ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

Рождение оптических вихрей при распространении поля с начальным дробным топологическим зарядом

В.В. Котляр [1,2], А.А. Ковалёв [1,2], А.П. Порфирьев [1,2]
[1] ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,
[2] Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Топологический заряд параксиального оптического вихря при распространении в свободном пространстве в общем случае не сохраняется, в отличие от орбитального углового момента, который сохраняется. В работе на примере Гауссова пучка с дробным топологическим зарядом в начальной плоскости показано численно, как меняется топологический заряд при распространении. Имеется четыре сценария эволюции оптического вихря с начальным дробным топологическим зарядом, в зависимости от близости дробного топологического заряда к целому чётному или нечётному числу. Для простых оптических вихрей (моды Лагерра–Гаусса или Бесселя–Гаусса) топологический заряд сохраняется и при распространении, и при слабом фазовом искажении. Экспериментально показано, что целый топологический заряд оптического вихря сохраняется при рассеянии на фазовом случайном экране вплоть до величины случайного искажения разности хода на половину длины волны. Поэтому при слабой турбулентности имеет смысл измерять топологический заряд, так как он меняется дискретно, а орбитальный угловой момент пучка, который меняется непрерывно.

Ключевые слова: оптический вихрь, дробный топологический заряд, ближняя зона дифракции, зона дифракции Френеля, дальняя зона.

Цитирование: **Котляр, В.В.** Рождение оптических вихрей при распространении поля с начальным дробным топологическим зарядом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 4. – С. 493-500. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-715.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Birth of optical vortices in propagating fields with an original fractional topological charge. Computer Optics 2020; 44(4): 493-500. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-715.

Введение

Основными характеристиками лазерных вихревых пучков [1] являются топологический заряд (ТЗ) и орбитальный угловой момент (ОУМ). Топологический заряд оптического вихря (ОВ) формально определён Берри в [2], а ОУМ был введён в оптику в [3]. Если полный ОУМ параксиального светового поля сохраняется при распространении в свободном пространстве, то ТЗ сохраняется не всегда. Топологический заряд сохраняется при распространении, если амплитуду начального светового поля можно описать в факторизованном виде $E(r,\varphi)=A(r)\exp(in\varphi)$, где $A(r)$ – составляющая амплитуды, зависящая только от радиальной переменной r, φ – азимутальный угол, n – целое число, топологический заряд ОВ. Примерами таких световых полей являются хорошо известные пучки Бесселя–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Примеры несохранения ТЗ при распространении ОВ можно найти в работах [4–9]. В [4] рассмотрена простая суперпозиция Гауссова пучка и моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) с номером $(0, n)$, причём радиусы перетяжки у Гауссовых пучков разные. Из-за разной расходимости в комбинированном пучке при распространении в пространстве изменяется ТЗ. Если в начальной плоскости радиус перетяжки Гауссова пучка больше радиуса перетяжки моды ЛГ, то ТЗ комбинированного пучка сначала равен нулю. По мере распространения радиусы обоих пучков выравниваются, и после этой плоскости радиус моды ЛГ становится больше, чем радиус Гауссова пучка. С этого места ТЗ комбинированного пучка становится равен n. В [2] теоретически, а в [5, 6] экспериментально показано, что Гауссов пучок с начальным дробным ТЗ при распространении в ближней зоне имеет целый ТЗ, равный целому числу, ближайшему к дробному числу. То есть если начальный дробный ТЗ равен $\mu=n+\varepsilon$ ($\varepsilon<1/2$), то ТЗ пучка равен n. Если начальный ТЗ равен $\mu=n+\varepsilon$ ($1/2<\varepsilon<1$), то ТЗ пучка равен $n+1$. Но оказалось, что при дальнейшем распространении таких пучков их ТЗ претерпевает и другие изменения, ранее не известные. Так, в [7] численно и экспериментально показа-

но, что в зоне Френеля ТЗ Гауссова оптического вихря с начальным дробным ТЗ равен целому числу на единицу большему, чем ближайшее целое число к начальному дробному ТЗ. То есть если начальный дробный ТЗ равен $\mu = n + \varepsilon$ $(0,1 < \varepsilon < 1)$, то ТЗ пучка равен $n+1$. Хотя в [7] есть неточности. Начальный пучок задан в виде $r^{\mu}\exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi)$, и его Френель-образ должен быть пропорционален функции Куммера, зависящей от числа μ. Но в [7] нет функции Куммера. Аналогичное исследование провели авторы работы [8]. В [8] действительно ТЗ измеряется в Фурье-плоскости (в фокусе сферической линзы) и получены результаты, отличные от результатов работы [7]. В [8] показано, что ТЗ Гауссова оптического вихря $\exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi)$ с дробным начальным ТЗ $\mu = (2k+1) + \varepsilon$ $(0,1 < \varepsilon < 1)$ в дальней зоне равен $2k+1$. А если начальный дробный ТЗ равен $\mu = 2k + \varepsilon$ $(0,1 < \varepsilon < 1)$, то в дальней зоне равен ТЗ также $2k+1$. Эти исследования показали, во-первых, что ТЗ не всегда сохраняется при распространении, а во-вторых, что чётные и нечётные ТЗ по-разному ведут себя при распространении. Это следует из того, что какой бы дробный начальный ТЗ не был (близкий к чётному целому или близкий к нечётному целому), в дальней зоне ТЗ будет всегда целым нечётным числом.

Заметим, что измерять ТЗ можно с помощью треугольной диафрагмы [10, 11] или цилиндрической линзы [12].

Заметим также, что оптический вихрь может находиться на периферии распределения интенсивности лазерного пучка, там, где интенсивность очень мала. Обнаружить экспериментально такой ОВ затруднительно, если вообще возможно. Но при расчёте по формуле, которая определяет ТЗ, такой ОВ учитывается, и величина ТЗ зависит от этого вихря. В численном эксперименте результат расчёта величины ТЗ зависит от радиуса окружности, по которой суммируют градиент фазы светового поля. Поэтому правильного результата расчёта ТЗ следует ожидать, когда согласуются все три составляющие: расчёт по формуле [2], расчёт по модельным картинам фазы поля и экспериментальное определение ТЗ [10–12].

В данной работе мы теоретически и численно рассматриваем эволюцию Гауссова ОВ с начальным дробным ТЗ и фактически объединяем результаты работ [2], [7] и [8]. Мы показали, что имеется всего 4 возможных варианта эволюции ОВ с начальным дробным ТЗ. Мы показали, что в [2, 5, 6] измеряли ТЗ в ближней зоне, в работе [7] – в зоне Френеля и в [8] – в дальней зоне.

Как правило, при распространении ОВ в атмосфере в присутствии турбулентности для идентификации ОВ измеряют ОУМ [13, 14]. Но из-за малых «дрожаний» всего пучка и его составных частей ОУМ непрерывно изменяется. Хотя при слабой турбулентности он изменяется слабо, а при сильной – сильно. Если измерять ТЗ, то он может изменяться только дискретно, оставаясь целым. Поэтому при слабой турбулентности ТЗ вообще не должен изменяться. Мы показали с помощью дифракции ОВ на случайном фазовом экране, что ТЗ остаётся неизменным вплоть до существенных искажений величины случайной фазы экрана.

1. Теория

Топологический заряд рассчитывается с помощью формулы, предложенной Берри [2]:

$$TC = \frac{\lim}{r\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\arg E(r,\varphi) = \\ = \frac{1}{2\pi}\frac{\lim}{r\to\infty}\mathrm{Im}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r,\varphi)/\partial\varphi}{E(r,\varphi)}. \quad (1)$$

Амплитуда Гауссова пучка с начальным дробным топологическим зарядом имеет вид [2]:

$$E(r,\varphi,z=0) = \exp\left(-i\mu\varphi - \left(\frac{r}{w}\right)^2\right) = \\ = \frac{e^{i\pi\mu}\sin\pi\mu}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{in\varphi - r^2/w^2}}{\mu - n}. \quad (2)$$

Амплитуда поля (2) в зоне Френеля выражается через разность модифицированных функций Бесселя [15]:

$$E(\rho,\theta,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-iz_0}{qz}\right)\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu\right)\times \\ \times\sin(\pi\mu)\sqrt{x}\exp(-x)\times \\ \times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{|m|}\frac{\exp(im\theta)}{\mu - m}\left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(x) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(x)\right], \quad (3)$$

где $x = (z_0/z)^2(\rho/w)^2/(2q)$, $q = 1 - i(z_0/z)$, $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя.

В «ближней зоне» $z << z_0$ параметры в (3) принимают вид: $x = ik\rho^2/(2z)$, $q = -i(z_0/z)$. И так как модифицированная функция Бесселя и обычная связаны известным соотношением

$$I_\nu(ix) = i^\nu J_\nu(x), \quad (4)$$

то получаем в ближней зоне [2, 15]:

$$E(\rho,\theta,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu\right)\times \\ \times\sin(\pi\mu)\sqrt{iy}\exp(-iy)\times \\ \times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{|m|}\frac{e^{im\theta}}{\mu - m}i^{(|m|-1)/2}\left[J_{\frac{|m|-1}{2}}(y) - iJ_{\frac{|m|+1}{2}}(y)\right], \quad (5)$$

где $y = k\rho^2/(2z)$. В пределе при $\rho\to\infty$, используя асимптотику функций Бесселя

$$J_\nu(y >> 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\cos\left(y - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (6)$$

получим:

$$E(\rho\to\infty,\theta,z)\approx \approx \frac{\exp(i\pi\mu)\sin(\pi\mu)}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(im\theta)}{\mu-m}. \quad (7)$$

Выражение (7) совпадает с (2) при $w\to\infty$. Подставив (7) в (1), получим формулу для расчёта ТЗ в «ближней зоне»:

$$TC=\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{ne^{in\varphi}}{\mu-n}\right]\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{in\varphi}}{\mu-n}\right]^{-1}\mathrm{d}\varphi\right\}. \quad (8)$$

Расчёт по формуле (8) приводит к известной ступенчатой функции для ТЗ со скачками при $\mu=n+1/2$ (рис. 1). На рис. 1 показана зависимость ТЗ Гауссова пучка с начальным вихрем с дробным ТЗ (2) в «ближней зоне» ($z<<z_0$), рассчитанного по формуле (8) для $-7\le\mu\le 7$ с шагом 0,05, от величины начального дробного ТЗ μ.

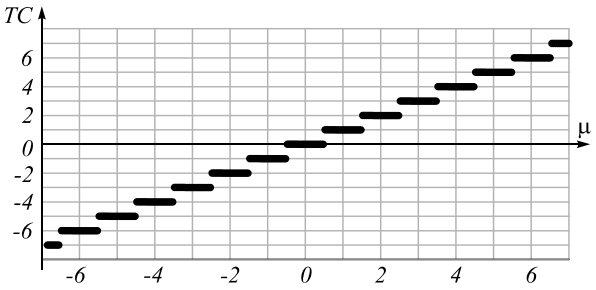


Рис. 1. ТЗ Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ, рассчитанный по формуле (8)

Как видно на рис. 1, скачки ТЗ имеют место при полуцелых значениях, когда $\mu=n+0{,}5$, т.е. как описано в [2].

Рассчитаем далее ТЗ поля с начальным дробным ТЗ (2) в зоне Френеля. Для этого воспользуемся асимптотикой для модифицированной функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi)-I_{\frac{n+1}{2}}(\xi)\sim \sim\frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}}\left\{\left[1-\frac{(n-1)^2-1}{8\xi}\right]-\left[1-\frac{(n+1)^2-1}{8\xi}\right]\right\}= =\frac{ne^{\xi}}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (9)$$

Тогда получим с учётом асимптотики (9) вместо (3) следующее выражение:

$$E(\rho\to\infty,\theta,z)= =\left(\frac{-iz}{z_0}\right)\left(\frac{w}{\rho}\right)^2\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}+i\pi\mu\right)\sin(\pi\mu)\times \times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{|m|}\frac{\exp(im\theta)}{\mu-m}|m|. \quad (10)$$

Подставив (10) в формулу для расчёта топологического заряда (1), получим:

$$TC=\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-i)^{|n|}n|n|e^{in\varphi}}{\mu-n}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-i)^{|n|}|n|e^{in\varphi}}{\mu-n}}\mathrm{d}\varphi\right\}. \quad (11)$$

Рис. 2 показывает ТЗ Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (2), рассчитанный в зоне дифракции Френеля по формуле (11) для $5\le\mu\le 10$ с шагом 0,05.

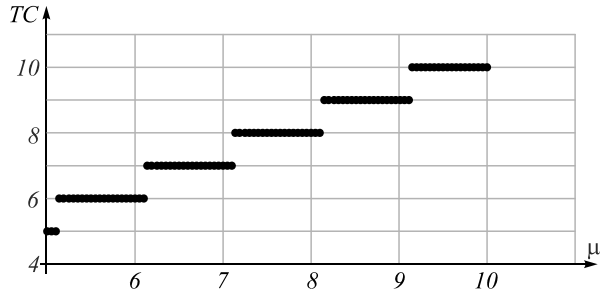


Рис. 2. ТЗ Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (2) в зоне дифракции Френеля, рассчитанный по формуле (11)

Из рис. 2 видно, что скачки ТС находятся вблизи каждого целого числа, когда $\mu\approx n+0{,}1$, как описано в [7]. Но в [7] утверждали, что такая зависимость для ТЗ имеет место в зоне дифракции Фраунгофера, а не Френеля. Но в [8] также, как в [7], исследовали ТЗ в дальней зоне (зоне дифракции Фраунгофера или в фокусе сферической Фурье-линзы) и получили другой результат.

В дальней зоне дифракции (в фокусе Фурье-линзы) амплитуда поля примет вид:

$$E(\rho,\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-iz_0}{f}\right)\exp(i\pi\mu)\times \times\sin(\pi\mu)\sqrt{x}\exp(-x)\times \times\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^{|m|}\frac{\exp(im\theta)}{\mu-m}\left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(x)-I_{\frac{|m|+1}{2}}(x)\right], \quad (12)$$

где аргумент у функций Бесселя становится действительной величиной $x=(z_0/f)^2(\rho/w)^2/2$, f – фокусное расстояние линзы, формирующей дальнюю зону в плоскости фокуса. Расчёт ТЗ по формуле (12) и по формуле (1) приводит к ступенчатой функции, показанной на рис. 3. На рис. 3 показан ТЗ Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (2) в дальней зоне дифракции, рассчитанный по формулам (12) и (1) для $-5\le\mu\le 5$ с шагом 0,05.

Согласно рис. 3, скачки между соседними целочисленными значениями ТЗ происходят при чётных целочисленных значениях, как описано в [8]. Из рис. 3 видно, что если начальный ТЗ целый $\mu=n$, то он таким же останется в дальней зоне. Но слабые отклонения начального ТЗ от целого приводят к разным последствиям, в зависимости от того, чётное или нечётное это

целое число. Слабые отклонения начального ТЗ от нечётного целого числа не изменяют ТЗ в дальней зоне: он остается целым нечётным числом. Слабые отклонения начального ТЗ от целого чётного числа скачком изменяют ТЗ такого оптического вихря в дальней зоне. Если начальный ТЗ немного меньше чётного целого числа $2m$, то в дальней зоне ТЗ будет равен $2m-1$. А если начальный ТЗ будет немного больше чётного числа $2m$, то в дальней зоне ТЗ будет равен $2m+1$. Авторы пока не могут объяснить, почему происходит именно так.

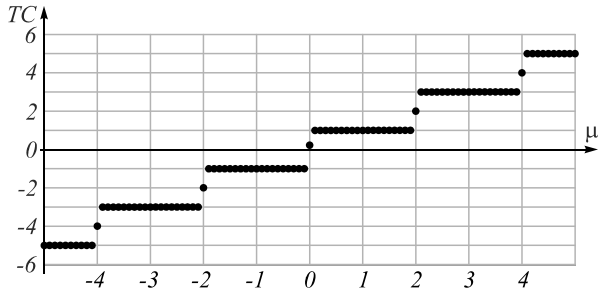


Рис. 3. ТЗ Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (2) в Фурье-плоскости, рассчитанный по формулам (12) и (1)

Из рис. 1–3 следует интересная эволюция светового поля с начальным дробным ТЗ (2). Из рис. 3 видно, что в дальней зоне любое начальное дробное поле приводит только к нечётным ТЗ. Чётные ТЗ в дальней зоне можно сформировать, только если начальное поле будет иметь целый чётный ТЗ. Действительно, пусть в начальной плоскости ТЗ равен $\mu=3{,}3$. Тогда в «ближней зоне» сформируется ОВ с ТС = 3 (рис. 1), далее в зоне Френеля произойдёт рождение нового вихря с ТЗ +1, и ТЗ пучка станет равен ТС = 4 (рис. 2). А в дальней зоне произойдёт рождение другого вихря с ТЗ –1, и ТЗ пучка опять станет ТС = 3 (рис. 3), как в «ближней зоне».

Иная эволюция у поля с начальным дробным ТЗ, близким к чётному целому числу, например, $\mu=4{,}3$. В «ближней зоне» у такого пучка ТЗ равен ТС = 4 (рис. 1), в зоне Френеля он равен ТС = 5 (рис. 2), и в дальней зоне ТЗ остаётся равным ТС = 5 (рис. 3).

Есть ещё два сценария эволюции поля с начальным дробным ТЗ, которые видны из табл. 1. В этой таблице приведены все 4 возможных сценария эволюции начального дробного вихря. Если простое начальное поле имеет целый ТЗ, то он сохраняется при распространении. Но если имеется линейная комбинация двух полей с разной расходимостью, то начальный целый ТЗ будет меняться [4]. В Приложении А приведён расчёт ТЗ комбинации двух оптических вихрей, обобщающий результат работы [4].

2. Моделирование

Для подтверждения расчётов величины ТЗ по формулам (8), (11) и (12) в разных зонах дифракции Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ было проведено моделирование. Распределения интенсивности и фазы в «ближней зоне» и зоне Френеля были получены BPM-методом (программа BeamProp фирмы RSoft) при следующих параметрах: длина волны: $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки Гауссова пучка $w_0=5\lambda$ (длина Рэлея в этом случае равна $z_R\sim25\pi\lambda$), полуразмер расчётной области: $R=50\lambda$, поперечный шаг дискретизации: $\Delta x=\Delta y=\lambda/32$, продольный шаг дискретизации: $\Delta z=\lambda/16$. А распределения интенсивности и фазы в дальней зоне были получены с помощью преобразования Фурье, выполненного сферической линзой с фокусным расстоянием $f=100$ мм для Гауссова пучка с радиусом перетяжки $w_0=0{,}5$ мм, но с тем же начальным ТЗ. Начальный ТЗ был равен $\mu=3{,}3$ (тип эволюции соответствует четвёртой строке табл. 1). Расчёт в ближней зоне был на расстоянии $z=3\lambda$, а в зоне Френеля – на расстоянии $z=50\lambda$.

Табл. 1. Сценарии изменения ТЗ при распространении Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ $\exp(-r^2/w^2)+i\mu\varphi$ (p – произвольное целое число, $0<\varepsilon<1/2$)

Начальный ТЗ $z=0$	ТЗ в ближней зоне $z\ll z_0$	ТЗ в зоне Френеля $z\approx z_0$	ТЗ в дальней зоне $z\gg z_0$
$\mu=2p+\varepsilon$	$2p$	$2p+1$	$2p+1$
$\mu=2p-\varepsilon$,	$2p$	$2p$	$2p-1$
$\mu=(2p+1)+\varepsilon$	$2p+1$	$2p+2$	$2p+1$
$\mu=(2p+1)-\varepsilon$	$2p+1$	$2k+1$	$2p+1$

На рис. 4 показаны распределения интенсивности (*а*, *в*, *д*) и фазы (*б*, *г*, *е*) Гауссова пучка с дробным оптическим вихрем порядка $\mu=3{,}3$ в «ближней зоне» ($z=3\lambda$) (*а*,*б*), в зоне Френеля ($z=50\lambda$) (*в*, *г*) и в дальней зоне (в Фурье-плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f=100$ мм) (*д*, *е*). Стрелками на распределениях фазы показаны оптические вихри (центры сингулярностей) плюс первого порядка, а пунктирной стрелкой (на рис. 4*е*) показан оптический вихрь минус первого порядка.

Рис. 4 подтверждает результаты расчёта по полученным формулам (8), (11) и (12), которые отражены на рис. 1–3 соответственно. И подтверждает эволюцию ОВ, описанную в строке 4 табл. 1. Действительно, на рис. 4*б* видно, что, хотя в начальной плоскости ($z=0$) ТЗ был равен $\mu=3{,}3$, сразу же за начальной плоскостью (на расстоянии всего 3λ) у ОВ есть только 3 точки сингулярности (ТЗ равен 3). Хотя какие-то возмущения фазы с правой стороны на рис. 4*б* присутствуют, но разглядеть ещё точки сингулярности не удаётся. На рис. 4*г* на расстоянии 50λ (длина Рэлея примерно 75λ) видно, что появилась четвертая точка сингулярности (это показывает сбой полос повыше трёх исходных точек сингулярности). Топологический заряд теперь равен 4. При дальнейшем распространении (в фокусе сферической линзы), как показано на рис. 4*е* снизу, появляется ещё точка сингулярности, но с обратным знаком (–1). И полный ТЗ пучка опять стал равен начальному 3.

3. Эксперимент

Этот параграф посвящён изучению устойчивости ТЗ оптического вихря к фазовым искажениям. В

нашем эксперименте мы исследуем сохранение целого ТЗ при случайных фазовых искажениях вихревого лазерного пучка. Для измерения ТЗ мы используем цилиндрическую линзу [12]. Гауссов пучок с диаметром перетяжки $w = 1{,}1$ мм освещает пространственный модулятор света (SLM), на котором записана вихревая фаза $m\varphi$ с $m = 5$. Каждый пиксель SLM искажается добавлением числа $2\pi\alpha$ к его фазе $m\varphi$. Величина α является случайным числом в интервале [0, 1]. На рис. 5 показаны искажённые фазы начального светового поля, записанные на SLM (левый столбец), распределения интенсивности (600×600 мкм), измеренные в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 150$ мм (центральный столбец), и распределения интенсивности (1900×1900 мкм), измеренные на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ мм (правый столбец) для разных фазовых искажений α.

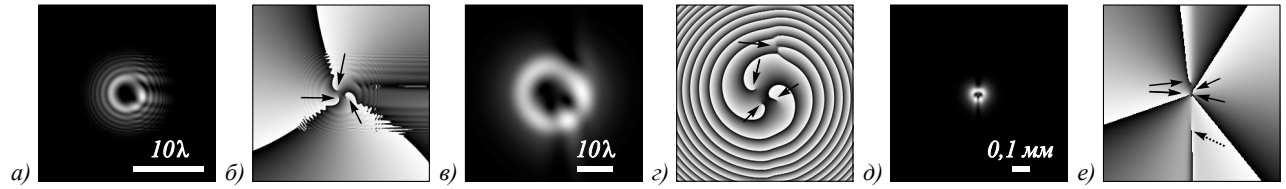


Рис. 4. Распределения интенсивности (а, в, д) и фазы (б, г, е) Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ $\mu = 3{,}3$ в ближней зоне (а, б), в зоне Френеля (в, г) и в дальней зоне (д, е). Стрелками на распределениях фазы показаны оптические вихри плюс первого порядка, а пунктирной стрелкой (е) показан оптический вихрь минус первого порядка. Для фазы чёрный цвет – это ноль, а белый цвет – 2π

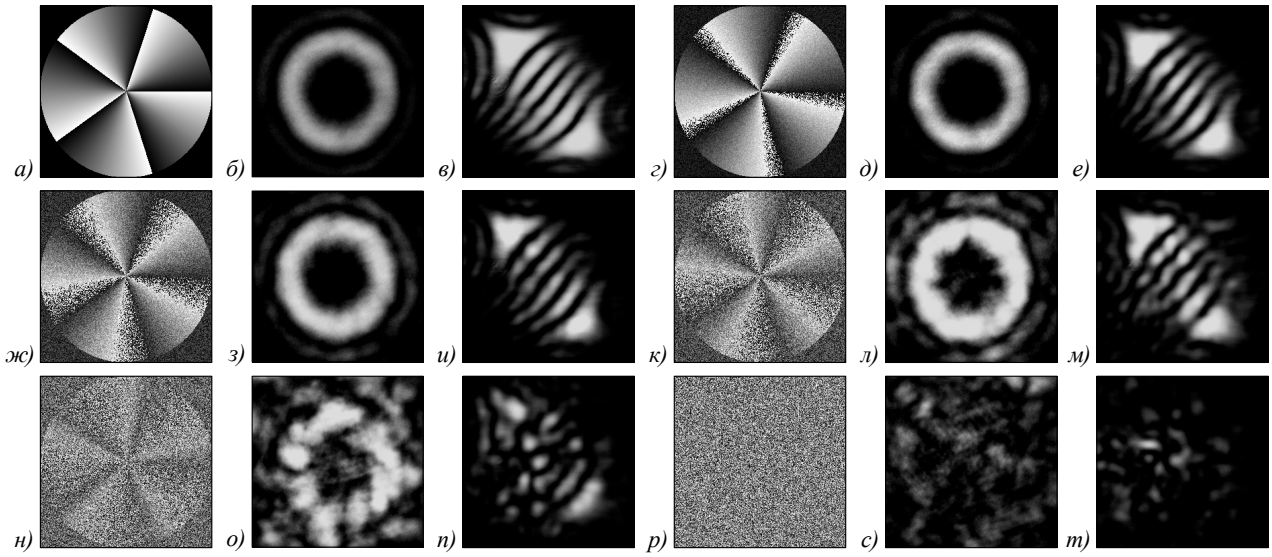


Рис. 5. Искажённые фазы (а, г, ж, к, н, р), распределения интенсивности (600 × 600 мкм) в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием f = 150 мм (б, д, з , л, о, с) и распределения интенсивности (1900 × 1900 мкм) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы с фокусным расстоянием f = 100 мм (в, е, и, м, п, т) для разной степени искажения: α = 0 (а, б, в), α = 0,2 (г, д, е), α = 0,4 (ж, з, и), α = 0,6 (к, л, м), α = 0,8 (н, о, п), α = 1,0 (р, с, т)

Согласно рис. 5 при $\alpha = 0{,}6$ (то есть фаза искажается случайным значением в интервале $[0; 1{,}2\pi]$) всё ещё чётко видны 6 пиков на диагонали под углом –45° (или 5 тёмных полос, или 5 нулей интенсивности), что означает, что ТЗ оптических вихрей равен 5. Однако при $\alpha \geq 0{,}8$ ТЗ не может быть обнаружен (рис. 5). То есть ТЗ оптического вихря остаётся целым числом, равным 5, вплоть до величины случайного искажения начальной фазы ОВ, примерно равной половине длины волны ($\lambda / 2$).

Заключение

В работе теоретически показано, что Гауссов пучок, в который внедрён оптический вихрь с начальным дробным ТЗ, при распространении не сохраняет начальный ТЗ. Топологический заряд Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ в разных зонах дифракции («ближней зоне» ($z << z_0$), зоне Френеля ($z \approx z_0$) и дальней зоне ($z >> z_0$)) может быть разный. Это подтверждено численным моделированием с помощью программы BeamProp (в ближней зоне и зоне дифракции Френеля) и с помощью преобразования Фурье (в дальней зоне). Описаны 4 типа эволюции Гауссова пучка с начальным дробным ТЗ. Один из них, например, такой. Если в начальной плоскости ТЗ равен 3,3, то в «ближней зоне» ТЗ равен 3, в зоне Френеля 4, а в зоне Фраунгофера (в фокусе сферической линзы) опять 3. Таким образом, в этом типе эволюции в зоне Френеля появляется ТЗ +1, а затем в дальней зоне появляется ещё ТЗ –1, который компен-

сирует ТЗ +1. Но «рождаться» в ходе распространения дополнительные ОВ могут не только в случае начального дробного заряда, но и в случае комбинированного пучка, состоящего из линейной комбинации двух мод Лагерра–Гаусса с номерами $(0, n)$ и $(0, m)$ и разными радиусами перетяжек Гауссовых пучков. В этом случае могут «рождаться» сразу несколько ОВ $|n-m|$. Уничтожение ОВ происходит в том смысле, что «рождаются» ещё $|n-m|$ ОВ, но с обратными по знаку ТЗ. Экспериментально показано, что при слабых случайных фазовых искажениях ОВ (величина задержки фазы меньше π) ТЗ сохраняется. Поэтому для идентификации ОВ в системах беспроводной связи можно использовать измерение ТЗ (наряду с измерением ОУМ).

У читателя может возникнуть вопрос: откуда берутся дополнительные ОВ в зоне Френеля и Фраунгофера (см. табл. 1)? Ответ может быть таким. Начальное световое поле с дробным ТЗ содержит весь спектр угловых гармоник и «несёт» в себе эти дополнительные ОВ. Доказательством могут служить два хорошо известных случая. Если в начальной плоскости имеется пучок Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$, прошедший через цилиндрическую линзу, повернутую в начальной плоскости на угол в 45° к декартовым осям, то ТЗ такого пучка в начальной плоскости равен нулю. Но на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию цилиндрической линзы, формируется вихревой пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ) с номером $(0, n)$ [16]. Это означает, что «родился» оптический вихрь с ТЗ n. Другой пример. Пусть в начальной плоскости имеется суперпозиция Гауссова пучка с радиусом перетяжки w_1 и оптический вихрь ЛГ с номером $(0, n)$ и радиусом перетяжки w_2. И пусть $w_1(0)<w_2(0)$, тогда [4] в начальной плоскости и далее до расстояния z_1 ТЗ такого комбинированного пучка будет равен n. Но при $z>z_1$, когда $w_1(z)>w_2(z)$, ТЗ пучка изменится и станет равен нулю. Это означает, что «родились» n оптических вихрей с ТЗ –1, которые «скомпенсировали» n оптических вихрей с ТЗ +1, которые были в начальной плоскости.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-20003, теоретические результаты, и грант № 18-07-01129, результаты моделирования), Российского научного фонда (грант № 18-19-00595, эксперимент), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (введение и заключение).

Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-138-54211-2.
2. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
3. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – 8185.
4. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carring optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vastnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // Physical Review A. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075.
5. **Leach, J.** Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam / J. Leach, E. Yao, M.J. Padgett // New Journal of Physics. – 2004. – Vol. 6. – 71.
6. **Gotte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Gotte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // Journal of Modern Optics. – 2007. – Vol. 54, Issue 12. – P. 1723-1738.
7. **Jesus-Silva, A.J.** Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickmann // Optics Letters. – 2012. – Vol. 37, Issue 21. – P. 4552-4554.
8. **Wen, J.** Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // Optics Express. – 2019. – Vol. 27, Issue 4. – P. 5893-5904.
9. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // Physical Review A. – 2017. – Vol. 96, Issue 6. – 063807.
10. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chavez-Cerda // Physical Review Letters. – 2010. – Vol. 105, Issue 5. – 053904.
11. **Mourka, A.** Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture / A. Mourka, J. Baumgartl, C. Shanor, K. Dholakia, E.M. Wright // Optics Express. – 2011. – Vol. 19, Issue 7. – P. 5760-5771.
12. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Pofirev // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
13. **Gibson, G.** Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum / G. Gibson, J. Courtial, M.J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pasko, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold // Optics Express. – 2004. – Vol. 12, Issue 22. – P. 5448-5456.
14. **Watkins, R.J.** Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams / R.J. Watkins, K. Dai, G. White, W. Li, J.K. Miller, K.S. Morgan, E.G. Jonson // Optics Express. – 2020. – Vol. 28, Issue 2. – P. 924-935.
15. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / VV. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // Journal of the Optical Society of America A. – 2005. – Vol. 22, Issue 5. – P. 849-861. – DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
16. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issue 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.

Приложение А

Ниже мы приведём два примера комбинированных ОВ, у которых при распространении ТЗ не сохраняется. В [4] на примере комбинированного пучка показано, что ТЗ такого пучка при распространении не сохраняется. Но прямого вычисления ТЗ по формуле (1) в [4] нет. Поэтому ниже мы обобщим результат [4] и рассчитаем ТЗ суммы двух мод ЛГ с разными радиусами перетяжек с помощью прямого вычисления по формуле (1). Амплитуда поля комбинированного пучка, состоящего из двух мод Лагерра–Гаусса $(0, n)$ и $(0, m)$ с разными радиусами перетяжек, задаётся в виде

$$E(r,\varphi,z)=a\left(\frac{r}{w_1(z)}\right)^{|n|}e^{-r^2/w_2^2(z)+in\varphi}+ \\ +b\left(\frac{r}{w_2(z)}\right)^{|m|}e^{-r^2/w_2^2(z)+im\varphi}, \tag{A1}$$

где $w_1(z)=w_{10}[1+(z/z_{10})^2]^{1/2}$ и $w_2(z)=w_{20}[1+(z/z_{20})^2]^{1/2}$ – радиусы перетяжек двух Гауссовых пучков в (А1), a и b – функции только от z, n и m – целые топологические заряды ОВ. Подставив (А1) в (1), получим:

$$TC=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi}E\varphi\frac{inar^n w_2^m(z)e^{-r^2/w_1^2(z)+in\varphi}+imbr^m w_1^n(z)e^{-r^2/w_2^2(z)+im\varphi}}{ar^n w_2^m(z)e^{-r^2/w_1^2(z)+in\varphi}+br^m w_1^n(z)e^{-r^2/w_2^2(z)+im\varphi}}= \\ =\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}E\varphi\frac{nar^{n-m}w_2^m(z)e^{-r^2\left(1/w_1^2(z)-1/w_2^2(z)\right)+i(n-m)\varphi}+mbw_1^n(z)}{ar^{n-m}w_2^m(z)e^{-r^2\left(1/w_1^2(z)-1/w_2^2(z)\right)+i(n-m)\varphi}+bw_1^n(z)}= \\ =\begin{cases}m\,, & w_1(z)\le w_2(z),\\ n\,, & w_1(z)>w_2(z).\end{cases} \tag{A2}$$

В (А2) интеграл вычислялся так. Пусть $w_{10}>w_{20}$, тогда $w_1(z)>w_2(z)$ при $z<kw_{10}w_{20}/2$ и в показателе экспоненты под интегралом в (А2) положительное число. Поэтому в пределе $r\to\infty$ в числителе и знаменателе под интегралом в (А2) экспоненты стремятся к бесконечности быстрее, чем степень. Поэтому вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе можно пренебречь. А оставшиеся первые слагаемые взаимно сокращаются, и остаётся только n. Поэтому ТЗ равен n. Но при $z>kw_{10}w_{20}/2$ радиус первой моды ЛГ становится меньше, чем радиус второй моды ЛГ $w_1(z)<w_2(z)$, и показатель экспоненты в интеграле (А2) будет отрицательным числом. Поэтому в пределе $r\to\infty$ под интегралом в (А2) первые слагаемые в числителе и знаменателе стремятся к нулю. Остаются только вторые слагаемые, которые взаимно сокращаются, и остаётся в числителе m. Поэтому ТЗ будет равен m.

И, наоборот, если $w_{10}<w_{20}$, то при $z<kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен m, а при $z>kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен n. Таким образом, при распространении пучка (А1) на некотором расстоянии рождаются (или уничтожаются) $|n-m|$ оптических вихрей с ТЗ +1.

Аналогично можно вычислить ТЗ для комбинированного пучка, у которого вместо моды ЛГ $(0,n)$ выбран Гауссов вихрь [14]. У такого пучка ТЗ тоже может не сохраняться. В начальной плоскости такой комбинированный пучок имеет следующую амплитуду:

$$E(r,\varphi)=ae^{-r^2/w_1^2}+be^{-r^2/w_2^2+in\varphi}. \tag{A3}$$

Преобразование Френеля для второго слагаемого в (А3) известно [14] (каждое слагаемое в (3)), тогда на расстоянии z вместо (А3) получим:

$$E(\rho,\theta,z)=ae^{-r^2/w_1^2(z)}+\frac{b(-i)^{|m|+1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z_0}{qz}\right)\times\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}+in\varphi\right)\sqrt{x}\exp(-x)\times\left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(x)-I_{\frac{|m|+1}{2}}(x)\right], \tag{A4}$$

где $x=(z_0/z)^2(\rho/w_2)^2/(2q)$, $q=1-i(z_0/z)$, $z_0=kw_2^2/2$. С учётом асимптотики (9) при $r\to\infty$, вместо (А4) получим:

$$E(\rho,\theta,z)=ae^{-\rho^2/w_1^2(z)}+ \\ +\frac{b(-i)^{|n|+1}|n|}{2\pi}\left(\frac{z_0}{z}\right)\left(\frac{w_2}{\rho}\right)^2\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}+in\varphi\right),$$

тогда ТЗ по формуле (1) будет равен:

$$TC=\frac{n}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi}\frac{A(z)r^{-2}e^{\frac{ikr^2}{2z}+in\varphi}\mathrm{d}\varphi}{ae^{-\frac{r^2}{w_1^2(z)}}+A(z)r^{-2}e^{\frac{ikr^2}{2z}+in\varphi}}=n, \tag{A5}$$

где

$$A(z)=\frac{b(-i)^{|n|+1}|n|}{2\pi}\left(\frac{z_0w_2^2}{z}\right).$$

Так как экспонента в знаменателе стремится к нулю при $r\to\infty$ быстрее, чем обратный квадрат радиальной переменной, то в пределе в (А5) в знаменателе останется только второе слагаемое, которое сократится с таким же выражением в числителе. ТЗ (А5) будет равен n в поле, а в начальной плоскости ($z=0$) ТЗ поля (А3) будет равен либо нулю, либо n, в зависимости от соотношения радиусов перетяжки:

$$TC = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inbe^{-r^2/w_2^2+in\varphi}}{ae^{-r^2/w_1^2}+be^{-r^2/w_2^2+in\varphi}} = \frac{n}{2\pi}\lim_{r\to\infty}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\frac{a}{b}e^{-r^2\left(1/w_1^2-1/w_2^2\right)-in\varphi}+1} = \begin{cases} 0, & w_1 > w_2, \\ n, & w_2 > w_1. \end{cases} \quad (A6)$$

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: *alanko@smr.ru* .

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование, структурированные лазерные пучки. E-mail: *porfirev.alexey@smr.ru* .

ГРНТИ: 29.31.15
Поступила в редакцию 5 марта 2020 г. Окончательный вариант – 29 апреля 2020 г.

Birth of optical vortices in propagating fields with an original fractional topological charge

V.V. Kotlyar [1,2], A.A. Kovalev [1,2], A.P. Porfirev [1,2]
[1] IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,
[2] Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

In contrast to the orbital angular momentum (OAM), which is conserved on free space propagation, the topological charge (TC) of a paraxial optical vortex (OV) is not conserved in the general case. Here, we investigate a Gaussian beam with a fractional TC in the original plane and demonstrate both theoretically and numerically how the TC changes in the course of propagation. Depending on the proximity of the topological charge to an even or odd integer number, an optical vortex with the original fractional TC is shown to behave in a number of different ways. For simple OVs (Laguerre-Gaussian or Bessel-Gaussian modes), TC is conserved both in propagation and after weak phase distortions. An experiment shows that when scattered by a random phase screen, the integer TC of an OV is conserved right up to a random phase variation of π. Therefore, in the case of weak turbulences, it is expedient to measure a discretely varying TC instead of a continuously varying OAM.

Keywords: optical vortex, fractional topological charge, near-field diffraction, Fresnel diffraction, far-field diffraction.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Birth of optical vortices in propagating fields with an original fractional topological charge. Computer Optics 2020; 44(4): 493-500. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-715.

Acknowledgements: This work was partly funded by the RF Ministry of Science and Higher Education within a government project of FSRC «Crystallography and Photonics» RAS (Introduction and Conclusion), Russian Science Foundation (Project No. 18-19-00595, experiment), and Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-29-20003, theoretical results, and Project No. 18-07-01129, simulation results).

References

[1] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.

[2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A: Pure Appl Opt 2004; 6(2): 259-268.

[3] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992; 45(11): 8185.

[4] Soskin MS, Gorshkov VN, Vastnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carring optical vortex. Phys Rev A 1997; 56(5): 4064-4075.

[5] Leach J, Yao E, Padgett MJ. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam. New J Phys 2004; 6: 71.

[6] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. J Mod Opt 2007; 54(12): 1723-1738.

[7] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickmann JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. Opt Lett 2012; 37(21): 4552-4554.

[8] Wen J, Wang L, Yang X, Zhang J, Zhu S. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. Opt Express 2019; 27(4): 5893-5904.

[9] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. Phys Rev A 2017; 96(6): 063807.

[10] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chavez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum. Phys Rev Lett 2010; 105(5): 053904.

[11] Mourka A, Baumgartl J, Shanor C, Dholakia K, Wright EM. Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture. Opt Express 2011; 19(7): 5760-5771.

[12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Pofirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. Appl Opt 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.

[13] Gibson G, Courtial J, Padgett MJ, Vasnetsov M, Pasko V, Barnett SM, Franke-Arnold S. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. Opt Express 2004; 12(22): 5448-5456.

[14] Watkins RJ, Dai K, White G, Li W, Miller JK, Morgan KS, Jonson EG. Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams. Opt Express 2020; 28(2): 924-935.

[15] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. J Opt Soc Am A 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.

[16] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Beam transformations and nontransformed beams. Opt Commun 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams.

Received March 5, 2020. The final version – April 29, 2020.