

Тарасова В.В.¹, Тарасов В.Е.² ©

¹Бакалавр, Экономический факультет,

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;

²Доктор физико-математических наук,

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

ЭЛАСТИЧНОСТЬ ВНЕБИРЖЕВОГО КАССОВОГО ОБОРОТА ВАЛЮТНОГО РЫНКА РФ

Аннотация

В статье анализируется эластичность внебиржевого кассового оборота (спот) валютного рынка РФ в зависимости от средневзвешенного курса рубля к доллару США. Сравниваются два пятимесячных периода с августа по декабрь в 2014 и 2015 годах. Показывается необходимость обобщения понятия точечной эластичности для учета наличие у покупателей памяти об изменениях спроса на валюту и курса рубля в течение некоторого интервала времени. Предлагается упрощенная однопараметрическая модель затухания памяти на конечном интервале времени. Для математического описания степенного характера затухающей памяти были использованы производные нецелых порядков.

Ключевые слова: эластичность спроса, затухающая память, валютный спот.

Keywords: elasticity of demand, damped memory, currency spot.

Введение

Одним из важнейших экономических индикаторов является эластичность спроса по цене. Данный индикатор показывает относительное изменение спроса в зависимости от изменения цены при неизменности других факторов. Точечная эластичность характеризует относительное изменение величины спроса при бесконечно малом изменении цены. В стандартном определении точечной эластичности игнорируется возможное влияние эффектов памяти. Стандартная точечная эластичность спроса при цене $P = P_0$ часто определяется уравнением

$$E_1(Q(P); t_0) = \left(\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dP} \right)_{P=P_0}, \quad (1)$$

где Q – величина спроса и P – цена товара. В общем случае, спрос и цена зависят от времени, то есть Q и P являются функциями от переменной $t \in [t_i; t_f]$. Рассматривая спрос и цену как функции времени, точечную эластичность спроса от цены следует определить формулой

$$E_2(Q; P; t_0) = \left(\frac{P(t)}{Q(t)} \frac{dQ(t)/dt}{dP(t)/dt} \right)_{t=t_0}. \quad (2)$$

Используя формулу производной логарифма $d \ln Q(t)/dt = (1/Q(t))(dQ(t)/dt)$, точечную эластичность можно также определять формулой

$$E_3(Q(t); P(t); t_0) = \left(\frac{d \ln Q(t)/dt}{d \ln P(t)/dt} \right)_{t=t_0}. \quad (3)$$

Если спрос может быть представлен как однозначная функция цены, то используя правило дифференцирования сложной функции $dQ(P(t))/dt = (dQ(P)/dP)(dP(t)/dt)$, получим, что эластичности, определенные формулами (1) и (2) будут равны $E_2(Q(t); P(t); t_0) = E_1(Q(P(t)); t_0)$.

Неоднозначность зависимости спроса от цены

В общем случае спрос не может быть представлен как однозначная функция цены. Поэтому формула (1) не может быть использована в общем случае. Приведем примеры того, что спрос $Q(t)$ не является однозначной функцией цены $P(t)$. Для этого рассмотрим как внебиржевой кассовый оборот (спот) валютного рынка РФ $Q(t)$ зависит от средневзвешенного курса $P(t)$, используя данные Центрального Банка РФ [1, 2]. На основе этих данных были построены параметрические кривые, задаваемые системой из двух уравнений, $y=Q(t)$, $x=P(t)$, где в качестве параметра t рассматривалось время в сутках. По оси X – средневзвешенный курс рубля к доллару США с расчетами «сегодня» [1]. По оси Y – внебиржевой кассовый оборот валютного рынка РФ (SPOT с резидентами RUB/USD в млн. долл. США) [2]. Мы ограничились двумя пятидесятидневными периодами времени: (а) с августа по декабрь 2014 года; (б) с августа по декабрь 2015 года. Используя метод наименьших квадратов для интерполяции полиномами десятой степени и применяя программный пакет Maple, были получены следующие функции. Для 2014 года полиномиальные функции спроса $Q(2014, t)$ и цены $P(2014, t)$ получены в виде

$$Q(2014, t) = 2479.490348 - 304.7498652 * t + 34.91275347 * t^2 - 0.2166880189 * t^3 - 0.1408467699 * t^4 + 0.008588468166 * t^5 - 0.0002376445637 * t^6 + 3.647213249 * 10^{-6} * t^7 - 3.199713195 * 10^{-8} * t^8 + 1.504359827 * 10^{-10} * t^9 - 2.944398181 * 10^{-13} * t^{10}; \quad (4)$$

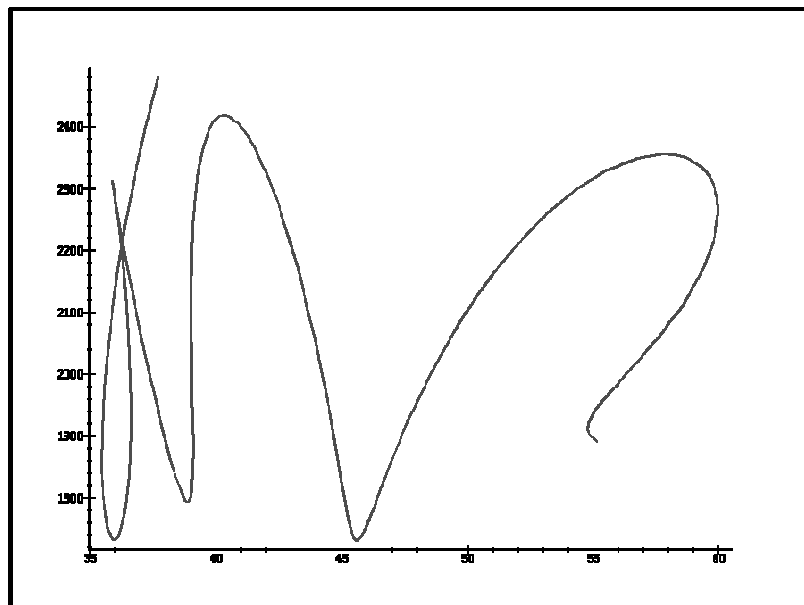
$$P(2014, t) = 37.68280714 - 1.928032765 * t + 0.5739741809 * t^2 - 0.07258253088 * t^3 + 0.004809715872 * t^4 - 0.0001846543421 * t^5 + 4.324952685 * 10^{-6} * t^6 - 6.266973532 * 10^{-8} * t^7 + 5.479324672 * 10^{-10} * t^8 - 2.646678193 * 10^{-12} * t^9 + 5.419992687 * 10^{-15} * t^{10}. \quad (5)$$


Рис. 1. Параметрические кривые спроса и цены в августе-декабре 2014 года (интерполяция полиномами десятой степени). По оси X отложена цена (5), а по оси Y отложен спрос (4).

Для 2015 года полиномиальные функции спроса и цены имеют вид

$$Q(2015, t) = 4140.876108 + 278.9093363 * t - 91.99033320 * t^2 + 10.19655765 * t^3 - 0.5698463739 * t^4 + 0.01835350222 * t^5 - 0.0003607159104 * t^6 + 4.389689414 * 10^{-6} * t^7 - 3.225700105 * 10^{-8} * t^8 + 1.310646824 * 10^{-10} * t^9 - 2.260405598 * 10^{-13} * t^{10}; \quad (6)$$

$$P(2015, t) = 68.38928485 - 4.850145825 * t + 1.218472272 * t^2 - 0.1278480171 * t^3 + 0.007265994501 * t^4 - 0.0002469893802 * t^5 + 5.234722093 * 10^{-6} * t^6 - 6.966569812 * 10^{-8} * t^7 + 5.654989867 * 10^{-10} * t^8 - 2.557498117 * 10^{-12} * t^9 +$$

$$4.938010916 * 10^{-15} * t^{10} .$$

(7)

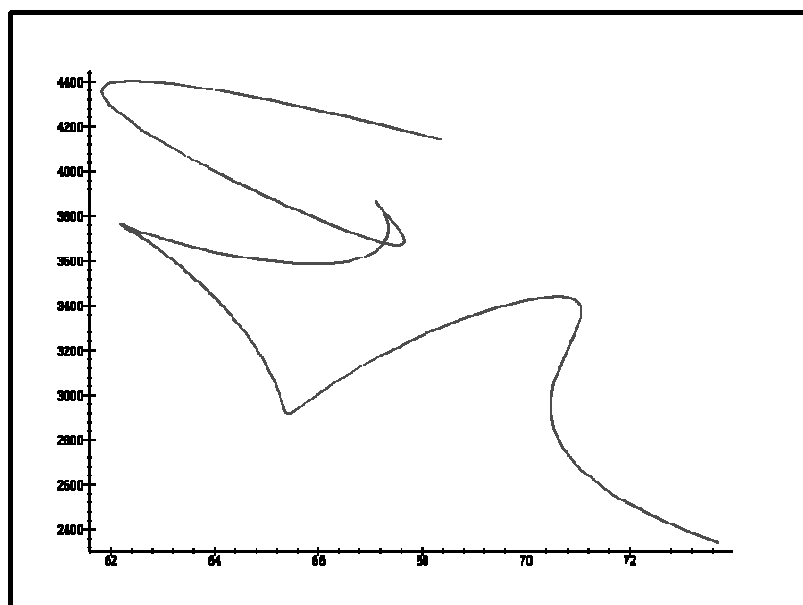


Рис. 2. Параметрические кривые спроса и цены в августе-декабре 2015 года (интерполяция полиномами десятой степени). По оси X отложена цена (7), а по оси Y отложен спрос (6).

Отметим, что при выборе для интерполяции полиномов пятой степени вместо десятой, неоднозначность функции уменьшается (см. Рис. 3). При выборе линейной интерполяции цены очевидно неоднозначность исчезает полностью.

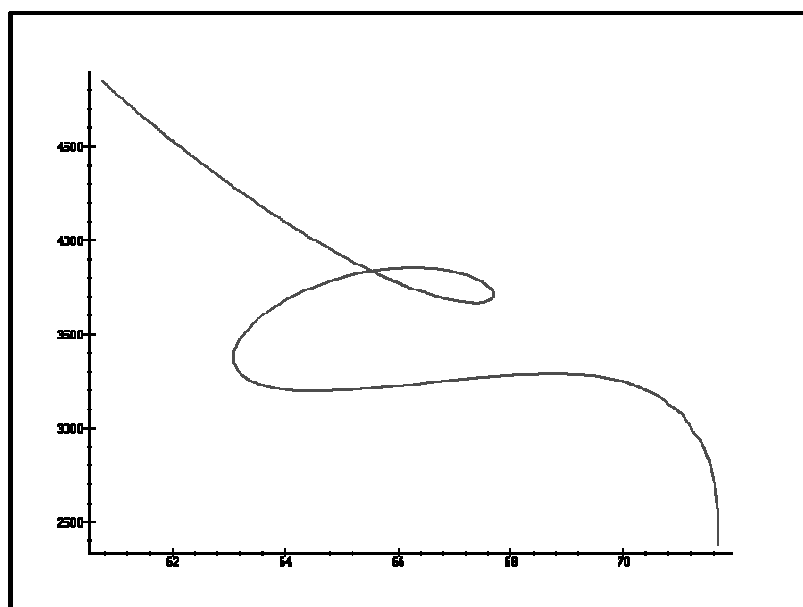


Рис. 3. Параметрические кривые спроса и цены в августе-декабре 2015 года (интерполяция полиномами пятой степени).

В случаях неоднозначной зависимости спроса от цены, нельзя использовать формулу (1). В этих случаях следует использовать формулы, содержащие явные зависимости спроса и цены от

времени, то есть формулы (2) и (3) вместо (1). Поскольку спрос и цена являются однозначными функциями времени, то применение формул (2) и (3) даст более адекватный результат.

Наличие памяти об изменениях спроса и цены

Важнейшим условием применимости формул (2) и (3), задающих точечную эластичность, является предположение, что эластичность спроса зависит только от цены в момент времени $t = t_0$ и в бесконечно малой окрестности t_0 . В общем случае, спрос может зависеть от всех изменений цены и спроса в течение некоторого прошедшего интервала времени. Это обусловлено тем, что поведение покупателей может определяться наличием у них памяти о предыдущих изменениях спроса и цены. Можно сказать, что формулы (2)-(3) применимы только при условии, что все покупатели обладают полной амнезией. Очевидно, что данное приближение не всегда можно использовать.

Известно, что производные и интегралы нецелых порядков [3, 4] позволяют описывать динамику систем и процессов, характеризующихся памятью и нелокальностью [5]. Различные модели финансовых и экономических процессов, которые базируются на применении производных и интегралов нецелого порядка, недавно были предложены в работах [6]-[10]. Производные нецелого порядка обладают набором нестандартных свойств [11]-[14]. Например, нарушение стандартного правила Лейбница (правила дифференцирования произведения) является характеристическим свойством всех типов производных нецелого порядка [11, 12]. Стандартное выражение для дифференцирования сложной функции (производной композиции двух функций) также нарушается [14].

В недавних статьях [15, 16] было предложено использовать производные нецелого порядка для описания экономических индикаторов для учета эффектов памяти. Применение этого математического аппарата позволяет устранить амнезию покупателей в стандартной концепции эластичности.

При обобщении формул точечной эластичности (2) и (3) следует учитывать, что правило дифференцирования сложной функции для производных нецелого порядка существенно усложняется [14]. В результате обобщения формул (2) и (3) становятся неэквивалентными. При обобщении формулы (2), учитывающем разные показатели затухания памяти по спросу (α) и цене (β), возникает произвол, связанный с множителями, находящимися вне производных. В связи с этим, более адекватное обобщение точечной эластичности на случай степенной памяти будет получаться при использовании формулы (3). В этом случае, для упрощения вычислений производных нецелого порядка, перед интерполяцией полиномами следует прологарифмировать данные, чтобы получать полиномиальные функции вида

$$\ln Q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_n t^n, \ln P(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_n t^n. \quad (8)$$

Применение производных нецелого порядка по времени позволяет описывать процессы с памятью. Важнейшей особенностью памяти является свойство ее затухания (угасание памяти). Для упрощения мы будем полагать, что существует по одному параметру для спроса (α) и для цены (β), которые характеризуют степень угасания памяти об изменениях спроса и цены с течением времени соответственно. Другими словами, мы используем предположение, что затухание памяти может описываться одним параметром, который характеризует степенное затухание памяти об изменениях рассматриваемой величины.

Определение эластичности спроса с памятью

Определим обобщение точечной эластичности (3) на случай наличия у покупателей памяти об изменениях спроса и цены на товар. В нашей статье, в качестве товара будет рассматриваться валюта. Рассмотрим спрос Q и цену P как функции времени $t \in [t_i; t_f]$. В общем случае, временной параметр не может быть исключен в системе $Q = Q(t)$ и $P = P(t)$ для получения явной зависимости Q от P в форме однозначной функции $Q(P)$. Отсутствие памяти

(амнезия) означает, что величина спроса $Q(t)$ в момент времени $t = t_0 \in [t_i; t_f]$ определяется только ценой $P(t)$ в тот же момент времени $t = t_0$ и в инфинитезимальной окрестности $t = t_0$. Наличие памяти означает, что величина спроса $Q(t)$ зависит от значений цены $P(t)$ во все моменты времени t из конечного интервала $[t_i; t_f]$.

Существует много различных типов производных нецелого порядка, предложенных Риманом, Лиувиллем, Риссом, Капуто, Летником, Маршо, Сониным, Вейлем [1, 2]. В данной статье мы используем производную Капуто. Основной отличительной особенностью этой производной является то, что её действие на постоянную функцию дает ноль. Использование производной Капуто приводит к тому, что эластичность постоянного спроса будет равна нулю. В результате постоянный спрос при наличии памяти может интерпретироваться как совершенно неэластичный спрос (спрос не меняется при изменении цены).

Определение 1. Пусть величина спроса $Q = Q(t)$ и цена $P = P(t)$ являются функциями времени $t \in [t_i; t_f]$. Тогда эластичность $E_{ln,\alpha,\beta}(Q(t); P(t); [t_i, t_0])$ спроса с памятью в момент времени $t = t_0$ определяется уравнением

$$E_{ln,\alpha,\beta}(Q(t); P(t); [t_i, t_0]) := \frac{{}_t^C D_{t_0}^\alpha [t] \ln Q(t)}{{}_t^C D_{t_0}^\beta [t] \ln P(t)}, \quad (9)$$

где ${}_t^C D_{t_0}^\alpha [t]$ и ${}_t^C D_{t_0}^\beta [t]$ – левосторонние производные Капуто порядков α и β , которые определяется выражением

$${}_t^C D_{t_0}^\alpha [t] f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{(t_0-t)^{1-n+\alpha}} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t), \quad (10)$$

где $t \in [t_i, t_0]$, и $t_i < t_0 < t_f$. Параметр α характеризует затухание памяти об изменениях спроса, а параметр β характеризует затухание памяти об изменениях цены.

Предлагаемое обобщение эластичности нельзя рассматривать как точечную эластичность, поскольку предлагаемый экономический индикатор зависит от конечного интервала времени $[t_i; t_0]$, а не только от t_0 . В предлагаемом обобщении учитывается зависимость спроса в момент времени t не только от спроса $Q(t)$ и цены $P(t)$ в этот момент времени, но и от их изменений на конечном интервале времени. Формула (9) описывает эластичность спроса для процессов в экономических системах с памятью. Этот индикатор позволяет учитывать, что покупатели помнят какие цена и спрос на данный товар были ранее. Уравнение (9) учитывает зависимость величины спроса $Q(t_0)$ не только от цены $P = P(t_0)$ в момент времени t_0 , но и от спроса $Q(t)$ и цены $P(t)$, которые были до этого момента времени, то есть для $t \in [t_i; t_0]$.

В простейшем случае, можно рассматривать обобщение эластичности с одним параметром ($\alpha = \beta$) для описания затухания памяти об изменении спроса $Q(t)$ и цены $P(t)$ в предыдущие моменты времени $t \in [t_i; t_0]$ для рассматриваемого товара, предполагая, что у покупателей эта информация хранится и стирается одновременно, будучи привязанной к каждому товару, а не и к величинам (цене, спросу).

Для случая отсутствия памяти ($\alpha = 1, \beta = 1$), уравнение (9) дает стандартное выражения (3), в котором эластичность не зависит от времени и цены вне бесконечно малой окрестности t_0 . Это означает, что случай ($\alpha = 1, \beta = 1$) соответствует процессам без памяти. Другими словами, стандартная точечная эластичность спроса описывает экономическое поведение покупателей, обладающих амнезией.

Приведем некоторые полезные свойства левосторонней производной Капуто порядка α , полезные для вычисления эластичностей спроса с памятью.

1) Левосторонняя производная Капуто является линейным оператором.

2) Производные Капуто нецелого порядка для степенной функции задаются (см. Свойство 2.16 в книге [4]) уравнениями

$${}_t^C D_t^\alpha (t - t_i)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t - t_i)^{\beta-\alpha}, \quad (t > t_i, n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \quad (11)$$

$${}_t^C D_t^\alpha (t - t_i)^k = 0, (k = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (12)$$

Для случая $t_i = 0$, можно использовать

$${}_0^C D_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}, (t > 0, n - 1 < \alpha < n, \beta > n - 1), \quad (13)$$

$${}_0^C D_t^\alpha t^\alpha = \Gamma(\alpha + 1), ({}_0^C D_t^\alpha)^n t^\alpha = 0, \quad {}_0^C D_t^\alpha 1 = 0. \quad (14)$$

3) Производной Капуто нецелого порядка, при действии на произведение функций, нарушает стандартное правило Лейбница (правило дифференцирования произведения функций). Отметим, что это неравенство является основным характеристическим свойством всех типов производных нецелых порядков [11, 12].

4) Производная Капуто нецелого порядка при действии на сложную функцию (на композицию двух функций) нарушает стандартное правило дифференцирования сложной функции [14].

5) В общем случае, повторное действие производной нецелого порядка α не равно действию производной порядка 2α . Это означает, что полугрупповое свойство выполняется не для всех типов функций, для которых эти производные существуют. Равенство реализуется только для узкого класса функций [2].

Свойства и примеры вычисления эластичности спроса с памятью

Приведем основные свойства предлагаемой эластичности (9) спроса с памятью. Для простоты опишем эти свойства для случая $t_i = 0$.

1. Эластичности с памятью являются безразмерными экономическими индикаторами,

$$E_{\ln, \alpha, \beta}(\lambda Q(t); P(t); [0, t_0]) = E_{\ln, \alpha, \beta}(Q(t); P(t); [0, t_0]), \quad (15)$$

$$E_{\ln, \alpha, \beta}(Q(t); \lambda P(t); [0, t_0]) = E_{\ln, \alpha, \beta}(Q(t); P(t); [0, t_0]). \quad (16)$$

Эти уравнения означают, что эластичности не зависят от того в каких единицах измеряется спрос Q и цена P .

3. Эластичность $E_{\ln, \alpha, \beta}$ для произведения двух функций, зависящих от одного и того же аргумента, равна сумме эластичностей

$$E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_1(t) \cdot Q_2(t); P(t); [0, t_0]) = E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_1(t); P(t); [0, t_0]) + E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_2(t); P(t); [0, t_0]). \quad (17)$$

4. В общем случае, для эластичности $E_{\ln, \alpha, \beta}$ нецелого порядка для суммы двух функций верно неравенство

$$E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_1(t) + Q_2(t); P(t); [0, t_0]) = \frac{1}{Q_1 + Q_2} (Q_1(t) E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_1(t); P(t); [0, t_0]) + Q_2(t) E_{\ln, \alpha, \beta}(Q_2(t); P(t); [0, t_0])). \quad (18)$$

5. Эластичность нецелого порядка для постоянного спроса равна нулю

$$E_{\ln, \alpha, \beta}(\text{const}; P(t); [t_i, t_0]) = 0, \quad (19)$$

что соответствует совершенно неэластичному спросу.

Все приведенные свойства эластичностей спроса с памятью напрямую вытекают из свойств производной Капуто и определением эластичности (9).

Приведем примеры вычисления предложенной эластичности.

Пример 1. Рассмотрим спрос и цену как функции времени

$$\ln Q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2, \quad \ln P(t) = p_1 t + p_0. \quad (20)$$

Вычислим эластичность (9) для случая $t_i = 0$ и $\alpha = \beta \in (0; 1)$. Используя

$${}_0^C D_t^\alpha \ln Q(t) = q_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + q_2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha}, \quad (21)$$

$${}_0^C D_t^\alpha \ln P(t) = p_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}. \quad (22)$$

Подстановка выражений (21) и (22) в уравнение (9) дает эластичность

$$E_{\ln, \alpha, \alpha}((Q(t); P(t); [0, t_0])) = \frac{{}_0^C D_t^\alpha \ln Q(t)}{{}_0^C D_t^\alpha \ln P(t)} = \frac{q_1}{p_1} + \frac{2}{(2-\alpha)} \frac{q_2}{p_1} t, \quad (23)$$

где использовали $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$.

Пример 2. Рассмотрим логарифмы спроса и цены в виде степенных функций $\ln Q(t) = a t^\beta$, и $\ln P(t) = b t^\gamma$. В этом случае эластичность записывается в виде

$$E_{\ln, \alpha, \alpha}(Q(t); P(t); [0, t_0]) = \frac{{}_0^C D_t^\alpha \ln Q(t)}{{}_0^C D_t^\alpha \ln P(t)} = \frac{a \Gamma(\beta+1) \Gamma(\gamma+1-\alpha)}{b \Gamma(\gamma+1) \Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\gamma}. \quad (24)$$

Для $\alpha = 1$, выражение (24) совпадает со стандартным выражением (3), т.е.

$$E_{\ln, \alpha, \alpha}(Q(t); P(t); [0, t_0]) = E_3(Q(t); P(t); t_0) \quad (25)$$

поскольку $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$.

Пример 3. Рассмотрим спрос и цену в виде степенных функций вида $Q(t) = a t^\beta$, и $P(t) = b t^\gamma$. В этом случае эластичность записывается в виде

$$E_{\ln, \alpha, \alpha}(Q(t); P(t); [0, t_0]) = \frac{{}_0^C D_t^\alpha \ln Q(t)}{{}_0^C D_t^\alpha \ln P(t)} = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (26)$$

Видно, что эластичность не зависит от параметров a и b .

Эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ

Будем исходить из предположения, что в 2014 году интенсивный рост курса рубля был впервые за последние шесть лет, поэтому в 2014 году не следует учитывать эффекты памяти. Покупатели практически забыли о предыдущих изменениях курса рубля к доллару. При этом для описания спроса на валюту в 2015 году следует учитывать эффекты памяти. Можно предполагать, что покупатели помнили недавнее поведение обменного курса, и учитывали, что, например, за интенсивным ростом ранее последовало снижение обменного курса. Это привело к уменьшению по модулю старшего коэффициента в интерполяционном приближении квадратичными функциями. При приблизительной одинаковости интервалов интенсивных изменений, моделируемых квадратичными функциями, величины изменения спроса будут определяться отношением старших коэффициентов. Свободные коэффициенты определяют нормировку и не влияют на величину эластичности, поскольку производная от константы равна нулю.

Используя метод наименьших квадратов для интерполяции полиномами второй степени, для внебиржевого кассовый оборот (спот) валютного рынка в периоды с августа по декабрь 2014 и 2015 годов соответственно [1, 2], получаем квадратичные функции

$$Q_{2;2014}(t) = 0.09272151628 * t^2 + 9.182797780 * t + 1901.070451, \quad (27)$$

$$Q_{2;2015}(t) = -0.1454640975 * t^2 + 1.519777888 * t + 3913.878051. \quad (28)$$

Определим масштабно-инвариантную производную порядка α формулой

$$({}_0^C D_t^\alpha Q)(t) = \Gamma(2-\alpha) t^{\alpha-1} {}_0^C D_t^\alpha Q(t). \quad (29)$$

Отметим, что эластичность спроса не измениться, если в определении использовать масштабно-инвариантные производные D_t^α вместо производных ${}_0^C D_t^\alpha$. Показатель затухания памяти, задающий порядок производной по времени для спроса, определим из квадратичной интерполяции спроса с помощью формулы

$$({}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2015})(t) - ({}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2015})(0) = ({}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2014})(t) - ({}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2014})(0). \quad (30)$$

Используя выражения

$${}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2014}(t) = q_{1;2014} + 2q_{2;2014}t, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha Q_{2;2015}(t) &= q_{1;2015} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha} + q_{2;2015} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} = \\ &= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(q_{1;2015} + \frac{2q_{2;2015}}{(2-\alpha)} t \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Получаем формулу для показателя затухания памяти

$$\alpha = 2 - \frac{q_{2;2015}}{q_{2;2014}}. \quad (33)$$

Из уравнений (27) и (28) получаем значения

$$q_{2;2014} = -0.09272151628, q_{2;2015} = -0.1454640975. \quad (34)$$

Подставляя (34) в уравнение (33), получаем

$$\alpha = 0.4311721453. \quad (35)$$

Используя полученную величину показателя затухания памяти, рассмотрим другие интерполяции. Для интерполяции полиномами пятой степени, получаем следующую функцию для внебиржевого кассовый оборот (спот) валютного рынка в периоды с августа по декабрь 2015 года:

$$\ln Q_{5;2005}(t) = -6.924643930 * 10^{-9} * t^5 + 1.738099722 * 10^{-6} * t^4 - 1.557697244 * 10^{-4} * t^3 + 0.005954872844 * t^2 - 0.09262010910 * t + 8.633205123. \quad (39)$$

И линейной интерполяцией логарифма средневзвешенный курс рубля к доллару США с расчетами «сегодня»,

$$\ln P_{5;2005}(t) = -0.0005364056788 * t + 4.163367393. \quad (40)$$

Для упрощения рассмотрим случай эластичности при $\beta = \alpha$ и $t_i = 0$. Для найденного значения показателя ($\alpha = 0.4311721453$) получаем эластичность внебиржевого кассового оборота (спот) доллара США на валютном рынке РФ в период с августа по декабрь 2015 в следующем виде

$$E_{\ln, \alpha, \alpha}(Q(t); P(t); [0, t]) = 1659.911474 * t^{-0.5688278547} * (-1.420233362 * 10^{-8} * t^4 + 3.257404891 * 10^{-6} * t^3 - 2.604628057 * 10^{-4} * t^2 + 0.008526070163 * t - 0.1040224299). \quad (41)$$

Приведем графики этой эластичности (41) на Рис.4-5.

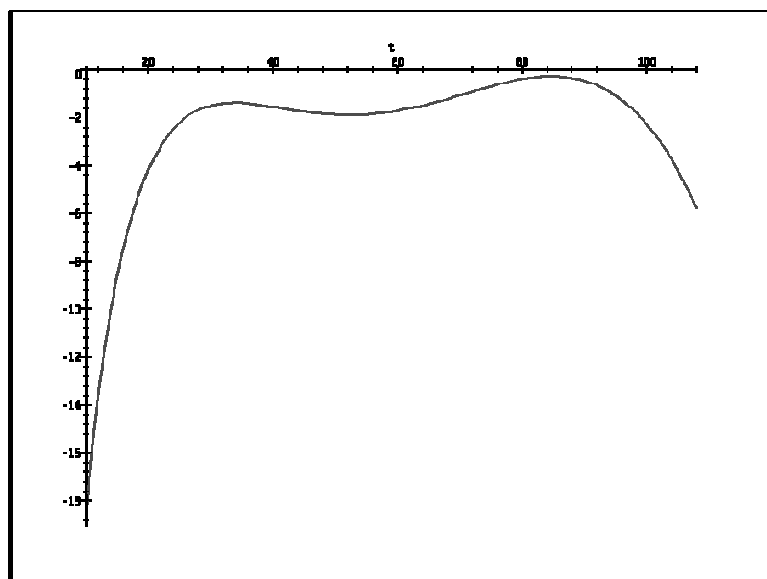


Рис. 4. Эластичность внебиржевой кассового оборота (спот) доллара США на валютном рынке РФ в период с 14 августа по декабрь 2015 включительно (т.е. для интервала (10;108)).

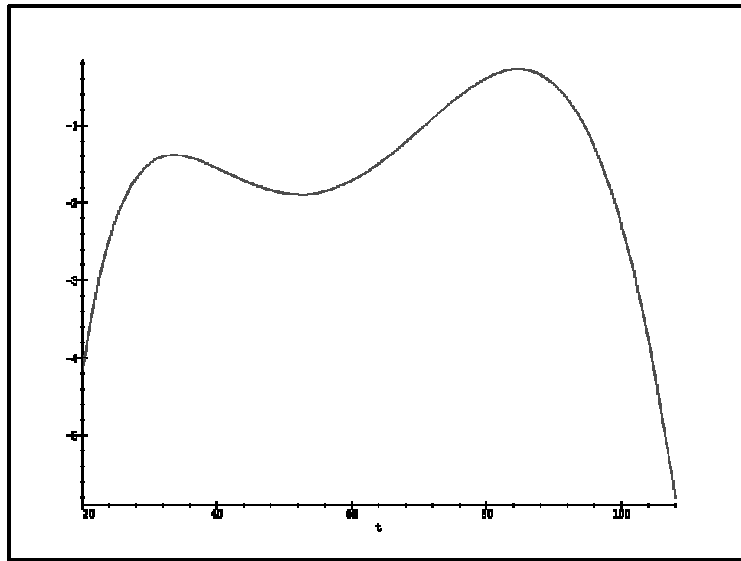


Рис. 5. Эластичность внебиржевой кассового оборота (спот) доллара США на валютном рынке РФ в период с сентября по декабрь 2015 включительно (т.е. для интервала (20;108)).

Заключение

В данной статье рассматривается эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ в два пятимесячных (с августа по декабрь) периода. Показана неоднозначность функции спроса (внебиржевого кассового оборота) от цены (курса рубля к доллару). Предложены обобщения точечной эластичности спроса по цене, в которых учитывается, что покупатели обладают памятью и могут помнить, как менялся спрос и цена ранее. Предлагаемый экономический индикатор описывает зависимость спроса не только от текущего курса рубля к доллару, но и от изменения курса и внебиржевого кассового оборота в некотором интервале времени. Мы полагаем, что стандартная точечная эластичность спроса от цены не отражает важные элементы реального поведения покупателей валюты. Можно сказать, что точечная эластичность применима только, когда все покупатели валюты обладают полной амнезией и ничего не помнят из того, что происходило с курсом рубля к доллару и спросом на валюту (внебиржевым кассовым оборотом) ранее. В предлагаемой нами модели учитывается, что спрос может зависеть от того, как менялась курс валюту и спрос на неё в течение некоторого интервала времени. При описании поведения покупателей валюты следует учитывать, что они могут помнить эти изменения. В качестве математического инструмента нами использовалась теория производных нецелого порядка. Предлагаемый подход может быть применен для определения и других экономических индикаторов, учитывающих эффекты памяти. Мы предполагаем, что использование предложенного подхода к описанию поведения покупателей с памятью, может давать более адекватные описанию экономических процессов.

Литература

1. Динамика курсов доллара США и евро к рублю и показатели биржевых торгов // Центральный банк Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cbr.ru/hd_base/?PrtId=micex_doc
2. Внебиржевой кассовый оборот валютного рынка Российской Федерации // Центральный банк Российской Федерации. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cbr.ru/hd_base/Default.aspx?PrtId=vko
3. Самко, С.Г.; Килбас, А.А.; Марычев, О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. – 688с.
4. Kilbas, A.A.; Srivastava, H.M.; Trujillo, J.J. Theory and Applications of Fractional Differential. Equations.

Amsterdam: Elsevier, 2006. – 540с.

5. Tarasov, V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2011. – 505с.
6. Scalas, E.; Gorenflo, R.; Mainardi, F. Fractional calculus and continuous-time finance // *Physica A*. – 2000. – Vol.2 84. – № 1-4. – P. 376-384.
7. Laskin, N. Fractional market dynamics // *Physica A*. – 2000. – Vol. 287. – № 3. – P. 482-492.
8. Meerschaert, M.M.; Scalas, E. Coupled continuous time random walks in finance // *Physica A*. – 2006. – Vol. 370. – № 1. – P. 114-118.
9. Skovranek, T.; Podlubny, I.; Petras, I. Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach // *Economic Modelling*. – 2012. – Vol. 29. – № 4. – P. 1322-1327.
10. Tenreiro Machado, J.A.; Mata, M.E. A fractional perspective to the bond graph modelling of world economies // *Nonlinear Dynamics*. – 2015. – Vol. 80. – № 4. – P. 1839-1852.
11. Tarasov, V.E. No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2013. – Vol. 18. – № 11. – P. 2945-2948.
12. Tarasov, V.E. Leibniz rule and fractional derivatives of power functions // *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. – 2016. – Vol. 11. – № 3. – P. 031014. 4 с.
13. Ortigueira, M.D.; Tenreiro Machado, J.A. What is a fractional derivative? // *Journal of Computational Physics*. – 2015. – Vol. 293. – P. 4-13.
14. Tarasov, V.E. On chain rule for fractional derivatives // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2016. – Vol. 30. – № 1-3. – P. 1-4.
15. Tarasova, V.V.; Tarasov V.E. Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach // *Fractional Differential Calculus*. – 2016. – Vol. 6. – № 2. – P. 219-232.
16. Тарасова, В.В.; Тарасов, В.Е. Ценовая эластичность спроса с памятью // *Экономика, Социология и Право*. – 2016. – № 4-1. – С. 98-106.