УДК 519.233.5
DOI: 10.21285/1814-3520-2016-5-87-94

КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ КАК ИНСТРУМЕНТ АНАЛИЗА ПОЛИКОРРЕЛЯЦИИ

© А.В. Петров[1]
Иркутский национальный исследовательский технический университет,
664074, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83.

Представлены результаты использования аппарата теории конечных разностей для проведения анализа изменений поликорреляционных моментов в зависимости от показателей степени слагаемых регрессионного полинома. Получены соотношения, которые позволяют с использованием разностей *k*-го порядка анализировать изменения поликорреляционных моментов с учетом поведения начальных моментов независимой переменной регрессионного полинома порядка *n*. Приведены результаты теоретических расчетов и численных экспериментов. Рассмотрены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: регрессионный анализ, полином, моментные функции, конечные разности, программные средства, численный эксперимент.

FINITE DIFFERENCES AS A TOOL OF POLYCORELLATION ANALYSIS

A.V. Petrov
Irkutsk National Research Technical University,
83, Lermontov St., Irkutsk, 664074, Russia.

The article presents the results of using the finite differences theory apparatus for the analysis of changes of polycorellational moments depending on the exponents of regressive polynomial summands. Using k-order differences, obtained correlations allow to analyze the changes in polycorellational moments considering the behaviour of initial moments of the independent variable of n order regressive polynomial. The paper provides the results of theoretical calculations and numerical experiments. Further research directions are outlined.

Keywords: regression analysis, polynomial, moment functions, finite difference, software, numerical experiment

Введение

Представленные в статье [3] подходы к решению задачи полиномиальной регрессии обеспечивают не только разрешение ключевой проблемы – автоматическое и объективное нахождение порядка регрессионного полинома с параллельным нахождением его коэффициентов. Наиболее значимым является радикальное расширение понятия вероятностной зависимости.

Понятие корреляции и ее трактовка как меры линейной вероятностной взаимосвязи известно еще со времен К.Ф. Гаусса. Предпринимались также попытки ввести различного рода характеристики для отражения более сложных вероятностных зависимостей. К их числу можно отнести так называемые моментные функции [2]. К сожалению, написание формул еще не означает их практическую применимость – остаются неясными те свойства исследуемых объектов, которые эти моментные функции отражают. Понятно с традиционным коэффициентом корреляции – показателем величины линейной вероятностной зависимости, а какого вида нелинейные стохастические зависимости описывают моментные функции, пока остается неизвестным.

В работах [2, 3, 5] удалось обосновать, теоретически и экспериментально доказать, что моментная функция вида

$$\mu = M\left[\left(Y - M(Y)\right)\cdot\left(X - M(X)\right)\cdot\ldots\cdot\left(X^n - M\left(X^n\right)\right)\right] \tag{1}$$

является функцией, описывающей именно полиномиальные вероятностные взаимосвязи

[1]Петров Александр Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированных систем, e-mail: petrov@istu.edu
Petrov Alexander, Doctor of Engineering sciences, Professor of the Department of Automated Systems, e-mail: petrov@istu.edu

между независимой переменной *X* в различных степенях и зависимой переменной *Y*. Это обусловило возможность введения в работах [2–5] понятия *поликорреляции*.

Нельзя исключать возможность использования выражений, аналогичных (1), для описания других нелинейных зависимостей. При этом приходится вступать в противоречия с определенными канонами классической теории вероятностей, как это описано, например, в работе [5, с. 123–130].

Помимо крупномасштабных задач, одна из которых описана выше, можно сформулировать и такие направления исследований, которые позволяют более тонко изучать поликорреляцию. К числу последних можно отнести, например, изучение влияния вероятностных свойств шума на поликорреляционные моменты и коэффициенты. Но, как показали экспериментальные исследования, частично отраженные в [2], здесь необходимо искать некий чувствительный аппарат, так как зависимости проявляются в значениях, которые в инженерной практике зачастую признаются на уровне погрешностей вычислений.

Объект исследования

В настоящей статье исследуются зависимости приращений поликорреляционных моментов от изменений показателя степени независимой переменной регрессионного полинома.

В публикациях [2, 3, 5] приведены примеры расчетов поликорреляционных коэффициентов при варьировании различных параметров. В качестве одного из примеров в табл. 1 приведены рассчитанные по экспериментальным результатам значения поликорреляционных коэффициентов $r(X^i \cdot X^j)$ для полинома 2-го порядка. Условия проведения экспериментов: на независимую переменную накладывается помеха и предполагается, что зависимая переменная *Y* связана с *X* полиномом степени *n*. Здесь помеха имеет равномерное в интервале [-1, +1] распределение. На рис. 1 представлена также поверхность, графически отображающая соответствующие данные табл. 1.

В табл. 2 и 3 представлены результаты теоретических расчетов коэффициентов поликорреляции $r(Y \cdot X^1)$ и $r(Y \cdot X^2)$ при наложении гауссовского шума с параметрами (0, 5) на полином 2-го порядка с коэффициентами b_1 и b_2. На рис. 2 и 3 – соответствующие поверхности.

Таблица 1

Оценки коэффициентов поликорреляции $r(X^i \cdot X^j)$ для полинома 2-го порядка

Table 1

Estimates of polycorrelation coefficients of $r(X^i \cdot X^j)$ for the 2nd order polynomial

i / j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0,140	-0,170	-0,217	-0,297	-0,460	-0,841	-0,841	-0,460
2	-0,115	-0,140	-0,179	-0,247	-0,391	-0,786	-0,786	-0,391
3	-0,090	-0,109	-0,140	-0,194	-0,313	-0,704	-0,704	-0,313
4	-0,064	-0,078	-0,101	-0,140	-0,229	-0,577	-0,577	-0,229
5	-0,039	-0,047	-0,060	-0,085	-0,140	-0,391	-0,391	-0,140
6	-0,013	-0,016	-0,020	-0,028	-0,047	-0,140	-0,140	-0,047
7	0,013	0,016	0,020	0,028	0,047	0,140	0,140	0,047
8	0,039	0,047	0,060	0,085	0,140	0,391	0,391	0,140

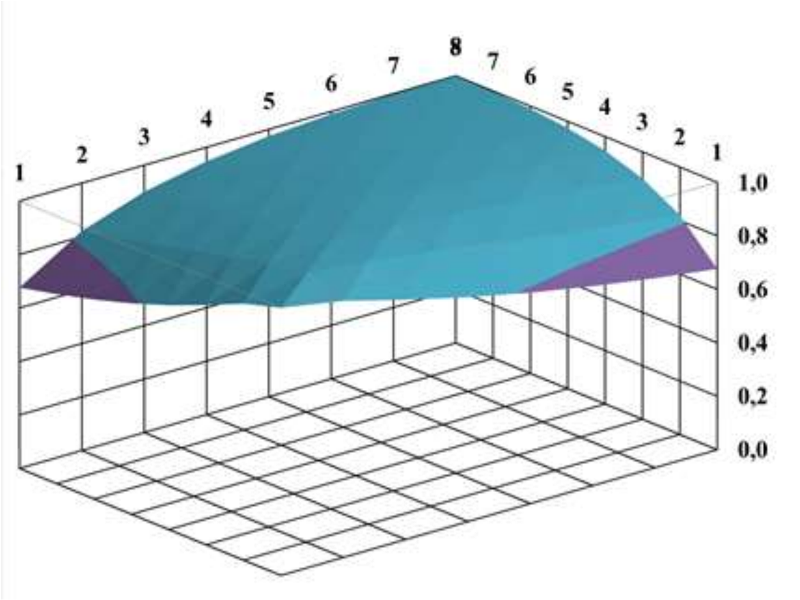


Рис. 1. Оценки коэффициентов поликорреляции $r(X^i \cdot X^j)$ ***для полинома 2-го порядка***

Fig. 1. Estimates of polycorrelation coefficients of $r(X^i \cdot X^j)$ ***for the 2nd order polynomial***

Таблица 2

Коэффициенты поликорреляции $r(Y \cdot X^1)$

Table 2

Polycorrelation coefficients $r(Y \cdot X^1)$

b_1 / b_2	-1,000	-0,818	-0,636	-0,455	-0,273	-0,091	0,091	0,273	0,455	0,636	0,818	1,000
-1,000	-0,140	-0,170	-0,217	-0,297	-0,460	-0,841	-0,841	-0,460	-0,297	-0,217	-0,170	-0,140
-0,818	-0,115	-0,140	-0,179	-0,247	-0,391	-0,786	-0,786	-0,391	-0,247	-0,179	-0,140	-0,115
-0,636	-0,090	-0,109	-0,140	-0,194	-0,313	-0,704	-0,704	-0,313	-0,194	-0,140	-0,109	-0,090
-0,455	-0,064	-0,078	-0,101	-0,140	-0,229	-0,577	-0,577	-0,229	-0,140	-0,101	-0,078	-0,064
-0,273	-0,039	-0,047	-0,060	-0,085	-0,140	-0,391	-0,391	-0,140	-0,085	-0,060	-0,047	-0,039
-0,091	-0,013	-0,016	-0,020	-0,028	-0,047	-0,140	-0,140	-0,047	-0,028	-0,020	-0,016	-0,013
0,091	0,013	0,016	0,020	0,028	0,047	0,140	0,140	0,047	0,028	0,020	0,016	0,013
0,273	0,039	0,047	0,060	0,085	0,140	0,391	0,391	0,140	0,085	0,060	0,047	0,039
0,455	0,064	0,078	0,101	0,140	0,229	0,577	0,577	0,229	0,140	0,101	0,078	0,064
0,636	0,090	0,109	0,140	0,194	0,313	0,704	0,704	0,313	0,194	0,140	0,109	0,090
0,818	0,115	0,140	0,179	0,247	0,391	0,786	0,786	0,391	0,247	0,179	0,140	0,115
1,000	0,140	0,170	0,217	0,297	0,460	0,841	0,841	0,460	0,297	0,217	0,170	0,140

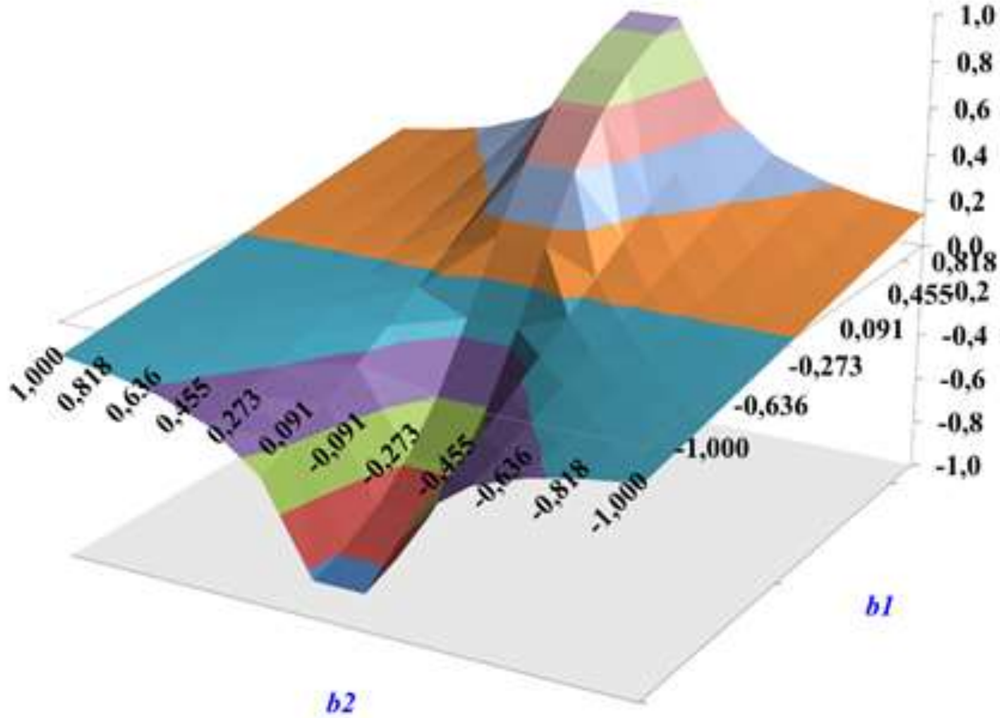


Рис. 2. Коэффициенты поликорреляции $r(Y \cdot X^1)$

Fig. 2. Polycorrelation coefficients $r(Y \cdot X^1)$

Таблица 3

Коэффициенты поликорреляции $r(Y \cdot X^2)$

Table 3

Polycorrelation coefficients $r(Y \cdot X^2)$

b_1 / b_2	-1,000	-0,818	-0,636	-0,455	-0,273	-0,091	0,091	0,273	0,455	0,636	0,818	1,000
-1,000	-0,990	-0,985	-0,976	-0,955	-0,888	-0,541	0,541	0,888	0,955	0,976	0,985	0,990
-0,818	-0,993	-0,990	-0,984	-0,969	-0,921	-0,618	0,618	0,921	0,969	0,984	0,990	0,993
-0,636	-0,996	-0,994	-0,990	-0,981	-0,950	-0,711	0,711	0,950	0,981	0,990	0,994	0,996
-0,455	-0,998	-0,997	-0,995	-0,990	-0,973	-0,816	0,816	0,973	0,990	0,995	0,997	0,998
-0,273	-0,999	-0,999	-0,998	-0,996	-0,990	-0,921	0,921	0,990	0,996	0,998	0,999	0,999
-0,091	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-0,999	-0,990	0,990	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
0,091	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-0,999	-0,990	0,990	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
0,273	-0,999	-0,999	-0,998	-0,996	-0,990	-0,921	0,921	0,990	0,996	0,998	0,999	0,999
0,455	-0,998	-0,997	-0,995	-0,990	-0,973	-0,816	0,816	0,973	0,990	0,995	0,997	0,998
0,636	-0,996	-0,994	-0,990	-0,981	-0,950	-0,711	0,711	0,950	0,981	0,990	0,994	0,996
0,818	-0,993	-0,990	-0,984	-0,969	-0,921	-0,618	0,618	0,921	0,969	0,984	0,990	0,993
1,000	-0,990	-0,985	-0,976	-0,955	-0,888	-0,541	0,541	0,888	0,955	0,976	0,985	0,990

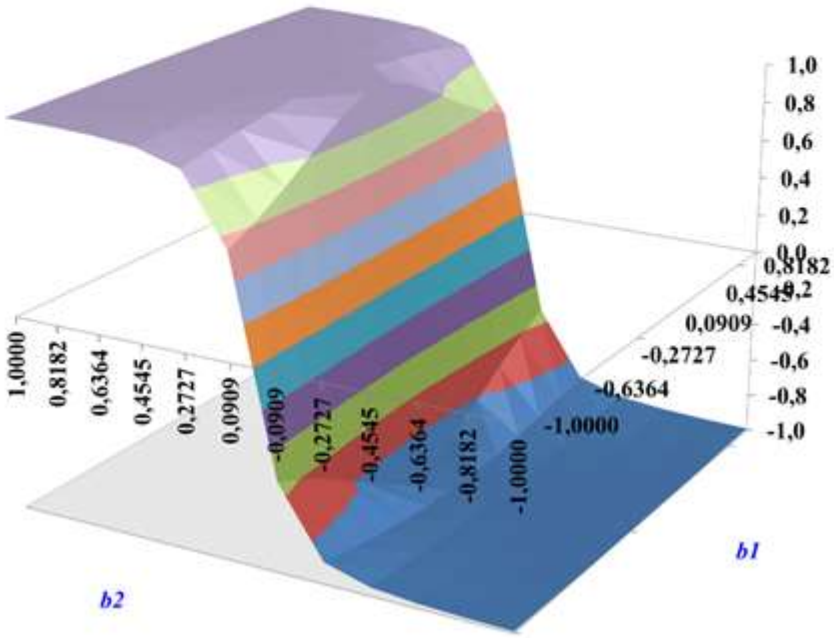


Рис. 3. Коэффициенты поликорреляции $r(Y \cdot X^2)$

Fig. 3. Polycorrelation coefficients $r(Y \cdot X^2)$

Обратим внимание на достаточно плавное изменение коэффициентов поликорреляции при изменении степеней независимой переменной.

В дальнейшем мы будем вести речь не о поликорреляционных *коэффициентах*, а о поликорреляционных *моментах*, что связано с трудностями нормировки.

Конечные разности

Для оценивания «скорости» изменения поликорреляции воспользуемся аппаратом теории конечных разностей [1]. На рис. 4 представлена схема расчета разностей «соседних» поликорреляционных моментов $\mu_{1,j} = M(Y \cdot X^j)$ для полинома порядка *n*. Здесь $(i-j)_n = \mu_{1,i} - \mu_{1,j}$.:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \mu_{1,1} & & \mu_{1,2} & & \mu_{1,3} & & \mu_{1,4} \quad \ldots \\
 & & \backslash \quad / & & \backslash \quad / & & \backslash \quad / & \\
\Delta^{(1)} & & (2-1)_n & & (3-2)_n & & (4-3)_n & \ldots \\
 & & & \backslash \quad / & & \backslash \quad / & & \\
\Delta^{(2)} & & & \begin{array}{c}(3-2)_n - \\ -(2-1)_n\end{array} & & \begin{array}{c}(4-3)_n - \\ -(3-2)_n\end{array} & & \ldots \\
 & & & & \backslash \quad / & & & \\
 & & & & \ldots & & &
\end{array}$$

Рис. 4. Схема расчета конечных разностей

Fig. 4. Computation scheme of finite differences

Используем обобщающую формулу (3.4.10) из [5, с. 115]:

$$\mu_{1,i} = \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \left(\alpha_{i+j-1} - \alpha_j \cdot \alpha_{i-1}\right), \tag{2}$$

где b_j – коэффициенты регрессионного полинома; n – порядок регрессионного полинома; α_k – начальный момент порядка k независимой переменной *X*.

Пусть n=2. Тогда

$$\begin{aligned}(2-1)_2 &= \mu_{1,2} - \mu_{1,1} = b_1 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_1 \cdot \alpha_2 - \alpha_2 + \alpha_1^2\right) + b_2 \cdot \left(\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2\right) = \\ &= b_1 \cdot \left[\left(\alpha_3 - \alpha_2\right) - \alpha_1 \cdot \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right] + b_2 \cdot \left[\left(\alpha_4 - \alpha_3\right) - \alpha_2 \cdot \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right].\end{aligned} \tag{3}$$

Для n=2 имеем:

$$\begin{aligned}(2-1)_3 &= b_1 \cdot \left[\left(\alpha_3 - \alpha_2\right) - \alpha_1 \cdot \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right] + b_2 \cdot \left[\left(\alpha_4 - \alpha_3\right) - \alpha_2 \cdot \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right] + \\ &+ b_3 \cdot \left[\left(\alpha_5 - \alpha_4\right) - \alpha_3 \cdot \left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}(3-2)_3 &= b_1 \cdot \left[\left(\alpha_4 - \alpha_3\right) - \alpha_1 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_2\right)\right] + b_2 \cdot \left[\left(\alpha_5 - \alpha_4\right) - \alpha_2 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_2\right)\right] + \\ &+ b_3 \cdot \left[\left(\alpha_6 - \alpha_5\right) - \alpha_3 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_2\right)\right].\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(3-1)_3 &= b_1 \cdot \left[\left(\alpha_4 - \alpha_2\right) - \alpha_1 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_1\right)\right] + b_2 \cdot \left[\left(\alpha_5 - \alpha_3\right) - \alpha_2 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_1\right)\right] + \\ &+ b_3 \cdot \left[\left(\alpha_6 - \alpha_4\right) - \alpha_3 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_1\right)\right].\end{aligned} \tag{6}$$

$$(3-1)_3 - (2-1)_3 = (3-2)_3. \tag{7}$$

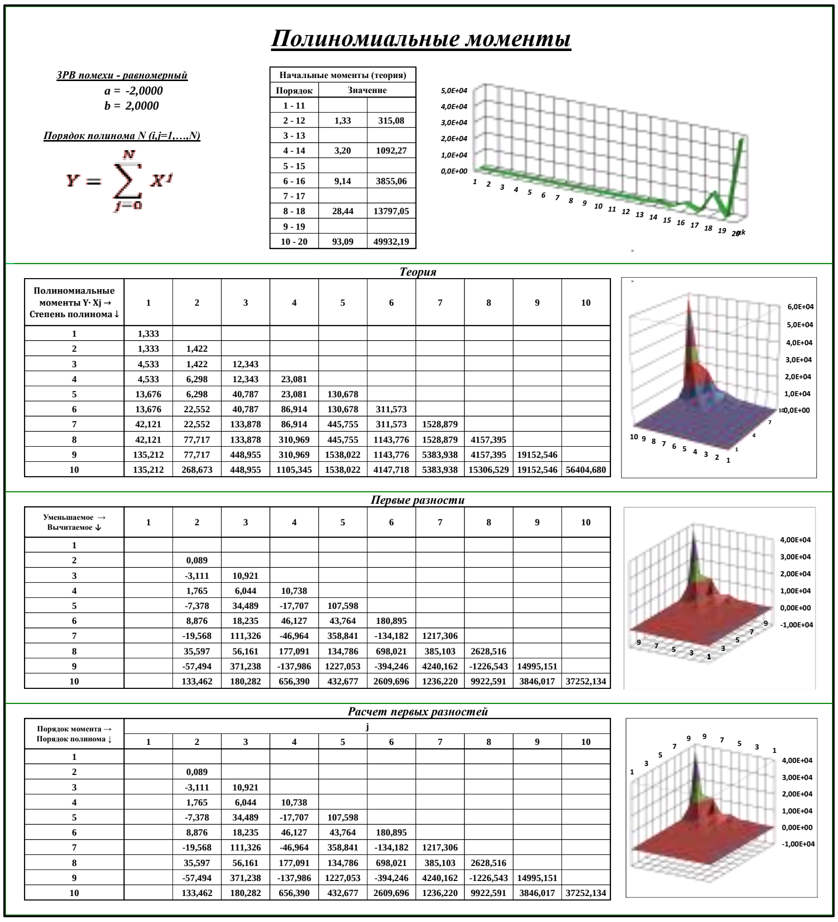
$$(3-1)_3 - (3-2)_3 = (2-1)_3. \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(3-2)_3 - (2-1)_3 &= b_1 \cdot \left[\left(\alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_3\right) - 2 \cdot \left(\alpha_3 - \alpha_1 \cdot \alpha_2\right) + \left(\alpha_2 - \alpha_1^2\right)\right] + \\ &+ b_2 \cdot \left[\left(\alpha_5 - \alpha_2 \cdot \alpha_3\right) - 2 \cdot \left(\alpha_4 - \alpha_2^2\right) + \left(\alpha_3 - \alpha_1 \cdot \alpha_2\right)\right] + \\ &+ b_3 \cdot \left[\left(\alpha_6 - \alpha_3^2\right) - 2 \cdot \left(\alpha_5 - \alpha_2 \cdot \alpha_3\right) + \left(\alpha_4 - \alpha_1 \cdot \alpha_3\right)\right].\end{aligned} \tag{9}$$

Продолжая аналогичные действия и для других n и обобщая формулы (3)–(6) и (9) получим

$$(s-k)_n = \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \left[\left(\alpha_{s+j} - \alpha_{k+j}\right) - \alpha_j \cdot \left(\alpha_s - \alpha_k\right)\right]. \tag{10}$$

На рис. 5 приведены результаты прямых (по разностям *(s-k)*) и косвенных (по формуле (10)) расчетов разностей $\Delta^{(k)}$ для равномерного в интервале [-2, +2] законом распределения вероятностей помехи, накладываемой на независимую переменную *X*. Регрессионные моменты рассчитывались для разных порядков полинома (от 1 до 10) и затем двумя вариантами определялись разности. Расчеты подтвердили правильность полученных выражений для вычисления разностей.



Начальные моменты (теория)		
Порядок	Значение	
1 - 11		
2 - 12	1,33	315,08
3 - 13		
4 - 14	3,20	1092,27
5 - 15		
6 - 16	9,14	3855,06
7 - 17		
8 - 18	28,44	13797,05
9 - 19		
10 - 20	93,09	49932,19

Теория

Полиномиальные моменты Y· Xj → Степень полинома ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,333									
2	1,333	1,422								
3	4,533	1,422	12,343							
4	4,533	6,298	12,343	23,081						
5	13,676	6,298	40,787	23,081	130,678					
6	13,676	22,552	40,787	86,914	130,678	311,573				
7	42,121	22,552	133,878	86,914	445,755	311,573	1528,879			
8	42,121	77,717	133,878	310,969	445,755	1143,776	1528,879	4157,395		
9	135,212	77,717	448,955	310,969	1538,022	1143,776	5383,938	4157,395	19152,546	
10	135,212	268,673	448,955	1105,345	1538,022	4147,718	5383,938	15306,529	19152,546	56404,680

Первые разности

Уменьшаемое → Вычитаемое ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2		0,089								
3		-3,111	10,921							
4		1,765	6,044	10,738						
5		-7,378	34,489	-17,707	107,598					
6		8,876	18,235	46,127	43,764	180,895				
7		-19,568	111,326	-46,964	358,841	-134,182	1217,306			
8		35,597	56,161	177,091	134,786	698,021	385,103	2628,516		
9		-57,494	371,238	-137,986	1227,053	-394,246	4240,162	-1226,543	14995,151	
10		133,462	180,282	656,390	432,677	2609,696	1236,220	9922,591	3846,017	37252,134

Расчет первых разностей

Порядок момента → Порядок полинома ↓	j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2		0,089								
3		-3,111	10,921							
4		1,765	6,044	10,738						
5		-7,378	34,489	-17,707	107,598					
6		8,876	18,235	46,127	43,764	180,895				
7		-19,568	111,326	-46,964	358,841	-134,182	1217,306			
8		35,597	56,161	177,091	134,786	698,021	385,103	2628,516		
9		-57,494	371,238	-137,986	1227,053	-394,246	4240,162	-1226,543	14995,151	
10		133,462	180,282	656,390	432,677	2609,696	1236,220	9922,591	3846,017	37252,134

Рис. 5. Разности для равномерного в интервале [-2, +2] закона распределения вероятностей помехи

Fig. 5. Differences for the interference probability distribution law uniform in the interval [-2, +2]

Выражения вида (3)–(6), (9) и (10) позволяют оценивать приращения поликорреляционных моментов для соседних значений показателей степени независимой переменной.

Используя (10), получаем:

$$\Delta_s^{(1)} = \big(s-(s-1)\big)_n = \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \Big[\big(\alpha_{s+j}-\alpha_{s-1+j}\big)-\alpha_j \cdot \big(\alpha_s - \alpha_{s-1}\big)\Big];$$

$$\begin{aligned}\Delta_s^{(2)} &= \big(s-(s-1)\big)_n - \big((s-1)-(s-2)\big)_n = \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \Big[\big(\alpha_{s+j}-\alpha_{s+j}\big)-2\cdot\big(\alpha_{s-1+j}-\alpha_j\cdot\alpha_{s-1}\big)+\big(\alpha_{s-2+j}-\alpha_j\cdot\alpha_{s-2}\big)\Big].\end{aligned} \quad (11)$$

. . .

В соответствии с выражением (5) из [1, с. 115]

$$\Delta^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot \mu_{1,i+1} \quad (12)$$

можно найти общее выражение для разности порядка k:

$$\Delta^{(k)} = \sum_{i=0}^{i=k} (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot \left[\sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \big(\alpha_{i+j} - \alpha_j \cdot \alpha_i\big)\right] = \sum_{j=1}^{j=n} b_j \cdot \left[\sum_{i=0}^{i=k} (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot \big(\alpha_{i+j} - \alpha_j \cdot \alpha_i\big)\right]. \quad (13)$$

Формула (13) обеспечивает возможность оценивания приращения поликорреляционных моментов для различной глубины их взаимовлияния.

Общее количество разностей 1-го порядка определяется как C_n^2 при допущении, что значения разностей $(s\text{-}k)_n$ и $(k\text{-}s)_n$ отличаются только знаками. Здесь важно понимать, что это сугубо *формальное* допущение. Но главным остается то, что выражение (13) позволяет количественно оценить изменение поликорреляционного момента для разных показателей степени независимой переменной *X*.

Количество возможных разностей порядка *k* обозначим как $N^{(k)}$. Несложно увидеть, что $N^{(k)} = C^2_{N^{(k-1)}}$, где $k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ и $N^{(0)} = n$. И, если предназначение разностей для смежных значений *s* в (10) понятно, то для не соседствующих степеней вопрос требует изучения, лежащего в попытке получения обобщающих выражений типа формулы (10). Возможность получения результатов демонстрируют соотношения (7) и (8). Способ нахождения разностей через приращения поликорреляционных моментов, представленный выражениями (11) и (13), распространяется «по горизонтали» (см. рис. 4), что позволяет описать взаимосвязи между смежными по горизонтали разностями. Соотношения (7) и (8) отражают взаимодействия разностей «по диагоналям» (см. рис. 4). Приращение поликорреляционной зависимости между приращениями $\left(\mu_{1,s} - \mu_{1,m}\right)$ и $\left(\mu_{1,s} - \mu_{1,j}\right)$ определяется приращением $\left(\mu_{1,j} - \mu_{1,m}\right)$.

Таким образом, использование аппарата теории конечных разностей позволяет провести анализ изменения поликорреляционных моментов в зависимости от показателей степени слагаемых регрессионного полинома. Соотношения (10) и (13) позволяют с использованием разностей *k*-го порядка анализировать изменения поликорреляционных моментов в зависимости от поведения начальных моментов переменной *X* регрессионного полинома порядка *n*.

Статья поступила 21.03.2016 г.

Библиографический список

1. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: учеб. пособие для вузов; в 2 т. Т. 1. М.: ГИФМЛ, 1962, 464 с.
2. Петров А.В. Моментные функции как отражение полиномиальной вероятностной зависимости // Вестник ИрГТУ. 2015. № 10 (105). С. 37–44.
3. Петров А.В. Смешанные моменты высших порядков как инструмент оценивания формы вероятностной зависимости // Вестник ИрГТУ. 2016. № 3 (110). С. 50–57.
4. Петров А.В. Поликорреляция: определения и направления исследований // Вестник ИрГТУ. 2016. № 4 (111). С. 118–125.
5. Петров А.В. Основы теории полиномиальных стохастических взаимосвязей. Иркутск: Изд-во ИРНИТУ, 2016. 170 с.

References

1. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychislenii* [The methods of calculations]. Moscow, GIFML Publ., 1962. 464 p.
2. Petrov A.V. Momentnye funktsii kak otrazhenie polinomial'noi veroiatnostnoi zavisi-mosti [Moment functions as polynomial probabilistic dependence reflection]. *Vestnik IrGTU – Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2015, no. 10 (105), pp. 37–44.
3. Petrov A.V. Smeshannye momenty vysshikh poriadkov kak instrument otsenivaniia formy veroiatnostnoi zavisimosti [On approaches to the probabilistic analysis of permutable procedures of random process generation]. *Vestnik IrGTU – Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 2016, no. 3 (110), pp. 50–57.
4. Petrov A.V. Polikorreliatsiia: opredeleniia i napravleniia issledovanii [Polycorrelation: definitions and research directions]. *Vestnik IrGTU – Proceedings of Irkutsk State Technical University.* 2016, no. 4 (111), pp. 118–125.
5. Petrov A.V. *Osnovy teorii polinomial'nykh stokhasticheskikh vzaimosviazei* [The fundamentals of the theory of polynomial stochastic interdependence]. Irkutsk, IRNITU Publ., 2016. 170 p.