

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.865

У.В. Андреева, Н.С. Демин, Е.В. Ерофеева

ОПЦИОН ПРОДАЖИ НА ОСНОВЕ МИНИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ЦЕНЫ РИСКОВОГО АКТИВА С ФИКСИРОВАННОЙ ЦЕНОЙ ИСПОЛНЕНИЯ

Рассматривается задача нахождения цены опциона, портфеля (хеджирующей стратегии) и капитала на диффузионном (B, S) -финансовом рынке европейского типа с фиксированной ценой исполнения, когда в качестве цены рискованного актива используется ее минимальное значение в рассматриваемом временном периоде. Исследуются свойства решения.

Ключевые слова: опцион, портфель, капитал, хеджирование.

Опцион представляет собой контракт, по которому покупатель опциона приобретает право покупки или продажи некоторого оговоренного в контракте базисного рискованного актива по оговоренной цене, а продавец опциона за премию, которая является ценой опциона, обязан исполнить требование покупателя при предъявлении опциона к исполнению. В первом случае имеем опцион купли, а во втором – опцион продажи. Стандартные платежные функции этих опционов характеризуются ценой исполнения и ценой базисного актива в момент исполнения [1 – 4]. С развитием рынка опционных контрактов стали появляться дополнительные требования к платежным обязательствам, что породило класс экзотических опционов [5 – 7]. Важным частным случаем подобных опционов являются опционы, основанные на учете экстремальных значений цены базисного актива. В [8] рассмотрен опцион купли на основе максимального значения цены. В данной работе для диффузионного (B, S) -финансового рынка европейского типа приводится полное исследование задачи хеджирования опциона продажи, основанного на минимальном значении цены рискованного актива, в случае выплаты дивидендов по рискованным активам.

1. Постановка задачи

Рассмотрение задачи проводится на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = (F_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ [1 – 3]. На финансовом рынке обращаются рискованные (акции) и безрисковые (банковский счет, государственные облигации) активы, текущие цены которых S_t и B_t в течение интервала времени $t \in [0, T]$ определяются уравнениями

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс, $\sigma > 0, r > 0, S_0 > 0, B_0 > 0$, решения которых имеют вид

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}, \quad B_t = B_0 \exp \{ rt \}. \quad (2)$$

Считаем, что текущее значение капитала инвестора X_t определяется в виде

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t, \quad (3)$$

где $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ есть пара F_t -измеримых процессов, составляющая портфель ценных бумаг инвестора. Аналогично [9, § 6] предполагается, что за обладание акциями происходят выплаты дивидендов в соответствии с процессом D_t со скоростью $\delta \gamma_t S_t$, пропорциональной рискованной части капитала с коэффициентом δ , таким, что $0 \leq \delta < r$, т.е. $dD_t = \delta \gamma_t S_t dt$. Тогда изменения капитала в задаче с дивидендами происходит в виде

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + dD_t. \quad (4)$$

Так как

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t + B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t, \quad (5)$$

то

$$B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = dD_t. \quad (6)$$

Условие (6) является балансовым соотношением, которое заменяет условие самофинансируемости $B_t d\beta_t + S_t d\gamma_t = 0$ в стандартной задаче без дивидендов. Тогда капитал определяется уравнением [9]

$$dX_t = rX_t dt + \sigma \gamma_t S_t dW_t^{\mu-r+\delta}, \quad (7)$$

где процесс

$$W_t^{\mu-r+\delta} = \frac{\mu-r+\delta}{\sigma} t + W_t \quad (8)$$

является винеровским относительно меры $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$, такой, что

$$d\mathbf{P}_t^{\mu-r+\delta} = Z_t^{\mu-r+\delta} d\mathbf{P}_t; \quad (9)$$

$$Z_t^{\mu-r+\delta} = \exp \left\{ -\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} W_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu-r+\delta}{\sigma} \right)^2 t \right\}. \quad (10)$$

Обозначая через $Law(\cdot | \mathbf{P})$ и $Law(\cdot | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta})$ свойства процессов относительно $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}^{\mu-r+\delta}$, получаем [1]

$$Law(W^{\mu-r+\delta} | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(W | \mathbf{P}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & Law \left(S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t^{\mu-r+\delta} \right\}; t \leq T | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta} \right) = \\ & = Law \left(S_0 \exp \left\{ \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}; t \leq T | \mathbf{P} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно,

$$Law(S(\mu, r, \delta) | \mathbf{P}^{\mu-r+\delta}) = Law(S(r, \delta) | \mathbf{P}), \quad (12)$$

т.е. вероятностные свойства процесса $S(\mu, r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(\mu, r, \delta) = S_t(\mu, r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t^{\mu - r + \delta}), \quad (13)$$

относительно меры $\mathbf{P}^{\mu - r + \delta}$ совпадают со свойствами процесса $S(r, \delta)$, определяемого уравнением

$$d_t S_t(r, \delta) = S_t(r, \delta)((r - \delta)dt + \sigma dW_t), \quad (14)$$

относительно меры $\mathbf{P}$.

Ставится задача: сформировать хеджирующую стратегию $\pi_t^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)$, а также соответствующий ей капитал X_t^* относительно платежной функции

$$f_T^{\min}(S) = (K - \min_{0 \leq t \leq T} S_t)^+, \quad (15)$$

где $a^+ = \max(a; 0)$, $K > 0$ – цена исполнения опциона.

Из (15) следует, что опцион с платежной функцией $f_T^{\min}(S)$ предъявляется к исполнению, если величина K превышает минимальное значение цены базисного актива на интервале $t \in [0, T]$. При этом владелец опциона получает доход $\Delta_P^{\min} = K - S_T^{\min}$, $S_T^{\min} = \min_{0 \leq t \leq T} S_t$.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $E\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $N\{a; d\}$ – плотность нормального распределения с параметрами a и D ; $I[A]$ – индикаторная функция события A ; интеграл без указания пределов означает интегрирование на интервале $R = (-\infty, +\infty)$;

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \varphi(y) dy, \quad \varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}. \quad (16)$$

2. Предварительные результаты

Приведем два результата, которые понадобятся при решении поставленной задачи.

Утверждение 1. Пусть для $t \leq T$

$$m_t = \min_{0 \leq \tau \leq t} \sigma \xi_\tau = \min_{0 \leq \tau \leq t} (\sigma W_\tau + h\tau); \quad (17)$$

$$\xi_t = W_t + \frac{h}{\sigma} t, \quad h = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (18)$$

Тогда для $x \leq 0$ и $h \in R$ плотность вероятности $p^m(t, x) = \partial \mathbf{P}\{m_t \leq x\} / \partial x$ имеет вид

$$p^m(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\} + \frac{2h}{\sigma^2} \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2} x\right\} \Phi\left(\frac{(x + ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2} x\right\} \exp\left\{-\frac{(x + ht)^2}{2\sigma^2 t}\right\}. \quad (19)$$

Доказательство. Для $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P\{m_t \leq -x\} &= P\left\{\min_{0 \leq t \leq T} (\sigma W_\tau + h\tau) \leq -x\right\} = P\left\{\max_{0 \leq t \leq T} (-\sigma W_\tau - h\tau) \geq x\right\} = \\ &= 1 - P\left\{\max_{0 \leq t \leq T} (-\sigma W_\tau - h\tau) \leq x\right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом симметрии траекторий процесса W_t относительно знака использования (5.9) из [1] дает, что

$$\begin{aligned} P\{m_t \leq -x\} &= 1 - \Phi\left(\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{-\frac{2h}{\sigma^2}x\right\} \Phi\left(-\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \\ &= \Phi\left(-\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{-\frac{2h}{\sigma^2}x\right\} \Phi\left(-\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Так как $P\{m_t \leq x\}$ для $x \leq 0$ совпадает с $P\{m_t \leq -x\}$ для $x \geq 0$, то, меняя в последнем выражении x на $-x$, получаем, что

$$P\{m_t \leq x\} = \Phi\left(\frac{(x-ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\} \Phi\left(\frac{(x+ht)}{\sigma\sqrt{t}}\right). \quad (21)$$

Тогда (19) следует в результате дифференцирования (21) по x .

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Если

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\{cx\} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2d}\right\} dx, \quad (22)$$

то
$$J = \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi d}} \int \exp\left\{-\frac{[x-(a+cd)]^2}{2d}\right\} dx. \quad (23)$$

Пусть $X \sim N\{a; d\}$. Тогда

$$E\{\exp\{cX\} I[X \leq b]\} = \exp\left\{ca + \frac{c^2 d}{2}\right\} \Phi\left(\frac{b-(a+cd)}{\sqrt{d}}\right). \quad (24)$$

Представление (23) для J следует из (22) в результате элементарных преобразований, а (24) следует непосредственно из (22) и (23) с учетом (16) и свойства функции Лапласа

$$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1. \quad (25)$$

3. Основные результаты

Пусть

$$d_1(t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T-t}; \quad (26)$$

$$d_2(t) = \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \sqrt{T-t}; \quad (27)$$

$$y_1(t) = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad (28)$$

$$y_2(t) = \frac{\ln(K/S_t) + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad (29)$$

$$y_3(t) = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}; \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}, \quad (31)$$

а d_1, d_2, y_1, y_2, y_3 определяются формулами (26) – (30) при $t = 0$.

Теорема 1. Цена опциона, платежная функция которого имеет вид (15), определяется следующими формулами:

$$P_T^{\min} = Ke^{-rT} - S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta T} \Phi(-d_1) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-rT} \Phi(d_2) \right], \quad (32)$$

если $S_0 \leq K$;

$$\overline{P_T^{\min}} = Ke^{-rT} \Phi(y_3) - S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta T} \Phi(y_1) - \alpha^{-1} e^{-rT} \left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(y_2) \right], \quad (33)$$

если $S_0 > K$.

Доказательство. Из (1), (2), (14), (15), (17) – (19) следует, что

$$P_T^{\min} = e^{-rT} E \left\{ (K - S_0 \exp\{m_T\})^+ \right\} = e^{-rT} F_T(S_0); \quad (34)$$

$$F_T(S_0) = E \left\{ (K - S_0 \exp\{m_T\})^+ \right\} = \int_{-\infty}^0 (K - S_0 e^x)^+ p^m(T, x) dx. \quad (35)$$

а) Случай $S_0 \leq K$. Использование (19) в (35) дает с учетом условия нормировки для $p^m(t, x)$, что

$$F_T(S_0) = K - S_0 \int_{-\infty}^0 e^x p^m(T, x) dx = K - S_0 J; \quad (36)$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3; \quad (37)$$

$$J_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\{x\} \exp\left\{-\frac{(x-hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx; \quad (38)$$

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \Phi\left(\frac{(x+hT)}{\sigma\sqrt{T}}\right) dx = \frac{2h}{\sigma^2} J_2^1; \quad (39)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{\left(1 + \frac{2h}{\sigma^2}\right)x\right\} \exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx. \quad (40)$$

В (38), согласно Утверждению 2, для $X \sim N\{hT; \sigma^2 T\}$ имеем, что $c = 1$, $b = 0$. Тогда применение (24) к (38) дает, что

$$J_1 = E \{ \exp \{ X \} I [X \leq 0] \} = \exp \left\{ hT + \frac{\sigma^2 T}{2} \right\} \Phi \left(- \frac{(hT + \sigma^2 T)}{\sigma \sqrt{T}} \right). \quad (41)$$

Использование (18), (26) в (41) приводит к тому, что

$$J_1 = \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1). \quad (42)$$

В (40), согласно Утверждению 2, для $X \sim N \{ -hT; \sigma^2 T \}$ имеем, что $c = 1 + (2h/\sigma^2)$, $b = 0$. Тогда применение (24) к (40) дает, что

$$\begin{aligned} J_3 &= E \left\{ \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) X \right\} I [X \leq 0] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -hT \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 T \right\} \Phi \left(- \frac{\left(-hT + \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) \sigma^2 T \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Использование (18), (26) в (43) приводит к тому, что

$$J_3 = J_1 = \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1). \quad (44)$$

Интегрирование по частям в (39) с учетом (40) дает, что

$$J_2^1 = \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + 2h)} \left[\Phi \left(\frac{h\sqrt{T}}{\sigma} \right) - J_3 \right]. \quad (45)$$

Подстановка (45) в (39) с последующим использованием (18), (26), (27) приводит к тому, что

$$J_2 = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2(r - \delta)} \right) [\Phi(d_2) - J_3] = (1 - \alpha^{-1}) [\Phi(d_2) - \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1)]. \quad (46)$$

Тогда из (37), (44), (46) следует, что

$$J = 2 \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1) + (1 - \alpha^{-1}) [\Phi(d_2) - \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1)]. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (36), получаем

$$F_T(S_0) = K - S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(-d_1) + (1 - \alpha^{-1}) \Phi(d_2) \right]. \quad (48)$$

Тогда (32) следует из (34), (48).

б) Случай $S_0 > K$. Из (35) следует

$$F_T(S_0) = F_T^1 - F_T^2; \quad (49)$$

$$F_T^1 = K \int_{-\infty}^b p^m(T, x) dx; \quad (50)$$

$$F_T^2 = S_0 \int_{-\infty}^b e^x p^m(T, x) dx; \quad (51)$$

$$b = \ln(K / S_0). \quad (52)$$

При вычислении F_T^2 пусть

$$J = \int_{-\infty}^b e^x p^m(T, x) dx. \quad (53)$$

Использование (19) в (53) дает, что J имеет представление (37), а J_1 , J_2 , J_3 определяются формулами вида (38) – (40), интегралы в которых верхним пределом имеют величину b вида (52). Таким образом, аналогично (41), (43)

$$J_1 = E \{ \exp \{ X \} I [X \leq b] \} = \exp \left\{ hT + \frac{h^2 T}{2} \right\} \Phi \left(\frac{b - (hT + \sigma^2 T)}{\sigma \sqrt{T}} \right); \quad (54)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= E \left\{ \exp \left\{ \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) X \right\} I [X \leq b] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -hT \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right)^2 \sigma^2 T \right\} \Phi \left(\frac{b - \left(-hT + \left(1 + \frac{2h}{\sigma^2} \right) \sigma^2 T \right)}{\sigma \sqrt{T}} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Тогда использование (18), (28), (52) в (54), (55) дает, что

$$J_1 = J_3 = \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(y_1). \quad (56)$$

Интегрирование по частям аналогично (46) с учетом (28), (29), (31), (52) дает, что

$$J_2 = (1 - \alpha^{-1}) [b^\alpha \Phi(y_2) - J_3] = (1 - \alpha^{-1}) \left[\left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(y_2) - \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(y_1) \right]. \quad (57)$$

Тогда из (37), (56), (57) следует

$$J = 2 \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left[\left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(y_2) - \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(y_1) \right]. \quad (58)$$

Подставляя (58) в (51), получаем, что

$$F_T^2 = S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) \exp \{ (r - \delta)T \} \Phi(y_1) + (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0} \right)^\alpha \Phi(y_2) \right]. \quad (59)$$

При вычислении F_T^1 пусть

$$J = \int_{-\infty}^b p^m(T, x) dx. \quad (60)$$

Использование (19) в (60) дает для J представление вида (37), где

$$J_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^b \exp \left\{ -\frac{(x - hT)^2}{2\sigma^2 T} \right\} dx; \quad (61)$$

$$J_2 = \frac{2h}{\sigma^2} \int_{-\infty}^b \exp \left\{ \frac{2h}{\sigma^2} x \right\} \Phi \left(\frac{(x + hT)}{\sigma \sqrt{T}} \right) dx = \frac{2h}{\sigma^2} J_2'; \quad (62)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^b \exp\left\{\frac{2h}{\sigma^2}x\right\} \exp\left\{-\frac{(x+hT)^2}{2\sigma^2 T}\right\} dx. \quad (63)$$

Из сравнения (61) – (63) с (38) – (40) следует, что вычисления по нахождению J_1 , J_2 , J_3 будут аналогичны вычислениям при получении формул (56), (57), только при применении (24) величина c будет принимать значения соответственно $c = 0$ и $c = (2h/\sigma^2)$. В результате получим с учетом (29) – (31)

$$J_1 = J_3 = \Phi(y_3), \quad J_2 = \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(y_2) - J_3 = \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(y_2) - \Phi(y_3). \quad (64)$$

Подстановка (64) в (37) с последующей подстановкой в (50) дает, что

$$F_T^1 = K \left[\Phi(y_3) + \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(y_2) \right]. \quad (65)$$

Используя (59), (65) в (49), получаем

$$\begin{aligned} F_T(S_0) &= K\Phi(y_3) - \\ - S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) \exp\{(r - \delta)T\} \Phi(y_1) + K \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(y_2) - S_0 (1 - \alpha^{-1}) \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} \Phi(y_2) \right] = \\ &= K\Phi(y_3) - S_0 \left[(1 + \alpha^{-1}) \exp\{(r - \delta)T\} \Phi(y_1) - \alpha^{-1} \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha} \Phi(y_2) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Тогда (33) следует из (34), (66).

Теорема доказана.

Теорема 2. Капитал $X_t^{\min}$ и портфель (хеджирующая стратегия) $\pi_t^{\min} = (\beta_t^{\min}, \gamma_t^{\min})$ определяются формулами

$$X_t^{\min} = Ke^{-r(T-t)} - S_t \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(-d_1(t)) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t)) \right]; \quad (67)$$

$$\gamma_t^{\min} = - \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(-d_1(t)) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(t)) \right]; \quad (68)$$

$$\beta_t^{\min} = \frac{K}{B_t} e^{-r(T-t)}, \quad (69)$$

если $S_t \leq K$;

$$X_t^{\overline{\min}} = Ke^{-r(T-t)} \Phi(y_3(t)) - S_t \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(y_1(t)) - \alpha^{-1} e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{S_t}\right)^{\alpha} \Phi(y_2(t)) \right]; \quad (70)$$

$$\gamma_t^{\overline{\min}} = - \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(y_1(t)) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{S_t}\right)^{\alpha} \Phi(y_2(t)) \right]; \quad (71)$$

$$\beta_t^{\overline{\min}} = \frac{1}{B_t} e^{-r(T-t)} \left[K\Phi(y_3(t)) + S_t \left(\frac{K}{S_t}\right)^{\alpha} \Phi(y_2(t)) \right], \quad (72)$$

если $S_t > K$.

Доказательство. Поскольку платежная функция вида (15) является естественной, то, согласно общей теории платежных обязательств [1 – 3],

$$X_t^{\min} = e^{-r(T-t)} E \{ f_T^{\min}(S(r, \delta)) | S_t \} = e^{-r(T-t)} F_{T-t}(S_t); \quad (73)$$

$$F_{T-t}(S_t) = E \{ f_T^{\min}(S(r, \delta)) | S_t \}. \quad (74)$$

Из сравнения (73) с (34) следует, что формулы (67), (70) получаются из (32), (33) с заменами $S_0 \rightarrow S_t$, $T \rightarrow (T-t)$.

Согласно [1, 2],

$$\gamma_t^{\min} = \frac{\partial X_t^{\min}}{\partial S} \Big|_{s=S_t}, \quad (75)$$

$$\beta_t^{\min} = \frac{X_t^{\min} - \gamma_t^{\min} S_t}{B_t}. \quad (76)$$

Использование (67) в (75) приводит к (68). Формула (69) следует из (67), (68), (76).

Согласно определению $\Phi(x)$,

$$\frac{\partial \Phi(a(s))}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{a^2(s)}{2} \right\} \frac{\partial a(s)}{\partial s}, \quad \frac{\partial \Phi(-a(s))}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi(a(s))}{\partial s}. \quad (77)$$

Тогда из (70), (77) следует

$$\frac{\partial X_t^{\min}}{\partial s} = - \left[(1 + \alpha^{-1}) e^{-\delta(T-t)} \Phi(y_1(t)) + (1 - \alpha^{-1}) e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{s} \right)^\alpha \Phi(y_2(t)) \right] + \Psi; \quad (78)$$

$$\Psi = \Psi_1 + s\alpha^{-1}\Psi_2; \quad (79)$$

$$\Psi_1 = K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_3(t))}{\partial s} - s e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s}; \quad (80)$$

$$\Psi_2 = e^{-r(T-t)} \left(\frac{K}{s} \right)^\alpha \frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial s} - e^{-\delta(T-t)} \frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s}. \quad (81)$$

Согласно (28) – (30),

$$y_1(t) = y_3(t) - \sigma \sqrt{T-t}, \quad y_1(t) = y_2(t) - 2 \frac{(r-\delta)}{\sigma} \sqrt{T-t}. \quad (82)$$

Из (77) с учетом (28) – (30) следует, что

$$\frac{\partial \Phi(y_3(t))}{\partial s} = -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \{ -y_3^2(t)/2 \}; \quad (83)$$

$$\frac{\partial \Phi(y_2(t))}{\partial s} = -\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \{ -y_2^2(t)/2 \}. \quad (84)$$

Использование (82), (28) – (30) в (83), (84) дает, что

$$\frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} = -\frac{K \exp \{ -(r-\delta)(T-t) \}}{s^2 \sigma \sqrt{2\pi(T-t)}} \exp \{ -y_3^2(t)/2 \}; \quad (85)$$

$$\frac{\partial \Phi(y_1(t))}{\partial s} = -\frac{\exp\{-(r-\delta)(T-t)\}}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha \exp\{-y_2^2(t)/2\}. \quad (86)$$

Подстановка (83), (85) в (80) и (84), (86) в (81) дает, что $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$. Тогда, согласно (79), $\Psi = 0$ и (71) следует из (75), (78), а (72) следует из (76), (70), (71).

Теорема доказана.

4. Свойства

Введем в рассмотрение коэффициенты чувствительности

$$P_T^{S_0} = \frac{\partial P_T}{\partial S_0}, \quad P_T^K = \frac{\partial P_T}{\partial K}, \quad (87)$$

определяющие зависимость цены опциона от начальной цены акции S_0 и цены исполнения опциона K .

Теорема 3. Коэффициенты чувствительности для стоимости $P_T^{\min}$ экзотического опциона продажи, основанного на минимальном значении цены рискованного актива, определяются следующими формулами:

$$\left(P_T^{S_0}\right)^{\min} = -\left[\left(1+\alpha^{-1}\right)e^{-\delta T}\Phi(-d_1)+\left(1-\alpha^{-1}\right)e^{-rT}\Phi(d_2)\right]; \quad (88)$$

$$\left(P_T^K\right)^{\min} = e^{-rT}, \quad (89)$$

если $S_0 \leq K$;

$$\left(P_T^{S_0}\right)^{\overline{\min}} = -\left[\left(1+\alpha^{-1}\right)e^{-\delta T}\Phi(y_1)+\left(1-\alpha^{-1}\right)e^{-rT}\left(\frac{K}{S_0}\right)^\alpha \Phi(y_2)\right]; \quad (90)$$

$$\left(P_T^K\right)^{\overline{\min}} = e^{-rT}\left[\Phi(y_3)+\left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1}\Phi(y_2)\right], \quad (91)$$

если $S_0 > K$.

Доказательство. Подстановка (32) в (87) дает (89), а подстановка (33) в (87) дает, что

$$\begin{aligned} \left(P_T^K\right)^{\overline{\min}} = \frac{\partial P_T}{\partial K} &= e^{-rT}\left[\Phi(y_3)+\left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1}\Phi(y_2)\right]+Ke^{-rT}\frac{\partial \Phi(y_3)}{\partial K}- \\ &-S_0\left[\left(1+\alpha^{-1}\right)e^{-\delta T}\frac{\partial \Phi(y_1)}{\partial K}-\alpha^{-1}e^{-rT}\left(\frac{K}{S_0}\right)^\alpha \frac{\partial \Phi(y_2)}{\partial K}\right]. \end{aligned} \quad (92)$$

Из (77), (28) – (30) следует, что

$$\frac{\partial \Phi(y_3)}{\partial K} = \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\{-y_3^2/2\}; \quad (93)$$

$$\frac{\partial \Phi(y_2)}{\partial K} = \frac{1}{K\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\{-y_2^2/2\}. \quad (94)$$

Тогда использование (82), (28) – (30) в (93) и (94) дает, что

$$\frac{\partial \Phi(y_1)}{\partial K} = \frac{\exp\{-(r-\delta)T\}}{s\sigma\sqrt{2\pi T}} \exp\{-y_3^2/2\}; \quad (95)$$

$$\frac{\partial \Phi(y_1)}{\partial K} = \frac{\exp\{-(r-\delta)T\}}{K\sigma\sqrt{2\pi T}} \left(\frac{K}{s}\right)^\alpha \exp\{-y_2^2/2\}. \quad (96)$$

Запишем (92) в виде

$$\left(P_T^K\right)^{\overline{\min}} = e^{-rT} \left[\Phi(y_3) + \left(\frac{K}{S_0}\right)^{\alpha-1} \Phi(y_2) \right] + \Psi, \quad (97)$$

где Ψ определяется формулой (79), а Ψ_1 , Ψ_2 формулами (80), (81) при $t = 0$ и с заменой s на K . Так как было доказано, что $\Psi = 0$, то приходим к формуле (91). Формула (88) следует непосредственно из (32), а формула (90) – из (78) при $t = 0$, $s = S_0$ и с учетом того, что $\Psi = 0$.

Теорема доказана.

Анализ формул (88) – (91) дает следующий результат.

Теорема 4. При $\alpha > 1$

$$\left(P_T^{S_0}\right)^{\min} < 0, \quad \left(P_T^{S_0}\right)^{\overline{\min}} < 0, \quad (92)$$

а

$$\left(P_T^K\right)^{\min} > 0, \quad \left(P_T^K\right)^{\overline{\min}} > 0 \quad (93)$$

при любом α , т. е. стоимость опциона продажи, основанного на минимальном значении цены рискового актива, является убывающей функцией начальной цены акции S_0 и возрастающей функцией цены исполнения опциона K .

Дадим интерпретацию доказанных свойств.

1. Свойство убывания $P_T^{\min}$ по S_0 .

Опцион продажи предъявляется владельцем к исполнению, если минимальное значение цены рискового актива на всем интервале от момента заключения контракта $t = 0$ до момента исполнения $t = T$ меньше цены исполнения опциона K , т.е. $\min_{0 \leq t \leq T} S_t < K$. При увеличении начальной цены акции S_0 риск не предъявить

опцион увеличивается. Поэтому естественно, что цена опциона убывает, так как за больший риск следует меньше платить.

2. Свойство возрастания $P_T^{\min}$ по K .

Опцион продажи предъявляется владельцем к исполнению, если $\min_{0 \leq t \leq T} S_t < K$.

При увеличении цены исполнения опциона K вероятность того, что минимальное значение цены рискового актива не превысит величину K , увеличивается, т.е. уменьшается риск не предъявить акцию к исполнению. Поэтому естественно, что величина, которую покупатель платит за опцион, увеличивается, так как за меньший риск следует больше платить.

Заключение

Основные результаты заключаются в следующем.

1. Получены аналитические выражения для стоимости опциона (Теорема 1).
2. Найдены хеджирующие стратегии (портфели) и соответствующие им капиталы, обеспечивающие выполнение платежного обязательства (Теорема 2).
3. Исследованы свойства цены опциона, касающиеся характера ее зависимостей от начальной цены акции и от цены исполнения опциона (Теоремы 3 и 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В.* К теории расчетов опционов европейского и американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1 С. 80 – 129.
2. *Ширяев А.Н.* Стохастические проблемы финансовой математики // Обзорные прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1. Вып. 5. С. 780 – 820.
3. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. М.: ГУ ВШЭ, 2001. 253 С.
4. *Халл Д.К.* Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2007. 1052 с.
5. *Кожин К.* Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. 2002. Вып. 15. С. 53 – 57.
6. *Rubinstein M.* Exotic options // Finance Working Paper. Berkeley: Inst. of Business and Economic Research, Univ. of California. 1991. No. 220.
7. *Zhang P.G.* An introduction to exotic options // Europ. Financial Manag. 1995. V. 1. N. 1. P. 87 – 95.
8. *Андреева А.В., Демин Н.С., Ерофеева Е.В.* Опцион купли на основе максимального значения цены рискованного актива с фиксированной ценой исполнения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 3(8). С. 3 – 18.
9. *Шенн Л.А., Ширяев А.Н.* Новый взгляд на расчеты «Русского опциона» // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 130 – 148.

Андреева Ульяна Викторовна

Демин Николай Сергеевич

Ерофеева Екатерина Владимировна

Томский государственный университет

E-mail: egi@sibmail.com; dyomin@fpmk.tsu.ru; yltra@inbox.ru Поступила в редакцию 23 марта 2010 г.