УДК 517.544.8

# ЗАДАЧА МАРКУШЕВИЧА В КЛАССЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ

*А.А. Патрушев*

**Предложен метод явного решения краевой задачи Маркушевича в классе автоморфных функций относительно фуксовой группы второго рода. Краевое условие задачи задано на главной окружности, из которой удалены все предельные точки группы. Получено решение задачи в замкнутой форме при дополнительном ограничении, наложенном на коэффициенты задачи: функция $a(t)/(b(t)+1)$ аналитически продолжима в область $D_-$ и автоморфна относительно Г в этой области.**

*Ключевые слова: краевые задачи для аналитических функций, задача Маркушевича, автоморфные функции.*

## 1. Постановка задачи

Пусть $\Gamma: \sigma_0(z) \equiv z, \sigma_k(z),\ k=1,2,...$ – конечнопорожденная фуксова группа второго рода, $\infty$ – обыкновенная точка группы. Очевидно $\Gamma^* = T \circ \Gamma \circ T$, где $T: z^* = z_0 + r_0^2 / \left(\overline{z} - \overline{z_0}\right)$ – преобразование симметрии относительно главной окружности $L_*$. Известно, что такая группа является группой дробно-линейных преобразований первого класса [4]. Пусть $R_0$ – фундаментальная область Форда, $\rho$ – род фундаментальной области, $S$ – область инвариантности группы, $D_\pm$ – соответственно внутренность и внешность главной окружности, $R_\pm = R_0 \cap D_\pm$, $L_*$ – множество дуг главной окружности, получаемой из $L$ удалением всех предельных точек группы.

Задача Маркушевича в классе автоморфных функций ставится следующим образом: требуется определить кусочно-аналитическую, автоморфную относительно группы дробно-линейных преобразований Г функцию $\psi(z)$, если на контуре $L_0 = L \cap R_0$ ее краевые значения связаны соотношением

$$\psi_+(t) = a(t)\psi_-(t) + b(t)\overline{\psi_+(t)} + f(t), \qquad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $b(t)+1 \neq 0$, функция $a(t)/\left(b(t)+1\right)$ аналитически продолжима в область $D_-$ и автоморфна относительно Г в области $D_-$. Если $f(t)=0$, то имеем однородную задачу Маркушевича. Решение ищется в классе функций, исчезающих на бесконечности.

## 2. Решение задачи Маркушевича

Перепишем (1) в виде

$$\psi_+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1}\psi_-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1}\operatorname{Re}\psi_+(t) + \frac{f(t)}{b(t)+1} \qquad (2)$$

и, считая $\operatorname{Re}\psi_+(t)$ известной, рассмотрим соотношение (2) как краевое условие задачи Римана в классе автоморфных функций относительно группы Г. Тогда ее решение относительно функции

$$\Omega(z) = \begin{cases} \psi_+(z), & \text{если } z \in D_+, \\ \dfrac{a(z)}{b(z)+1}\psi_-(z), & \text{если } z \in D_- \end{cases}$$

определится формулой [5]

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left(\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\operatorname{Re}\psi_+(\tau) + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}\right)A(z,\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{\kappa_0-1} c_k\zeta_k(z,\infty) + c_0, \qquad (3)$$

$$\kappa = Ind_{L_0} a(t),\ \kappa_1 = Ind_{L_0}\left(b(t)+1\right),\ \kappa_0 = Ind_{L_0}\frac{2b(t)}{b(t)+1} = \begin{cases} \kappa, & \text{если } |b(t)|<1,\ t\in L_0,\\ \kappa-\kappa_1, & \text{если } |b(t)|>1,\ t\in L_0.\end{cases}$$

Автоморфный аналог ядра Коши $A(z,\tau)$ имеет вид [3]

$$A(z,\tau) = K(z,\tau) - \omega_1(\tau)K(z,a_1) - \ldots - \omega_\rho(\tau)K(z,a_\rho),$$

$\rho$ – род фундаментальной области $R_0$,

$$K(z,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma_j'(\tau)}{\sigma_j(\tau)-z} = \sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\tau-\sigma_j(z)} - \frac{1}{\tau-\sigma_j(\infty)}\right],$$

где предполагается, что бесконечность не является неподвижной точкой преобразования группы $\Gamma$. Функции

$$\xi_k(z,\infty) = z^k + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sigma_j^k(z) - \sigma_j^k(\infty)\right) - \sum_{j=1}^{\rho}\frac{\omega_j^{k-1}(\infty)}{(k-1)!}K(z,a_j),\ k=1,\ldots,\kappa_0-1$$

являются коэффициентами разложения ядра $A(z,\tau)$ в окрестности $\tau=\infty$. В точках $a_j\in R_0\setminus L_0$, $a_j\neq z_0$, $j=1,\ldots,\rho$ и в точках, конгруэнтным им, функция $\xi_k(z,\infty)$ имеет простые полюсы. Подберем числа $c_k$ таким образом, чтобы вычеты функции $\Omega(z)$ в точках $a_j, j=1,\ldots,\rho$, были равны нулю, что обеспечит аналитичность функции в этих точках. То есть должны выполняться равенства:

$$\sum_{k=1}^{\kappa_0-1} c_k d_{j,k} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\mathrm{Re}\psi_+(\tau) + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}\right]\omega_j(\tau)d\tau,\ j=1,\ldots,\rho,\ \kappa_0>0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\mathrm{Re}\psi_+(\tau) + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}\right]\omega_j(\tau)d\tau = 0,\ \ j=1,\ldots,\rho,\ \kappa_0\le 0. \tag{5}$$

Если $r$ $(0<r<\min\{\rho,\kappa_0-1\})$ – ранг матрицы коэффициентов системы (4), то при выполнении этих условий разрешимости решение зависит от $\kappa_0 - r$ произвольных постоянных над полем $\mathbb{C}$.

На основании формул Сохоцкого из равенства (3) имеем на контуре $L_0$

$$\begin{aligned}\psi_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau)+1}\mathrm{Re}\psi_+(\tau) + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}\right]A(z,\tau)d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\kappa_0-1} c_k\xi_k(t,\infty) + \frac{b(t)}{b(t)+1}\mathrm{Re}\psi_+(t) + \frac{f(t)}{2(b(t)+1)} + c_0.\end{aligned} \tag{6}$$

С другой стороны, заметим, что функция $\psi_+(z)$ определяется в области $R_+$ с точностью до мнимого постоянного через значение своей действительной части на контуре $L_0$ [2]:

$$\psi_+(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\mathrm{Re}\psi_+(\tau)A(z,\tau)d\tau + 2\sum_{j=1}^{2\rho}\gamma_j K(z,a_j) - \beta + ic, \tag{7}$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mathrm{Re}\psi_+(\tau)A(z_0,\tau)d\tau,\ \ \gamma_j = \frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\mathrm{Re}\psi_+(\tau)\omega_j(\tau)d\tau,\ \ j=1,\ldots,2\rho,$$

если выполняются $\rho$ условий разрешимости

$$\int_{L_0}\mathrm{Re}\psi_+(\tau)\left[\omega_j(\tau) + \frac{(a_j-z_0)^2}{(\tau-z_0)^2}\overline{\omega_{\rho+j}(\tau)}\right]d\tau = 0,\ \ j=1,\ldots,\rho. \tag{8}$$

Точки $a_j, j=1,\ldots,\rho$ выбираем таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$a_{\rho+j} = a_j^*,\quad a_j^* = z_0 + \frac{r_0^2}{\overline{a_j - z_0}},\quad j=1,2,\ldots,\rho.$$

Тогда из соотношения (7) имеем на контуре $L_0$

$$\psi_+(t) = \mathrm{Re}\psi_+(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \mathrm{Re}\psi_+(\tau)A(z,\tau)d\tau + 2\sum_{j=1}^{2\rho}\gamma_j K(t,a_j) - \beta + ic. \qquad (9)$$

Следовательно, на основании формул (6), (9) приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{\mathrm{Re}\psi_+(t)}{b(t)+1} + \frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{\mathrm{Re}\psi_+(\tau)}{b(\tau)+1}A(t,\tau)d\tau = \frac{f(t)}{2(b(t)+1)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}A(t,\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(t,\infty) + \alpha(t) + d,$$

$$d = \beta - ic + c_0, \quad \alpha(t) = -2\sum_{j=1}^{2\rho}\gamma_j K(t,a_j).$$

Здесь $\mathrm{Re}\psi_+(t)$ должна удовлетворять $\rho$ комплексным условиям разрешимости (8). Для однозначной кусочно-голоморфной функции

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{2\mathrm{Re}\psi_+(\tau) - f(\tau)}{b(\tau)+1}A(z,\tau)d\tau$$

приходим к односторонней краевой задаче для автоморфных функций, решение которой записывается в виде [1]

$$\Psi(z) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(z,\infty) + \alpha(z) + d, & z \in D_+, \\ \varphi^-(z), & z \in D_-, \end{cases} \qquad (10)$$

где $\varphi^-(z)$ – произвольная аналитическая, автоморфная относительно группы дробно-линейных преобразований $\Gamma$ функция в области $D_-$, исчезающая на бесконечности. На основании (10) имеем

$$\frac{Re\psi_+(t)}{b(t)+1} = \frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(z,\infty) + \alpha(t) + d + \frac{f(t)}{b(t)+1} - \varphi^-(t)\Big], \quad t \in L_0. \qquad (11)$$

Учитывая, что в левой части выражения (11) имеется функция $\mathrm{Re}\psi_+(t)$, приходим для функции $\varphi^-(z)$ к краевой задаче Гильберта в классе автоморфных относительно группы $\Gamma$ функций:

$$\mathrm{Re}\{-i[b(t)+1]\varphi^-(t)\} = \mathrm{Im}\left[\left(b(t)+1\right)\left\{d + \alpha(t) + \sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(t,\infty) + \frac{f(t)}{b(t)+1}\right\}\right]. \qquad (12)$$

Каноническая функция данной задачи, удовлетворяющая краевому условию,

$$\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)} = \frac{b(t)+1}{\overline{b(t)+1}}, \; t \in L_0$$

определится формулами [2]:

$$\chi(z) = \chi_0(z)\overline{\chi_0(z^*)},$$

$$\chi_0(z) = e^{\Gamma(z)}E^{-\kappa_1}(z,\infty,\theta_0)\prod_{j=1}^{\rho}E(z,\theta_j,\theta_0)\prod_{j=1}^{n}E^{m_j}(z,\sigma_j(\theta_0),\theta_0),$$

$$\kappa_1 = Ind_{L_0}[b(t)+1], \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L0}K(z,\tau)\ln(b(\tau)+1)d\tau,$$

$\sigma_1(z),\ldots,\sigma_n(z)$ – порождающие преобразования группы $\Gamma$; $\theta_j \in R_0 \setminus L_0$, $\theta_j \neq \theta_0$, $j = 1,\ldots,\rho$, где $\theta_0$ – фиксированная точка области $R_0$; $m_j, j = 1,\ldots,n$ – целые числа. Функция

$$E(z,\theta,\theta_0)=\exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta}K(z,\tau)d\tau\right),\ \theta_0\in R_0\setminus L_0$$

берется вдоль пути, целиком расположенного в $S$. Она однозначна в этой области и в случае неконгруэнтных между собой точек $\theta_0$ и $\theta$ имеет в этих точках простой полюс и нуль кратности 1 соответственно. Если точки $\theta_0$ и $\theta$ между собою конгруэнтны, то $E(z,\theta,\theta_0)$ на множестве $S$ ограничена и нигде не обращается в нуль.

Так как $\chi_0(\sigma_k(z))=\chi_0(z)e^{H_k}$, $\forall z\in S\setminus L$, где

$$H_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\eta_k(\tau)\ln(b(\tau)+1)d\tau-\kappa_1\int_{\theta_0}^{\theta_j}\eta_k(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{\rho}\int_{\theta_0}^{\theta_j}\eta_k(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}m_j\int_{\theta_0}^{\sigma_j(\theta_0)}\eta_k(\tau)d\tau,\ k=1,2,...,$$

то для автоморфности канонической функции $\chi(z)$ необходимо потребовать, чтобы все $H_k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi i)$. То есть целые числа $m_j, j=1,...,n$ и точки $\theta_j\in R_0\setminus L_0,\ \theta_j\neq\theta_0, j=1,...,\rho$ определяются из проблемы Якоби обращения интегралов $\varphi_k(z)=\int_{\theta_0}^{z}\eta_k(\tau)d\tau,\ k=1,...,\rho$:

$$\sum_{j=1}^{\rho}\varphi_k(\theta_j)+\sum_{j=1}^{n}m_j\eta_{k,j}+n_k 2\pi i=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\eta_k(\tau)\ln(b(\tau)+1)d\tau+\kappa_1\varphi_k(\infty),$$

где $n_k$, $k=1,...,\rho$ – некоторые целые числа,

$$\eta_{k,j}=\varphi_k(\sigma_j(z))-\varphi_k(z)=\int_{\theta_0}^{\sigma_j(\theta_0)}\eta_k(\tau)d\tau,\ j=1,...,n.$$

Функция $\chi_0(z)$ автоморфна относительно группы дробно-линейных преобразований $\Gamma$, имеет в точках $\theta_1,...,\theta_m$, образующих частное решение проблемы обращения Якоби, нули кратности $\lambda_1,...,\lambda_m$ соответственно, а в точке $\theta_0$ имеет порядок $\kappa_1-\rho$.

Решение этой задачи запишется в виде [2]

$$-i\varphi(z)=\chi(z)[F_0(z)+\overline{F_0(z^*)}+\Psi_0(z)+\overline{\Psi_0(z^*)}+\Psi_1(z)+\overline{\Psi_1(z^*)}],\qquad(13)$$

где

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{c(\tau)}{\overline{[b(\tau)+1]}\chi^+(\tau)}A(z,\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{c(\tau)}{\overline{[b(\tau)+1]}\chi^+(\tau)}K(z,\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{j=1}^{\rho}d_jK(z,a_j),\ d_j=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{c(\tau)}{\overline{[b(\tau)+1]}\chi^+(\tau)}\omega_j(\tau)d\tau,\ j=1,...,\rho,$$

$$\Psi_0(z)=C+\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}c_{q,\nu}\zeta_\nu(z,\theta_q),\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=\rho,$$

$$\zeta_\nu(z,\theta_q)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(\sigma_j(z)-\theta_q)^\nu}-\frac{1}{(\sigma_j(\infty)-\theta_q)^\nu}\right]-\sum_{j=1}^{\rho}d_{j,\nu}^{(q)}K(z,a_j),$$

$$d_{j,\nu}^{(q)}=-\frac{\omega_j^{(\nu-1)}(\theta_q)}{(\nu-1)!},\ q=0,...,m,\ \nu=1,2,...,\quad \Psi_1(z)=\begin{cases}\sum_{\nu=1}^{\kappa_1-\rho}c_\nu\zeta_\nu(z,\theta_0), & \kappa_1\geq\rho,\\ 0, & \kappa_1<\rho,\end{cases}$$

$$c(t)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{[b(t)+1]\left[\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(t,\infty)+\alpha(t)+d+\frac{f(t)}{b(t)+1}\right]\right\}.$$

Для того, чтобы краевая задача (12) имела решения в классе функций, исчезающих на бесконечности, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{c(\tau)}{\overline{[b(\tau)+1]\chi^+(\tau)}}A(z_0,\tau)d\tau + C + \overline{\Psi_0(z_0)} + \overline{\Psi_1(z_0)} = 0. \qquad (14)$$

Постоянные $c_{q,\nu}$, $c_\nu$ при $\kappa_1 \geq \rho$ должны удовлетворять неоднородной системе линейных уравнений

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{\lambda_q}(c_{q,\nu}d_{j,\nu}^{(q)} - \frac{(a_j-z_0)^2}{r_0^2}\overline{c_{q,\nu}d_{\rho+j,\nu}^{(q)}}) + \sum_{\nu=1}^{\kappa_1-\rho}(c_\nu d_{j,\nu}^{(0)} - \frac{(a_j-z_0)^2}{r_0^2}\overline{c_\nu d_{j,\nu}^{(0)}}) =$$
$$= -d_j + \frac{(a_j-z_0)^2}{r_0^2}\overline{d_{\rho+j}},\ j=1,\dots,\rho, \qquad (15)$$

в которой

$$d_j = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}\frac{\operatorname{Im}\left\{[b(t)+1]\left[\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(t,\infty)+\alpha(t)+d+\frac{f(t)}{b(t)+1}\right]\right\}}{\chi^+(\tau)\overline{b(\tau)+1}}\omega_j(\tau)d\tau.$$

Если $\kappa_1 < \rho$, то кроме системы (15), где все $c_\nu = 0$, должны выполняться еще $\rho-\kappa_1$ комплексных условий:

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left[\Psi_0(z)+\overline{\Psi_0(z^*)}\right]|_{z=\theta_0} = b_j,\ b_j = -\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left[F_0(z)+\overline{F_0(z^*)}\right]|_{z=\theta_0},\ j=1,\dots,\rho-\kappa_1. \qquad (16)$$

Известно [2], если $\kappa_1 \geq \rho$, $\kappa_0 > 0$, функция $\varphi(z)$ с учетом условия разрешимости (14) содержит $2\kappa_1 - 2\rho + 2\kappa_0 + 1$ произвольных вещественных постоянных; если $\kappa_1 < \rho$, $\kappa_0 > 0$, то число этих постоянных равно $2\rho + 2\kappa_0 + 1$. При этом, если $\kappa_1 < \rho$, $\kappa_0 > 0$, то эти постоянные должны удовлетворять системе $2\rho - 2\kappa_1$ вещественных линейных уравнений (16). Система (16) неоднородна. Как известно, ее разрешимость эквивалентна выполнению следующих $2\rho - 2\kappa_1 - r_1$ вещественных условий ($r_1$ – ранг матрицы системы (16)):

$$\sum_{j=1}^{\rho-\kappa_1}(\mu_{j,k}\operatorname{Re}b_j{}' + \mu_{j+\rho-\kappa_1,k}\operatorname{Im}b_j{}') = 0,\ k=1,\dots,2\rho-2\kappa_1-r_1, \qquad (17)$$

$$b_j{}' = -\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}\left[F_{01}(z)+\overline{F_{01}(z^*)}\right]|_{z=\theta_0},\ j=1,\dots,\rho-\kappa_1,$$

$$F_{01}(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_0}\frac{\operatorname{Im}\left\{[b(\tau)+1]\left[\sum_{k=\kappa_0-r_1+1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(\tau,\infty)+\gamma(\tau)\right]\right\}}{\overline{[b(\tau)+1]\chi^+(\tau)}}A(z,\tau)d(\tau),$$

$$\gamma(\tau) = \alpha(\tau) + d + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1},$$

где $\mu_{1,k},\dots,\mu_{2\rho-2\kappa_1,k}$, $k=1,\dots,2\rho-2\kappa_1-r_1$, – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной вещественной системы.

При выполнении этих условий, также учитывая условие разрешимости (14), задача Гильберта имеет решение, которое содержит $2\rho+2\kappa_0+1-r_1$ произвольных вещественных постоянных. Если $r_1 = 2\rho+2\kappa_0+1$, решение будет единственным.

Пусть теперь $\kappa_0 \leq 0$. Тогда имеем: при $\kappa_1 \geq \rho$ функция $\varphi(z)$ содержит $2\kappa_1 - 2\rho + 1$ произвольных вещественных постоянных, а при $\kappa_1 < \rho$ число этих постоянных равно $2\rho+1$, если выполняются $\rho$ комплексных условий (8). При этом, если $\kappa_1 < \rho$, то эти постоянные должны удовлетворять неоднородной системе $2\rho-2\kappa_1$ вещественных линейных уравнений (16). Разрешимость системы (16) эквивалентна выполнению следующих $2\rho-2\kappa_1-r_1$ вещественных условий

$$\sum_{j=1}^{\rho-\kappa_1}(\mu_{j,k}\operatorname{Re}b_j+\mu_{j+\rho-\kappa_1,k}\operatorname{Im}b_j)=0,\ \ k=1,\ldots,2\rho-2\kappa_1-r_1, \tag{18}$$

где $\mu_{1,k},\ldots,\mu_{2\rho-2\kappa_1,k}$, $k=1,\ldots,2\rho-2\kappa_1-r_1$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной вещественной системы.

При выполнении этих условий, учитывая условие разрешимости (14), задача Гильберта имеет решение, которое содержит $2\rho_0+1-r_1$ произвольных вещественных постоянных. Если $r_1=2\rho+1$, решение будет единственным.

На основании формул (11), (13) на контуре $L_0$ имеем задачу Римана

$$\psi_+(t)=\frac{a(t)}{b(t)+1}\psi_-(t)+b(t)\left[\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(t,\infty)+\alpha(t)+d\right]+f(t)b(t)-$$
$$-ib(t)\chi^-(t)[F_0^-(t)+\overline{F_0^+(t)}+\Psi_0(t)+\overline{\Psi_0(t)}+\Psi_1(t)+\overline{\Psi_1(t)}]+\frac{f(t)}{b(t)+1}. \tag{19}$$

Решение задачи (19) запишется в виде

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}[b(\tau)\left(\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(\tau,\infty)+\alpha(\tau)+d\right)+f(\tau)b(\tau)-$$
$$-ib(\tau)\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\Psi_1(\tau)+\overline{\Psi_1(\tau)}]+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]A(z,\tau)d\tau+$$
$$+c_0+\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(z,\infty).$$

Тогда общее решение неоднородной задачи Маркушевича определится формулой

$$\psi(z)=\begin{cases}\Omega(z), & z\in D_+,\\ \dfrac{b(z)+1}{a(z)}\Omega(z), & z\in D_-.\end{cases} \tag{20}$$

Условия разрешимости (4), (5), (8) в этом случае будут выглядеть следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_kd_{j,k}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}[b(t)(\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(\tau,\infty)+\alpha(\tau)+d+f(\tau)-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+$$
$$+\overline{F_0^+(\tau)}+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\Psi_1(\tau)+\overline{\Psi_1(\tau)}])+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]\omega_j(\tau)d\tau,\ j=1,\ldots,\rho,\ \kappa_0>0, \tag{21}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[b(t)\left(\alpha(\tau)+d+f(\tau)-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\Psi_1(\tau)+\overline{\Psi_1(\tau)}]\right)+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}\right]\omega_j(\tau)d\tau=0,\ j=1,\ldots,\rho,\ \kappa_0\le 0, \tag{22}$$

$$\int_{L_0}\frac{[b(\tau)+1]}{2}(\sum_{k=1}^{\kappa_0-1}c_k\xi_k(\tau,\infty)+\alpha(\tau)+d+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}-$$
$$-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\Psi_1(\tau)+\overline{\Psi_1(\tau)}])[\omega_j(\tau)+ \tag{23}$$
$$+\frac{(a_j-z_0)^2}{(\tau-z_0)^2}\overline{\omega_{\rho+j}(\tau)}]d\tau=0,\ j=1,\ldots,\rho.$$

Таким образом, в случае $|b(t)|<1$ (так как тогда $\kappa_1=0,\ \kappa_0=\kappa$), если $\kappa>0$, то неоднородная задача Маркушевича имеет решение, которое содержит $2\rho+2\kappa+1-r_1-2r$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $2\rho-r_1$ вещественных условий разрешимости (16), $2\rho$ вещественных условий разрешимости (21) и $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23) ($r_1$ – ранг матрицы коэффициентов вещественной системы (16), $r$ – ранг матрицы коэффициентов системы (21)). Если $\kappa\le 0$, в случае $|b(t)|<1$, то задача имеет решение, которое зависит от $2\rho-r_1+1$ произвольных вещественных постоянных, если это решение, в свою очередь, удовлетворяет $\rho$ комплексным условиям разрешимости (22) (при этом $\Psi_1(z)=0$) и $-\kappa+1$ условиям разрешимости

$$f^{(j)}(\infty)=0,\ j=0,\dots,-\kappa+1, \tag{24}$$

где $f^{(j)}(\infty)$ – коэффициенты разложения функции

$$\int_{L_0}[b(\tau)(d+\alpha(\tau)+f(\tau)-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}])+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]A(z,\tau)d\tau$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. То есть мы приходим к неоднородной системе линейных уравнений относительно $2\rho-r_1+1$ неизвестных, число же уравнений над полем $\mathbb{R}$ будет $2\rho-2\kappa+2$. Полученная система будет разрешима лишь при выполнении $2\rho-2\kappa+2-r_2$ необходимых и достаточных условий

$$\sum_{k=1}^{2\rho-2\kappa+2}\beta_{k,l}y_k=0,\ l=1,\dots,2\rho-2\kappa+2-r_2, \tag{25}$$

где $\beta_{1,l},\dots,\beta_{2\rho-2\kappa+2,l}$, $l=1,\dots,2\rho-2\kappa+2-r_2$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы, $r_2$ – ранг матрицы коэффициентов системы, полученной объединением систем (21), (22)

$$y_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}[b(t)(\alpha(\tau)+d+f(\tau)-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+$$
$$+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}])+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]\omega_k(\tau)d\tau,\ k=1,\dots,\rho,$$
$$y_{2\rho+j+1}=f^{(j)}(\infty),\ j=0,\dots,-\kappa+1.$$

В случае $|b(t)|>1,\ \kappa_0>0,\ \kappa_1\ge\rho$, неоднородная задача содержит $2\kappa-2\rho-2r+1$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $2\rho$ вещественных условий разрешимости (21) и $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23). Если же $|b(t)|>1,\ \kappa_0>0,\ \kappa_1<\rho$, то задача имеет решение, которое содержит $2\rho+2\kappa_0-2r+1-r_1$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $2\rho-2\kappa_1-r_1$ вещественных условий (17), $2\rho$ вещественных условий разрешимости (21) и $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23).

Рассмотрим теперь случай $|b(t)|>1,\ \kappa_0\le 0,\ \kappa_1\ge\rho$. Неоднородная задача имеет решение, которое линейно зависит от $2\kappa_1-2\rho+1$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23), $2\rho$ вещественных условий разрешимости (22) и $-\kappa_0+1$ условий

$$f^{(j)}(\infty)=0, j=0,\dots,-\kappa_0+1, \tag{26}$$

где $f^{(j)}(\infty)$ – коэффициенты разложения функции

$$\int_{L_0}[b(\tau)(d+\alpha(\tau)+f(\tau)-i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau)+\overline{F_0^+(\tau)}+$$
$$+\Psi_0(\tau)+\overline{\Psi_0(\tau)}+\Psi_1(\tau)+\overline{\Psi_1(\tau)}])+\frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]A(z,\tau)d\tau$$

в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Следовательно, мы приходим к неоднародной системе уравнений относительно $2\kappa_1 - 2\rho + 1$ вещественных неизвестных, число же уравнений равно $4\rho - 2\kappa_0 + 2$. Полученная система будет разрешима лишь при выполнении $2\rho - 2\kappa_0 + 2 - r_3$ необходимых и достаточных условий

$$\sum_{k=1}^{2\rho-2\kappa_0+2} \beta_{k,l} y_k = 0,\ l = 1, \ldots, 2\rho - 2\kappa_0 + 2 - r_3, \tag{27}$$

где $\beta_{1,l}, \ldots, \beta_{2\rho-2\kappa_0+2,l},\ l = 1, \ldots, 2\rho - 2\kappa_0 + 2 - r_3$ – полная система линейно независимых решений соответствующей однородной транспонированной системы, $r_3$ – ранг матрицы коэффициентов вещественной системы (22), (26),

$$y_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [b(t)(\alpha(\tau) + d + f(\tau) - i\chi^-(\tau)[F_0^-(\tau) + \overline{F_0^+(\tau)} +$$

$$+\Psi_0(\tau) + \overline{\Psi_0(\tau)} + \Psi_1(\tau) + \overline{\Psi_1(\tau)}]) + \frac{f(\tau)}{b(\tau)+1}]\omega_k(\tau)d\tau,\ k = 1, \ldots, \rho,$$

$$y_{\rho+j+1} = f^{(j)}(\infty),\ j = 0, \ldots, -\kappa_0 + 1.$$

И, следовательно, неоднородная задача в случае $|b(t)| > 1,\ \kappa_0 \le 0,\ \kappa_1 \ge \rho$ имеет решение, которое линейно зависит от $2\kappa_1 - 2\rho + 1 - r_3$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $4\rho - 2\kappa_0 + 2 - r_3$ вещественных условий разрешимости (27) и $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23).

В случае $|b(t)| > 1,\ \kappa_0 \le 0,\ \kappa_1 < \rho$ задача при выполнении $2\rho - 2\kappa_1 - r_1$ условий разрешимости (17) имеет решение, которое линейно зависит от $2\rho - r_1 + 1$ произвольных вещественных постоянных, если это решение, в свою очередь, удовлетворяет $4\rho - 2(\kappa - \kappa_1) + 2$ вещественным условиям разрешимости объединенной системы (22), (24), где $\Psi_1(z) = 0$ и $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23). Произведя аналогичные выкладки, как и в случае $|b(t)| < 1,\ \kappa \le 0$, имеем, что неоднородная задача в случае $|b(t)| > 1,\ \kappa_0 \le 0,\ \kappa_1 < \rho$ имеет решение, которое линейно зависит от $2\rho - r_1 - r_2 + 1$ произвольных вещественных постоянных, если выполняются $4\rho - 2\kappa_1 - r_1$ вещественных условий разрешимости (17), $2\rho$ вещественных условий разрешимости (23) и $4\rho - 2(\kappa - \kappa_1) - r_2 + 2$ вещественных условий (25), где $r_2$ – ранг матрицы коэффициентов вещественной объединенной системы (21), (24).

В итоге справедлива

**Теорема.** *Пусть коэффициенты* $a(t),\ b(t),\ f(t) \in H(L_0)$, $a(t) \ne 0,\ b(t) \ne 0,\ b(t) + 1 \ne 0,\ t \in L_0$ *неоднородной задачи Маркушевича такие, что функция* $a(t)/(b(t)+1)$ *аналитически продолжима с контура* $L_0$*, лежащего в фундаментальной области* $R_0$ *группы преобразований* $\Gamma$*, в область* $D_-$ *и автоморфна относительно* $\Gamma$ *в* $D_-$*. Тогда неоднородная задача в классе автоморфных функций относительно группы* $\Gamma$*:*

*1) при* $\kappa > 0$, $|b(t)| < 1$ *имеет решение, которое содержит* $2\rho + 2\kappa - 2r - r_1$ *произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $2\rho - r_1$ *вещественных условий разрешимости (16),* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (21) и* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23) (*$\rho$ *– род фундаментальной области,* $r_1$ *– ранг матрицы коэффициентов вещественной системы (16),* $r$ *– ранг матрицы коэффициентов вещественной системы (25));*

*2) при* $\kappa \le 0$, $|b(t)| < 1$ *задача имеет решение, которое линейно зависит от* $2\rho - r_1 - r_2$ *произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23),* $2\rho - r_1$ *вещественных условий разрешимости (16),* $4\rho - 2\kappa + 2 - r_2$ *вещественных условий разрешимости (25) (*$r_2$ *– ранг матрицы коэффициентов вещественной объединенной системы (22), (24));*

*3) при* $\kappa_0 > 0$, $\kappa_1 \ge \rho$, $|b(t)| > 1$ *имеет решение, которое линейно зависит от* $2\kappa - 2\rho - 2r$

*произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (21) и* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23);*

*4) при* $\kappa_0 > 0$, $\kappa_1 < \rho$, $|b(t)| > 1$ *имеет решение, которое линейно зависит от* $2\kappa_0 + 2\rho - 2r - r_1$ *произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $4\rho - 2\kappa_1 - r_1$ *вещественных условий (16),* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (21) и* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23);*

*5) при* $\kappa_0 \le 0$, $\kappa_1 \ge \rho$, $|b(t)| > 1$ *имеет решение, которое линейно зависит от* $2\kappa_1 - 2\rho - r_3$ *произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $4\rho - 2\kappa_0 + 2 - r_3$ *вещественных условий разрешимости (27) (*$r_3$ *– ранг матрицы коэффициентов вещественной объединенной системы (22), (26)) и* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23);*

*6) при* $\kappa_0 \le 0$, $\kappa_1 < \rho$, $|b(t)| > 1$ *имеет решение, которое линейно зависит от* $2\rho - r_1 - r_2$ *произвольных вещественных постоянных, если выполняются* $4\rho - 2\kappa_1 - r_1$ *вещественных условий разрешимости (17),* $2\rho$ *вещественных условий разрешимости (23) и* $4\rho - 2(\kappa - \kappa_1) - r_2 + 2$ *вещественных условий (25) (*$r_2$ *– ранг матрицы коэффициентов вещественной объединенной системы (22), (24)).*

## Литература


1. Гахов, Ф.Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши / Ф.Д. Гахов // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 2. – С. 533–544.
2. Сильвестров, В.В. Краевая задача Гильберта для одной бесконечной области в классе автоморфных функций / В.В. Сильвестров // Тр. семинара по краевым задачам. – Изд-во Казанского ун-та. – 1980. – С. 180–194.
3. Сильвестров, В.В. К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций / В.В. Сильвестров, Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 12. – С. 117–121.
4. Форд, Р. Автоморфные функции / Р. Форд. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 340 с.
5. Чибрикова, Л.И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае группы с двумя инвариантами / Л.И. Чибрикова // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 121–131.


***Поступила в редакцию 11 февраля 2011 г.***

## THE MARKUSHEVICH PROBLEM IN THE CLASS OF AUTOMORPHIC FUNCTIONS FOR ARBITRARY CIRCLE

In the article an explicit method for solution the Markushevich boundary value problem in the class of automorphic functions with respect of Fuchsian group Γ of the second kind is suggested. The boundary condition of the problem is given on the main circle from which all limit points of the group are deleted. The the problem is found in closed form under additional restriction on the coefficients of the problem: the function $a(t)/(b(t)+1)$ is analytic in the domain $D_-$ and is automorphic with respect Γ in this the domain.

*Keywords: boundary problems for analytic functions, the Markushevich boundary problem, the automorphic functions.*

**Patrushev Alexey Alexeevich** is Associate Professor, Department of General Mathematics, South Ural State University.

**Патрушев Алексей Алексеевич** – доцент, кафедра общей математики, Южно-Уральский государственный университет.

e-mail: patraleksej@yandex.ru