УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том I *1970* *№ 4*

УДК 629.735.33.027.23—254

ОБ УРАВНЕНИЯХ КАЧЕНИЯ УПРУГОЙ ШИНЫ

В. С. Гоздек

Рассматривается связь между движением катящегося колеса с упругой шиной и реакцией на него со стороны земли в предположении об отсутствии проскальзывания поверхности шины относительно земли. Показано, что эта задача математически формулируется без привлечения дополнительных гипотез о механизме качения шины. Изложен способ составления уравнений, приближенно характеризующих процесс качения колеса.

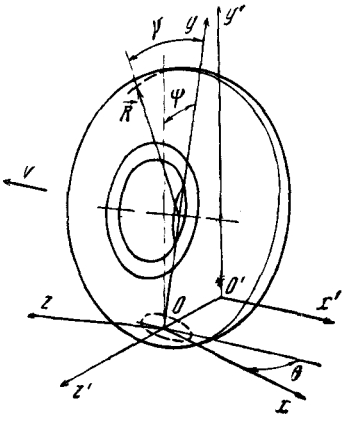
Изучение характера движения автомобиля или самолета при его пробеге по земле, шимми колес автомобиля или самолета и ряда других явлений неотделимо от исследования сил, действующих со стороны земли на шины катящихся колес. Остановимся на выяснении связей между движением корпуса катящегося колеса и реакцией на упругую шину со стороны земли в случае, когда эта реакция содержит составляющие, находящиеся в плоскости земли.

При составлении уравнений качения шины обычно предполагают, что материал шины идеально упруг. Это допущение позволяет выразить воздействие на колесо через смещение относительно его корпуса участка поверхности шины, прилегающего в данный момент к земле. Кроме того, принимают, что качение шины происходит без проскальзывания ее поверхности относительно земли. При таком допущении между движением корпуса колеса и смещением относительно него лежащих на земле точек поверхности шины существует определенная зависимость, которая, однако, не образует замкнутой системы уравнений. Для получения замкнутой системы уравнений качения упругой шины принимают различные гипотезы о существовании дополнительной связи между составляющими деформации катящейся шины. Наибольшее распространение получили гипотеза качения, введенная М. В. Келдышем [1], и гипотеза бокового увода [2].

Покажем, что процесс качения упругой шины можно представить решением краевой задачи для уравнений напряженного

состояния шины без введения дополнительных связей между компонентами ее деформации. Тому же вопросу посвящена работа [3], однако изложенные в ней результаты применимы лишь в случае более грубой схематизации шины.

Пусть колесо, состоящее из недеформируемого корпуса и упругой шины, прямолинейно катится по плоской недеформируемой поверхности с постоянной скоростью V, находясь под постоянной внешней нагрузкой. Назовем это движение колеса невозмущенным. Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$, ось Ox которой параллельна земле и лежит в диаметральной плоскости корпуса колеса на постоянном расстоянии от его центра, а ось Oy проходит через центр колеса (фиг. 1). Кроме того, введем движущуюся со скоростью V прямоугольную систему координат $O'x'y'z'$, расположив оси $O'x'$ и $O'z'$ на поверхности земли и направив ось $O'x'$ в направлении, противоположном вектору скорости невозмущенного движения. Пусть при невозмущенном движении соответствующие оси обеих систем координат совпадают, корпус колеса вращается с угловой скоростью ω_0, а обжатие шины равно f_0.



Фиг. 1

Опишем возмущенное движение корпуса колеса следующими величинами: скоростью $V_x(t)$ точки O вдоль оси $O'x'$, где t — время, скоростью $V_z(t)$ той же точки вдоль оси $O'z'$, смещением $f(t)$ центра колеса вдоль оси $O'y'$, приращением $\omega_z(t)$ угловой скорости ω_0, углом $\theta(t)$ между осями $O'x'$ и Ox, а также углом $\psi(t)$ между осями $O'y'$ и Oy. Компоненты возмущенного движения корпуса колеса вместе с производными $\dot{f}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ будем считать величинами первого порядка малости.

Пусть при невозмущенном движении нам известно движение каждой точки шины относительно корпуса колеса в виде функции угла γ между осью Oy и связанным с корпусом колеса вектором $\vec{R}$, лежащим в плоскости xOy (см. фиг. 1). Выразим смещение относительно корпуса колеса точек обращенной к земле части поверхности шины при возмущенном движении через смещение $u(x, z, t)$ этих точек вдоль оси Ox, смещение $v(x, z, t)$ вдоль оси Oy и смещение $w(x, z, t)$ вдоль оси Oz из положения, которое они занимали при том же значении угла γ в процессе невозмущенного движения.

Допустим, что при качении шины точки ее поверхности, находясь в зоне контакта с землей, не проскальзывают относительно земли. Выберем некоторую точку шины, лежащую в момент t_0 на поверхности земли и имеющую в системе $O'x'y'z'$ координаты x_0', z_0'. Спустя интервал времени Δt, та же точка шины, не двигаясь относительно земли, будет иметь координаты $x_0' + V\Delta t$, z_0'. Считая интервал Δt малым, выразим смещение этой точки через компо-

ненты возмущенного движения корпуса колеса и составляющие смещения шины $u(x, z, t)$ и $w(x, z, t)$:

$$\left.\begin{aligned} V_x \Delta t + (\omega_0 + \omega_z)\frac{V}{\omega_0}\Delta t - z_0\dot{\theta}\Delta t + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x_0 + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + O(\delta^3) = V\Delta t; \\ V_z \Delta t + x_0\dot{\theta}\Delta t + \theta\Delta x_0 + \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x_0 + \frac{\partial w}{\partial t}\Delta t + O(\delta^3) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где x_0, z_0 и Δx_0 — соответственно координаты выбранной точки в момент t_0 и изменение величины x_0 в системе $Oxyz$, а δ — малая величина.

Переходя в системе (1) к пределу при стремлении к нулю интервала времени Δt и компонентов возмущенного движения колеса, получим дифференциальные уравнения вида:

$$V\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + V_x + \frac{V}{\omega_0}\omega_z - z\dot{\theta} = 0; \quad (2)$$

$$V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} + V_z + V\theta + x\dot{\theta} = 0. \quad (3)$$

Неизвестная функция $v(x, z, t)$ в зоне контакта шины с землей выражается через функции $f(t)$ и $\psi(t)$:

$$v(x, z, t) + f(t) + z\psi(t) = 0. \quad (4)$$

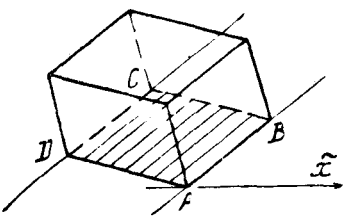
Таким образом, смещение точек поверхности катящейся без проскальзывания шины в зоне ее контакта с землей подчинено соотношениям (2) — (4). Нетрудно убедиться в том, что эти соотношения еще не определяют полностью процесса качения упругой шины.

Считая шину состоящей из идеально упругого и не обладающего инерцией материала, остановимся на особенностях ее деформации в случае, когда колесо не катится, а его шина прижата к земле некоторой силой. Пусть вначале расположение всех точек шины относительно корпуса колеса совпадает с их расположением в некоторый момент невозмущенного движения. Сместим корпус колеса из этого положения. Пусть при этом касающиеся земли точки поверхности шины остаются неподвижными. В результате шина займет новое положение равновесия, а в зоне контакта шины с землей произойдет изменение внешней нормальной и касательной нагрузки. Компоненты $u(x, z)$ и $w(x, z)$ смещения шины вместе с их первыми производными по x и z будут непрерывными всюду, за исключением линии, ограничивающей зону контакта шины с землей, где производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ могут иметь разрыв первого рода.

Форма равновесия шины и закон распределения нагрузки на нее со стороны земли при заданном законе смещения относительно корпуса колеса точек части ее поверхности в принципе могут быть всегда определены методами теории упругости. Не будем касаться здесь этой задачи, полагая известными компоненты реакции на колесо со стороны земли и компоненты деформации во всех точках шины, если известно смещение относительно корпуса колеса всех касающихся земли точек ее поверхности.

Обратимся к особенностям деформации катящейся шины вблизи линии, ограничивающей зону ее контакта с землей. На границе контакта в этом случае происходят два процесса. На части границы материал катящейся шины прилегает к земле. Будем называть ее передним фронтом контакта. На остальной части границы, называемой в дальнейшем задним фронтом контакта, поверхность шины отходит от земли.

Покажем, что при введенных нами допущениях производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ будут непрерывными на переднем фронте контакта. Выделим бесконечно малый элемент шины, одна из граней которого образована точками ее поверхности (фиг. 2). Пусть ребро AB в момент t_0 совпадает с передним фронтом контакта и далее, находясь в зоне контакта, не перемещается относительно земли, а ребро CD становится неподвижным с момента времени $t_0 + \Delta t$. Представим себе, что указанные выше производные имеют разрыв первого рода на переднем фронте контакта. Пусть, например, в момент t_0 значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ в окрестности точки A слева и справа от ребра AB, т. е. внутри и вне зоны контакта шины с землей, отличаются на величину первого порядка малости. Проведем на поверхности земли ось $A\tilde{x}$, совпадающую по направлению с осью Ox в момент t_0. В этом случае точка D в течение интервала времени Δt должна переместиться вдоль оси $A\tilde{x}$ на расстояние второго порядка малости. Отметим, что за то же время смещение точки D вдоль оси $A\tilde{x}$, обусловленное изменением деформации свободной от внешней нагрузки поверхности шины, выражается величиной третьего порядка малости. Следовательно, перед сцеплением поверхности шины с землей на эту поверхность должна действовать внешняя нагрузка, направленная вдоль оси $A\tilde{x}$ и вызывающая местное проскальзывание шины относительно земли. Однако такой процесс противоречил бы закону трения, поскольку направление проскальзывания шины при этом оказывается совпадающим с направлением действия внешней нагрузки. Отсюда следует, что на переднем фронте контакта катящейся без проскальзывания упругой шины производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ должны оставаться непрерывными.



Фиг. 2

Существование разрыва первого рода этих производных на заднем фронте контакта, порождающее проскальзывание поверхности шины перед ее отходом от земли, находится в согласии с законом трения. В реальных условиях, когда функции u и w, принимают некоторые конечные значения, задний фронт контакта представляет собой не линию, а полосу, в которой поверхность шины проскальзывает относительно земли, а внешняя касательная нагрузка постепенно уменьшается до нуля. Тем не менее мы пренебрежем влиянием проскальзывания поверхности шины перед отходом от земли и будем считать условия (2) и (3) выполненными во всей зоне контакта.

Итак, при введенных допущениях приращение реакции на катящуюся шину, порождаемое возмущенным движением корпуса колеса, определяется решением уравнений напряженного состояния покоящейся шины, имеющей с землей неизменную зону контакта, если выполнены следующие граничные условия:

1. Перемещение точек шины, лежащих на корпусе колеса, равно нулю.

2. На поверхность шины, находящуюся за пределами зоны ее контакта с землей и не касающуюся корпуса колеса, не действует внешняя нагрузка.

3. Перемещение точек поверхности шины внутри зоны контакта с землей подчинено соотношениям (2) — (4).

4. На части границы контакта, соответствующей переднему фронту в процессе качения шины, производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ остаются непрерывными.

Сформулированная задача представляется весьма сложной, поэтому укажем на один из способов составления замкнутой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, приближенно характеризующей процесс качения упругой шины. Представим функции u и w на участке поверхности шины внутри зоны контакта в виде полиномов:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma\alpha_{ij}(t)\, x^i z^j; \\ w &= \Sigma\beta_{kl}(t)\, x^k z^l; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, p;\ l = 0, 1, 2, \ldots, q,$$

где $\alpha_{ij}(t)$ и $\beta_{kl}(t)$ — искомые функции времени.

Обозначим через $u_{ij}(x, z)$, $w_{ij}(x, z)$ и $u_{kl}(x, z)$, $w_{kl}(x, z)$ компоненты смещения точек свободной поверхности шины, когда внутри зоны контакта точки шины смещены соответственно по законам: $u = x^i z^j$, $w = 0$ и $u = 0$, $w = x^k z^l$.

Представим функции u и w на участке поверхности шины вне зоны ее контакта с землей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma\alpha_{ij}(t)\, u_{ij}(x, z) + \Sigma\beta_{kl}(t)\, u_{kl}(x, z) + f(t)\, u_f(x, z) + \\ &\quad + \psi(t)\, u_\psi(x, z); \\ w &= \Sigma\alpha_{ij}(t)\, w_{ij}(x, z) + \Sigma\beta_{kl}(t)\, w_{kl}(x, z) + f(t)\, w_1(x, z) + \\ &\quad + \psi(t)\, w_\psi(x, z); \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, p;\ l = 0, 1, 2, \ldots, q.$$

Здесь u_f, u_ψ, w_f и w_ψ — составляющие смещения, порождаемые смещением корпуса колеса вдоль оси $O'y'$ на единичное расстояние и его поворотом относительно оси $O'x'$ на единичный угол (см. фиг. 1). Заданные в форме (5) и (6) функции u и w удовлетворяют уравнениям напряженного состояния шины при соблюдении первого и второго из указанных граничных условий. Подчиним приближенно функции u и w остальным граничным условиям.

Выделим в зоне контакта шины с землей $n+1$ линий, параллельных линии $z=0$. Отметим на каждой линии по $m+1$ точек, расположив по одной из них на переднем фронте контакта. Потребуем непрерывности производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в $n+1$ выбранных точках переднего фронта контакта и выполнения условий, диктуемых уравнением (2) в остальных $m(n+1)$ выбранных точках.

Первые производные по x и z от заданных в виде выражений (5) и (6) функций u и w имеют на границе зоны контакта шины с землей, как и в рассмотренном выше случае нагружения неподвижной шины, разрыв первого рода. Разность значений указанных производных по обе стороны границы контакта в каждой ее точке выражается линейной функцией переменных $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{kl}(t)$, $f(t)$ и $\psi(t)$. Значит, непрерывность производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ в $n+1$ точках границы контакта может быть достигнута введением $n+1$ линейных зависимостей между этими переменными, так как в направлении касательной к границе контакта производная от функции u остается непрерывной благодаря непрерывности самой функции u.

В результате мы получим $n+1$ алгебраических и $m(n+1)$ дифференциальных линейных уравнений, содержащих $(m+1)(n+1)$ функций $\alpha_{ij}(t)$ и $(p+1)(q+1)$ функций $\beta_{kl}(t)$. Поступая таким же образом по отношению к составляющей смещения w, можно получить $(p+1)(q+1)$ уравнений, содержащих те же переменные.

Пользуясь изложенным способом, составим более точные уравнения качения шины по сравнению с полученными в работе [1].

Благодаря симметрии шины процессы ее продольного и поперечного возмущенного движения не связаны между собой, если параметры возмущенного движения малы. Поперечное движение корпуса колеса характеризуется переменными $V_z(t)$, $\theta(t)$ и $\psi(t)$. Функция u при этом должна быть кососимметричной, а функция w — симметричной относительно оси Ox. Полагая, что в выражениях (5) $m=1$, $n=1$, $p=2$, $q=0$, зададим функции u и w внутри зоны контакта в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} u &= z[\sigma(t)-\varphi(t)]+xz[\chi(t)-\varepsilon(t)];\\ w &= \lambda(t)+x[\sigma(t)+\varphi(t)]+\frac{x^2}{2}[\chi(t)+\varepsilon(t)]. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Неизвестные функции времени $\lambda(t)$ и $\varphi(t)$ здесь выражают движение поверхности контакта как жесткого тела, а функции $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ и $\chi(t)$ — деформацию шины в зоне контакта. Потребуем, чтобы функции (7) удовлетворяли уравнениям (2) и (3) в окрестности точки с координатами $x=0$, $z=0$ с точностью до малых порядка x^2+z^2. Это порождает следующие связи между переменными, входящими в соотношения (7), (2) и (3):

$$\left.\begin{aligned} &V(\varphi+\sigma)+\dot{\lambda}+V_z+V\theta=0;\\ &V\varepsilon+\dot{\varphi}+\dot{\theta}=0;\\ &V\chi+\dot{\sigma}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Представляя функции u и w за пределами зоны контакта шины с землей так же, как в выражениях (6), приблизим на перед-

нем фронте контакта производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ к непрерывным, сохраняя равной нулю величину их разрыва в точке пересечения переднего фронта с линией $z=0$ с точностью до малых порядка z^2. Последнее требование, эквивалентное равенству производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial x}$ с двух сторон границы контакта в окрестности указанной точки, приводит к появлению двух представленных ниже линейных зависимостей между переменными, входящими в выражение (7), и функцией $\psi(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= a_1\lambda + a_2\varphi + a_3\sigma + a_4\psi; \\ \chi &= a_5\lambda + a_6\varphi + a_7\sigma + a_8\psi, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $a_1 - a_8$ — постоянные, определяемые деформацией шины при смещении ее точек в зоне контакта по заданным законам. Соотношения (8) и (9) образуют замкнутую систему уравнений, связывающих параметры поперечного возмущенного движения корпуса колеса с компонентами смещения точек шины в зоне ее контакта с землей. Компоненты реакции на колесо со стороны земли в этом случае выражаются линейными функциями переменных, участвующих в уравнениях (9).

Систему уравнений, приближенно характеризующую процесс качения шины при ее продольном возмущенном движении, можно получить таким же путем. Зададим внутри зоны контакта функции u и w, из которых первая теперь должна быть симметричной, а вторая кососимметричной относительно линии $z=0$, в виде

$$u = \xi(t) + x\mu(t); \quad w = 0, \tag{10}$$

где $\xi(t)$ — смещение зоны контакта в продольном направлении как жесткого тела, $\mu(t)$ — деформация материала шины в продольном направлении.

Пусть функции (10) удовлетворяют уравнениям (2) и (3) в точке с координатами $x=0$, $z=0$. Тогда между переменными $\xi(t)$, $\mu(t)$ и параметрами возмущенного движения корпуса колеса существует зависимость

$$V\mu + \dot{\xi} + V_x + \frac{V}{\omega_0}\omega_z = 0. \tag{11}$$

Представим функции u и w за пределами зоны контакта в виде, аналогичном (6), и потребуем равенства производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ с обеих сторон границы контакта в окрестности точки пересечения переднего фронта с линией $z=0$. Это приводит к появлению линейной зависимости между переменными $\xi(t)$, $\mu(t)$ и $f(t)$:

$$\mu = b_1\xi + b_2 f, \tag{12}$$

где b_1 и b_2 — постоянные.

Соотношения (11) и (12) представляют собой замкнутую систему уравнений качения шины. Компоненты реакции на колесо со стороны земли в рассматриваемом случае выражаются линейно через переменные, входящие в уравнение (12).

В заключение укажем на некоторые различия процессов качения упругой шины, характеризуемых полученными здесь уравнениями и уравнениями, приведенными в работе [1]. Рассмотрим установившееся прямолинейное качение шины, когда диаметральная плоскость корпуса колеса повернута по отношению к вектору скорости на угол θ_0. Согласно уравнениям качения шины, представленным в указанной выше работе, на шину в этих условиях должен действовать такой же момент сил относительно вертикальной оси, что и при повороте зоны контакта покоящейся шины на угол θ_0 относительно корпуса колеса. Величина того же момента, найденная на основе уравнений (8) и (9), окажется другой, так как из-за составляющей смещения σ, учитывающей деформацию сдвига в прилегающей к земле части шины, величины φ и θ_0 не будут равны между собой.

Уравнения (11) и (12) отличаются от принятых в работе [1] условий качения шины в случае продольного возмущенного движения колеса присутствием составляющей смещения точек шины, обозначенной через $\mu(t)$. Благодаря такому дополнению уравнения (11) и (12) отражают факт изменения угловой скорости установившегося вращения корпуса катящегося колеса под воздействием приложенной к шине со стороны земли продольной нагрузки. При колебаниях корпуса катящегося колеса в продольном направлении или при его угловых колебаниях относительно оси вращения действующая на шину со стороны земли продольная сила, найденная на основе уравнений (11) и (12), рассеивает энергию этих колебаний, что также связано с характеризуемой функцией $\mu(t)$ продольной деформацией шины в зоне контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Труды ЦАГИ, № 564, 1945.

2. Неймарк Ю. Н., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., „Наука", 1967.

3. Гоздек В. С. К постановке задачи о взаимодействии с землей катящегося колеса с упругой шиной при его колебаниях. ДАН СССР, 1969, № 5.

Рукопись поступила 25/X 1969 г.