человек. «Идея состояла бы в том, чтобы создать более хорошего философа, который бы более естественно подходил для реализации амбиций философии» (Уолкер, цит. по: с. 701). Автор отмечает, что эта позиция не рассматривалась философами, поскольку ее нормативный компонент казался невыполнимым. «Однако продолжающаяся революция в генетике, нанотехнологиях и в роботизации изменяет перспективы инфляционизма» (с. 701).

Л.А. Боброва

2012.04.004. ДЕЙЗА О. О РАЗВИТИИ ПОНЯТИЯ КАРДИНАЛЬНОГО ЧИСЛА.

DEISER O. On the development of the cardinal number // History and philosophy of logic. – L., 2010. – Vol. 31, N 2. – P. 123–144.

Понятие числа как такового можно встретить уже в Древней Греции. Автор выделяет два принципиально разных подхода к определению числа, преобладавших в эпоху Античности. Согласно первому подходу, число определялось как то, что можно перевести как «система единиц». Понятие «единицы» при этом определялось различными способами («точка без положения», «предел немногочисленности», «то, в соответствии с чем каждя из существующих вещей называется одной» и т.д.), но все такие определения имели общую черту: число расценивалось как нечто, конструирующееся из единиц.

Во втором подходе число определяется как то, что можно перевести к «определенной / ограниченной множественности». «Множественность» здесь – это «количество», которое может быть разложено на составные части. Отличие второго подхода от первого состоит в том, что если в первом явно описывается объект «число», то во втором – «число» есть ограничение более широкого понятия «количество», точнее, даже «дискретное количество» до понятия «число».

Два описанных определения были объединены Евклидом. Данная им формулировка может быть перефразирована на современном языке следующим образом: «Число – это конечное мультимножество, состоящее из единиц».

Понятием, возможно, еще более древним, чем число, является понятие множественности. Сравнение двух множественностей осуществлялось посредством установления соответствий между их составными частями. Однако первым, кто исследовал со строгой математической точки зрения сравнение мощностей множеств, был Г. Кантор.

В рукописи Кантора 1896 г. уже встречаются такие понятия, как «универсальная система обозначений» и «конструирование посредством абстракции». При этом универсальные числа не были строго определены, однако ординалы уже были описаны как системы единиц в работе 1883 г., поэтому и универсалы ординалов суть системы единиц. Так как кардиналы получаются из ординалов абстракцией порядка, универсалы кардиналов также оказываются системами единиц. Такое понимание Кантором универсалов подтверждается и его перепиской с К. Лассвицем в 1884 г. Таким образом, применение одной только абстракции к упорядочиванию приводит к универсальной системе обозначений, и Кантор рассматривает свое определение как соответствующее греческому.

С 1884 г. исследованием мощностей множеств активно занимается и Г. Фреге. При этом Фреге и Кантор принципиально расходятся в определениях, связанных с мощностями. Фреге определяет мощность множества как класс всех множеств, ему эквивалентных. Кантор же не согласен с таким подходом (хотя кажется наиболее правдоподобным, что Кантор неправильно истолковал определения, предложенные Фреге). В рецензии на работу Фреге Кантор предлагает свое определение, отличное от определения Фреге. Фреге в ответе на рецензию настаивает на том, что их определения представляют, по сути, одно и то же, и с таким мнением согласны многие математики. Однако, по мнению автора, это далеко не так. Например, предложенные ими определения по-разному относятся к феномену допустимого класса, и это показывает их принципиальное различие.

Со стороны Фреге критике подвергаются понятия «абстракции» и «единиц» Кантора.

В 1887 г. Кантор публикует работу, состоящую из фрагментов переписки с математиками, учителями, философами и теологами с 1884 по 1887 г. В работе в тесной связи с допустимыми мощностями рассматриваются греческие «единицы», делаются отсылки к схоластической философии и, в частности, к Фоме Аквинскому. Определение мощности в этой работе уже не зависит от относительного определения, и свойство корректности теперь является доказуемым, а не обусловленным исходными понятиями. Совпадение мощностей множеств обосновывается рассуждениями об абстракции порядка и о существовании биекции между множествами. Таким образом, кардиналы становятся чем-то большим, что просто системами «единиц».

В 1895 г. Кантор предлагает заключительное определение понятия мощности. Работа начинается с понятия множества. Оно, хотя и не определено строго с современной точки зрения, не позволяет построить некоторые противоречивые и неанализируемые множества.

С точки зрения современной аксиоматической теории множеств введенные Кантором кардиналы неформализуемы и несовместимы с теорией, однако они дали толчок дальнейшему развитию.

Позднее Б. Рассел, рассуждая о парадоксах, к которым приводило принятое понимание множеств, подверг критике и определения кардинальных чисел, полученные с применением абстракции. Например, к противоречию приводит рассуждение о классе всех множеств, имеющих ту же мощность, что и некоторое заданное множество. Позднее Рассел применял свою теорию типов для того, чтобы избежать подобных проблем.

Несмотря на критику Фреге и Рассела, математики продолжали пользоваться определениями мощности, данными Кантором. При этом делаются постоянные сокращения и упрощения определений. В 1900-х годах в комментариях Э. Цермело можно найти улучшенное определение мощности, не содержащее понятия «универсальная система обозначений», но все еще использующее «абстракцию» без пояснений ее математической сути. В первое десятилетие XX в. определения мощности, данные различными математиками, использовали «абстракцию», хотя были и исключения (работа Хессенберга). В любом случае теория множеств была несвободна от парадоксов, которые широко обсуждались. Поэтому остро встал вопрос о целесообразности понятия кардинального числа. Прояснение в этот вопрос внес Цермело, предложив в 1908 г. первую систему аксиом теории множеств, позволившую устранить парадоксы. В рамках этой системы аксиом Цермело разработал фундаментальную теорию относительного определения кардиналов, включающую, в числе прочего, теорему Кантора – Бернштейна. При этом кардиналы не определялись как самостоятельные объекты. Сегодня известно, что система аксиом 1908 г. является неполной, но она позволила снова поверить в состоятельность теории множеств, и можно было ожидать, что она приведет к прояснению математической сути кардинала.

Следующий шаг в развитии понятия кардинального числа был сделан Хаусдорфом в 1914 г. Хаусдорф вводит кардинал как произвольный «символ» и показывает, что принятие «формальной точки зрения» позволяет свободно работать с кардинальными «символами». Кроме того, Хаусдорф показал, что все, что необходимо для свободного оперирования понятием кардинала, – это свойство корректности, так что проблема определения кардинальных чисел перешла из разряда философских в разряд чисто математических. Над ее решением трудились Г. фон Нейман, Френкель, Д. Скотт, А. Леви, Д Пинкус и др. «Эти математические результаты подтвердили то, что представила история, а именно: определение кардинала – нетривиальная задача» (с. 144).

В. Подымов