и

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix},\ N_1 = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix},\ N_2 = 1.$$

Пучок матриц $\lambda A + B$ является регулярным. Для несобственных чисел пучка, т.е.

$$\lambda \neq (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b})/2,$$
$$a = L\frac{g_1+g_2}{C_1+C_2} + \frac{r}{L},\ b = \frac{r(g_1+g_2)+1}{L(C_1+C_2)},$$

существует обратная матрица

$$(\lambda A + B)^{-1} = \\ = d^{-1}(\lambda)\begin{pmatrix} d_2(\lambda)+d_3(\lambda) & -1 & -d_3(\lambda) \\ 1 & d_1(\lambda) & d_1(\lambda)d_3(\lambda) \\ -1 & -d_1(\lambda) & d_1(\lambda)d_2(\lambda)+1 \end{pmatrix},$$
$$d_1(\lambda) = \lambda L + r,\ d_{j+1}(\lambda) = \lambda C_j + g_j,\ j = 1,2,$$
$$d(\lambda) = d_1(\lambda)[d_2(\lambda) + d_3(\lambda)] + 1.$$

Находим матрицы

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-C_2}{C_1+C_2} \\ 0 & 1 & \frac{C_1g_2 - C_2g_1}{C_1+C_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{C_2}{C_1+C_2} \\ 0 & 0 & \frac{C_2g_1 - C_1g_2}{C_1+C_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача (14) принимает вид

$$\frac{d}{dt}[A'p(t)] = B'p(t) - N_1x(t),\\ \text{п.в.}\, t \in [0,T],\ A'p(T) = 0. \qquad (17)$$

В силу теоремы 2 задача (15),(17) имеет единственное решение $x(t) = x_*(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^3)$, $p(t) \in L_2(0,T;\mathbf{R}^3)$, оптимальное управление строится по формуле $u_*(t) = p_3(t)$. Сделав замену переменных

$$p_3(t) = e(t) - x_2(t) - x_3(t),\ y(t) = C_1x_2(t) - C_2x_3(t)\ ,$$
$$x_2(t) = \frac{y}{C_1+C_2} + C_2\alpha p_1(t) + C_2\beta p_2(t) + \alpha e(t),$$
$$x_3(t) = \frac{-y}{C_1+C_2} + C_1\alpha p_1(t) + C_1\beta p_2(t) + \alpha\frac{C_1}{C_2}e(t),$$
$$\alpha = \sigma C_2,\ \beta = \sigma(C_2g_1 - C_1g_2),$$
$$\sigma = \frac{1}{(C_1+C_2)(C_1+C_2+C_1C_2)}\ ,$$

задачу (15),(17) можно упростить:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \Lambda\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} + \varphi(t),\ \text{п.в.}\, t \in [0,T],\\ x_1(0) = \frac{q_1}{L},\ y(0) = q_2,\ p_1(T) = p_2(T) = 0, \qquad (18)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L(C_1+C_2)} & \frac{-C_2\alpha}{L} & \frac{-C_2\beta}{L} \\ 1 & \frac{-g_1-g_2}{C_1+C_2} & -C_2\beta & \gamma \\ -1 & 0 & \frac{r}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & \frac{-1}{C_1+C_2} & \frac{1}{C_1+C_2} & \frac{g_1+g_2}{C_1+C_2} \end{pmatrix},$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \\ \varphi_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1+C_1C_2}{L(C_1+C_2+C_1C_2)}e(t) \\ -(C_1+C_2)\beta e(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \beta(C_1g_2 - C_2g_1).$$

Решение задачи (18) запишем с помощью формулы Коши:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \exp(\Lambda t)\begin{pmatrix} \frac{q_1}{L} \\ q_2 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \exp(\Lambda(t-\tau))\varphi(\tau)d\tau,$$

где неизвестные значения $p_1(0), p_2(0)$ найдем с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left\{\exp(\Lambda T)\begin{pmatrix} \frac{q_1}{L} \\ q_2 \\ p_1(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \exp(\Lambda(T-\tau))\begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \\ \varphi_4(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. Выводы

На примере электрического четырехполюсника, изображенного на рисунке, в работе поставлена задача оптимального управления в системе, описывающей переходные режимы в электрических цепях. Качество управления характеризует квадратичный функционал энергии. Так как математические модели переходных режимов описываются линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями, то для этих уравнений изучается задача оптимального управления с квадратичным функционалом качества. Получены новые теоремы существования и единственности оптимального управления, из формулировок и доказательств которых вытекают конструктивные алгоритмы и явные формулы для вычисления оптимального управления и оптимального состояния. Показано, как эти теоремы применяются в модельной электрической цепи для расчета входного (управляющего) напряжения, минимизирующего функционал энергии.

Литература: 1. *Bender D. J. and Laub A. J.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. Vol. AC-32, No. 6. P. 672–688. **2.** *Kunkel P., Mehrmann V.* The linear quadratic optimal control problem for linear descriptor systems with variable coefficients. // Math. Control Signals Systems. 1997. Vol. 10. P. 247–264. **3.** *Kurina G.A., Mdrz R.* On linear-quadratic optimal control problems for time-varying descriptor systems // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42, No. 6. P. 2062–2077. **4.** *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* Об оптимальном управлении системами, описываемыми неявными эволюционными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 416-424. **5.** *Власенко Л.А., Руткас А.Г., Самойленко А.М.* Проблема импульсного регулятора для одной динамической системы типа Соболева // Укр. мат. журн. 2008. Т. 60, № 8. С. 1027-1034. **6.** *Власенко Л.А.* Импульсные дифференциально-алгебраические уравнения в математических моделях электрических цепей // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 32. С. 27-31. **7.** *Власенко Л.А., Руткас А.Г.* О дифференциальной игре в системе, описываемой неявным дифференциально-операторным уравнением // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 6. С. 785-795. **8.** *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с. **9.** *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 384 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Поступила в редколлегию 14.01.2016

Власенко Лариса Андреевна, д-р техн. наук, профессор кафедры прикладной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61001, Харьков, ул. Плехановская, 2/5, кв. 29, тел.: (057) 732 28 35.

Руткас Анатолий Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Научные интересы: математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Адрес: Украина, 61001, Харьков, ул. Плехановская, 2/5, кв. 29, тел.: (057) 732 28 35.