МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИЗУЧЕНИИ ПРОЦЕНТНОГО РИСКА ДОЛГОСРОЧНЫХ ОБЛИГАЦИЙ

Попова Наталья Владимировна
кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова.
Адрес: ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова», 117997, Москва, Стремянный пер., д. 36.
E-mail**:** nat_popova_@mail.ru

В статье исследуется влияние одного из параметров облигации – срока до погашения – на ее процентный риск. Для долгосрочных облигаций этот вопрос в теории полностью не изучен. Сравниваются два способа решения задачи о влиянии срока до погашения на процентный риск облигации. Для этого использованы полученные автором результаты решения задач о зависимости от срока до погашения показателя дюрации Маколея и относительного изменения цены облигации. В обоих случаях задача решалась в условиях определенности при условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности ее перемещений. Для решения задач были использованы теоремы о числовых последовательностях и дифференцируемых функциях. Сравнение двух способов решения задачи показывает схожесть результатов, что позволяет уточнить зависимость процентного риска от срока до погашения для долгосрочных облигаций.
Ключевые слова: срок до погашения, дюрация Маколея, рыночная процентная ставка.

MATHEMATIC METHODS IN STUDYING INTEREST RISK OF LONG-TERM BONDS

Popova, Natalia V.
PhD, Assistant Professor, Professor of the Department for Higher Mathematics of the PRUE.
Address: Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997, Russian Federation.
E-mail: nat_popova_@mail.ru

The article investigates the influence of one parameter of bond, i. e. due date on its interest risk. This problem for long-term bonds has not been fully studied in theory. Two ways of solving the problem of affecting the bond interest risk by the due date were compared. To do this the results were used that had been obtained by the author through solving tasks about the dependence of Macaulay duration on the due date and relative changes in the bond price. In both cases the task was solved in conditions of certainty with horizontal nature of time structure of interest rates and parallel shifting. For these tasks theorems of digital rows and differentiated functions were applied. The comparison of two ways of solving the task shows similarity of results, which makes it possible to specify the dependence of the interest risk on the due date for long-term bonds.
Keywords: due date, Macaulay duration, market interest rate.

Процентный риск облигации – это риск снижения ее цены вследствие увеличения процентных ставок. Он является главным риском, с которым сталкивается каждый инвестор на рынке. После повышения ключевой ставки Банком России до уровня 17% ранее купленные ценные бумаги с фиксированным доходом существенно потеряли в цене, а многие инвесторы ушли с рынка.

Процентный риск имеет наибольший вес при инвестировании в облигации. Так как разные облигации по-разному реагируют на одно и то же изменение рыночной процентной ставки, то процентный риск – одна из важнейших характеристик облигации как объекта инвестирования. В связи с этим исследования факторов, влияющих на процентный риск облигации, представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Процентный риск облигации оценивают по величине относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении процентной ставки на заданную величину Δr. Относительное изменение цены облигации при изменении ее доходности является важным показателем рискованности этой облигации [4. – С. 53].

Влияние основных факторов (доходности, купонной ставки и срока до погашения) на величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ сформулировано в литературе по инвестициям. Так, зависимость процентного риска облигации от срока до погашения, как правило, формулируется аналогично следующему утверждению: «При заданных купонной ставке и начальной доходности, чем больше срок до погашения, тем выше изменчивость цены облигации»[1]. А вот характерное сообщение одного из интернет-ресурсов: «Чем больше срок до погашения, тем выше зависимость (или чувствительность) цены от изменений процентных ставок»[2]. Эти утверждения, очевидно, сформулированы на основе часто встречающихся рыночных наблюдений и отражают наиболее характерную зависимость процентного риска от срока до погашения. Однако отмеченная зависимость характерна не для всех видов облигаций: «Чем меньше времени остается до погашения облигации, тем меньше относительное изменение цены облигации (за исключением долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом)» [4. – С. 56]. Из приведенных высказываний можно заключить, что для долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом, вопрос о влиянии срока до погашения на процентный риск облигации полностью не изучен. В связи с этим нами была рассмотрена задача о зависимости относительного изменения цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ от срока до погашения [1].

На практике для оценки процентного риска используются модели дюрации. Известно, что дюрация представляет собой вполне адекватную меру процентного риска облигации. Например, при условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности ее перемещений при достаточно малых Δr процентный риск облигации (или портфеля облигаций) можно оценить по формуле

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r},$$

где D – дюрация Маколея;

r – значение внутренней доходности облигации в начальный момент времени.

Известны и другие показатели дюрации, учитывающие негоризонтальность временной структуры процентных ставок.

Ф. Дж. Фабоцци в своей работе отметил зависимость показателя дюрации от срока до погашения: «Важнейшим свойством дюрации является ее рост при увеличении срока погашения (при прочих равных ус-

[1] Фабоцци Ф. Дж. Управление инвестициями. – М. : Инфра-М, 2000. – (Университетский учебник). – С. 507.

[2] URL: http://fxfinans.com/protsentnyj-risk-obligatsij/

ловиях)»[1]. Вместе с тем У. Ф. Шарп, Г. Дж. Александер и Дж. В. Бэйли эту зависимость формулируют не столь однозначно: «Долгосрочные облигации при данном росте доходности, как правило, падают в цене сильнее, чем краткосрочные, за счет того, что они по сравнению с краткосрочными в среднем имеют более высокую дюрацию»[2]. Представляется, что оговорка «в среднем» означает, что нет однозначной зависимости от срока до погашения для всех облигаций – и краткосрочных, и долгосрочных. Действительно, «чем меньше времени остается до погашения облигации, тем меньше дюрация (за исключением долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом)» [4. – С. 63]. Снова можно сделать вывод о недостаточной изученности влияния срока до погашения теперь уже на показатель дюрации облигаций, продающихся с дисконтом. В связи с этим нами была рассмотрена задача о зависимости дюрации Маколея от срока до погашения [2]. Результаты этой работы позволяют косвенно установить зависимость процентного риска облигации от срока до погашения.

В работе Габриэля Хававини получено математическое доказательство влияния срока до погашения на показатель дюрации Маколея [5]. Для доказательства он использовал методы дифференциального исчисления. Единственной некорректностью в его работе является то, что число купонных периодов n, оставшихся до погашения облигации, не считается целым, при этом используется формула, справедливая для целого положительного n. Для получения доказательства нами было рассмотрено поведение членов числовой последовательности $\{D_n\}$, где D_n – дюрация облигации, до погашения которой остается n купонных периодов (лет) [2]. Здесь n одновременно и номер члена последовательности, который по определению может принимать только целые положительные значения.

Таким образом, работы [1] и [2] можно рассматривать как два способа решения задачи о влиянии срока до погашения облигации на ее процентный риск. Очевидно, что необходимо сравнить результаты этих работ. Их согласованность позволит уточнить зависимость процентного риска от срока до погашения для долгосрочных облигаций.

В обоих случаях задача решалась в условиях определенности при условии горизонтальности временной структуры процентных ставок и параллельности ее перемещений. Для решения задач использовались теоремы о числовых последовательностях, дифференцируемых функциях и об экстремумах функций. Приведем кратко формулировки доказанных утверждений и методы решения задач.

Для облигаций с купонными платежами один раз в год при фиксированных f (купонная ставка) и r (доходность к погашению) были доказаны следующие утверждения [2]:

1) если $f \geq r$, то последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей (облигация продается с премией или по номиналу);

2) если $f < r$, то существует срок $n_o = n_o(r)$, такой, что последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей при $n < n_o$ и убывающей при $n > n_o$ (облигация продается с дисконтом).

Последовательность $\{D_n\}$ является сходящейся в обоих случаях, причем значение ее предела $\frac{1+r}{r}$ не зависит от купонной ставки.

Доказательство утверждения 1 для случая $f \geq r$ получено на основании сравнения членов последовательности $\{D_n\}$ и применения метода математической индукции.

Для облигаций, продающихся с дисконтом ($f < r$), основные этапы доказательства следующие. Сначала обосновывается существование срока n_o. По определению

[1] Фабоцци Ф. Дж. Управление инвестициями. – С. 512.

[2] Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бэйли Дж. В. Инвестиции. – М. : Инфра-М, 1999. – (Университетский учебник). – С. 472–473.

$$D_n = \frac{f\sum_{i=1}^{n} ip^i + np^n}{f\sum_{i=1}^{n} p^i + p^n},$$

где $p = \frac{1}{1+r}$. Так как

$$\sum_{i=1}^{n} ip^i = \frac{p}{(1-p)^2} - \frac{p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p},$$

$$\sum_{i=1}^{n} p^i = \frac{p-p^{n+1}}{1-p},$$

то $D_n = \frac{f - fp^n + np^{n-1}a}{f(1-p) + p^{n-1}a}$,

где $a = p(1-p)(r-f) > 0$ при $f < r$.

Тогда для разности $D_{n+1} - D_n$ получим выражение

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{\left(f(1-p)+p^n a\right)\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)} B,$$

где $$B = p^{n+1}(1-p)^2 \cdot \left\{ fr\left[(f-r)\left(n-\frac{1}{r}\right)+(1+r)\right]+(r-f)^2 p^n \right\}.$$

Для сроков до погашения $n < \frac{1}{r}$ разность положительна: $D_{n+1} - D_n > 0$. С другой стороны, если $n = \frac{1}{r} + \frac{r+1}{r-f} + \frac{r-f}{rf}$, то разность $D_{n+1} - D_n < 0$. Значит, существует срок n_o, когда разность $D_{n+1} - D_n$ меняет знак с плюса на минус, т. е. принимает нулевое значение. Так как $p < 1$, то при условии $n \gg 1$, т. е. для достаточно больших сроков до погашения, влиянием слагаемого $(r-f)^2 p^n$ в выражении для B можно пренебречь. Тогда из условия $D_{n+1} - D_n \approx 0$ при $n \gg 1$ получено приближенное значение срока n_0:

$$n_o \approx \frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f}. \qquad (1)$$

Так как $B \approx p^{n+1}(1-p)^2 \cdot \{ fr(r-f)(n_0 - n) \}$ при условии $n \gg 1$, то $D_{n+1} > D_n$ для любого $n < n_o$ – последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей; и $D_{n+1} < D_n$, если $n > n_o$ – последовательность $\{D_n\}$ является убывающей. Значит, выражение (1) – приближенное значение срока максимума дюрации.

Доказанные утверждения, в том числе выражение (1) для приближенного срока максимума дюрации n_o, согласуются с работой Габриэля Хававини [5], а также с исследованиями Паоло Пьянка [6], где для отыскания срока максимума дюрации предлагается использовать функцию Ламберта *W*.

Заметим, что доказанные утверждения 1 и 2 для сроков $n < n_o$ подтверждаются наиболее характерными рыночными наблюдениями. При этом поведение дюрации облигации, продающейся с дисконтом, в области больших сроков до погашения имеет особенность: существует срок максимума дюрации.

Для облигации с купонными платежами один раз в год при фиксированных *f*, *r* и $\Delta r > 0$ нами были доказаны следующие утверждения [1]:

1) если $f \geq r$, то последовательность $\left\{ \frac{\Delta^{\pm} P_n(r)}{P_n(r)} \right\}$ является возрастающей (облигация продается с премией или по номиналу);

2) если $f < r$, то существует срок n_0, такой, что последовательность $\left\{ \frac{\Delta^{\pm} P_n(r)}{P_n(r)} \right\}$ является возрастающей при $n < n_o$ и убывающей при $n > n_o$ (облигация продается с дисконтом).

Последовательность $\left\{ \frac{\Delta^{\pm} P_n(r)}{P_n(r)} \right\}$ является сходящейся в обоих случаях, причем ее предел $\frac{\Delta r}{r \mp \Delta r}$ не зависит от купонной ставки. Здесь $\frac{\Delta^{\pm} P_n(r)}{P_n(r)}$ – относительный рост (снижение) котируемой цены облигации при изменении ее доходности на Δr, когда до погашения остается *n* купонных периодов. Для получения доказательств потре-

бовалось предварительно установить ранее не изученную зависимость величины изменения цены облигации при изменении срока до погашения от уровня доходности рынка [1; 3].

Основные этапы доказательства для случая $f < r$ (облигация продается с дисконтом) следующие. Сравниваются относительные снижения цены облигации в результате увеличения ее доходности на величину Δr при сроках до погашения n и $(n-1)$, т. е. n-й и $(n-1)$-й члены последовательности $\left\{\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)}\right\}$.

Тогда

$$\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)} - \frac{\Delta^- P_{n-1}(r)}{P_{n-1}(r)} =$$

$$= \frac{P_n(r+\Delta r)}{P_{n-1}(r)}\left[\frac{\Delta P_n(r+\Delta r)}{P_n(r+\Delta r)} - \frac{\Delta P_n(r)}{P_n(r)}\right],$$

где $\frac{\Delta P_n(r+\Delta r)}{P_n(r+\Delta r)}$ и $\frac{\Delta P_n(r)}{P_n(r)}$ – относительные изменения котируемой цены облигации при уменьшении срока до погашения на один купонный период (с n до $n-1$) при уровне доходности r и $r+\Delta r$ соответственно. Так как по формуле Тейлора при достаточно малых $\Delta r > 0$ имеет место приближенное равенство

$$\frac{\Delta P_n(r+\Delta r)}{P_n(r+\Delta r)} - \frac{\Delta P_n(r)}{P_n(r)} \approx \left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r \cdot \Delta r \ ,$$

то

$$\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)} - \frac{\Delta^- P_{n-1}(r)}{P_{n-1}(r)} \approx \frac{P_n(r+\Delta r)}{P_{n-1}(r)} \cdot \left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r \cdot \Delta r.$$

Учитывая поведение знака производной $\left(\frac{\Delta P_n}{P_n}\right)'_r$, получим:

$$\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)} - \frac{\Delta^- P_{n-1}(r)}{P_{n-1}(r)} = \begin{cases} > 0, & 2 \le n < n_o \\ < 0, & n > n_o \end{cases}.$$

Приближенное значение срока n_0, также как и формула (1), получено при условии $n \gg 1$, т. е. для достаточно больших сроков до погашения:

$$n_o \approx 1 + \frac{(r+1)(2r-f) + \sqrt{f^2(r-1)^2 + 4r(r-f+rf)}}{2r(r-f)}. \quad (2)$$

Доказанные в работе [1] утверждения 1 и 2 для сроков $n < n_o$ согласуются с приведенными выше сообщениями о влиянии срока до погашения на относительное изменение цены облигации. При этом поведение величины $\frac{\Delta^{\pm} P_n(r)}{P_n(r)}$ облигации, продающейся с дисконтом, в области больших сроков до погашения имеет ту же особенность, что и поведение дюрации [2] – существует срок максимума относительного изменения цены облигации.

В табл. 1 и 2 приведены вычисления членов последовательностей $\{D_n\}$ и $\left\{\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)}\right\}$ облигаций с купонной ставкой $f > r$ (облигация продается с премией) (табл. 1) и $f < r$ (облигация продается с дисконтом) (табл. 2).

Как видно из таблиц, результаты вычислений подтверждают доказанные утверждения о зависимости дюрации облигации и относительного изменения цены облигации от срока до погашения. В табл. 2 выделены строки, соответствующие точкам максимумов дюрации D_n и отношения $\frac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)}$.

Таблица 1

Зависимость $D_n(r)$ и $\Delta^- P_n(r)/P_n(r)$ от n
($A = 100$, $f = 10\%$, $r = 8\%$, $\Delta r = 0{,}1\%$, $f > r$)

n	$D_n(r)$	$\Delta^- P_n(r)/P_n(r)$
1	1,0000	0,0009
2	1,9106	0,0018
3	2,7424	0,0025
4	3,5042	0,0032
5	4,2037	0,0039
10	6,9658	0,0064
20	10,1823	0,0094
30	11,7966	0,0108

Таблица 2

Зависимость $D_n(r)$ и $\Delta^- P_n(r)/P_n(r)$ от n ($A = 100$, $f = 10\%$, $r = 13\%$, $\Delta r = 0{,}1\%$, $f < r$)

n	$D_n(r)$	$\Delta^- P_n(r)/P_n(r)$
1	1,0000	0,00088417
2	1,9068	0,00168527
3	2,7252	0,00240759
4	3,4604	0,00305590
5	4,1181	0,00363531
20	8,2440	0,00725052
30	8,633956	0,00758621
36	8,686191	0,00763014
37	8,690141	0,00763339
38	8,693267	0,00763594
40	8,697568	0,00763938
45	8,701289	0,00764208
46	8,701341	0,00764205
47	8,701262	0,00764192
50	8,700511	0,00764109

В табл. 3 приведены результаты вычисления срока n_o по формулам (1) и (2) для различных значений доходности $r > f$, а также точные значения n_o на основе непосредственных вычислений отношения $\dfrac{\Delta^- P_n(r)}{P_n(r)}$.

Таблица 3

Сравнение значений срока n_0 по формулам (1) и (2) ($A = 100$, $f = 10\%$, $\Delta r = 0{,}1\%$, $f < r$)

r	0,11	0,12	0,13	0,15	0,20	0,25
n_0 «точное»	115	63	45	30	18	13
n_D (1)	120,1	64,3	45,4	29,7	17,0	12,3
n_0 (2)	121,1	65,3	46,4	30,7	18,0	13,3

Как видно из табл. 3, формулы (1) и (2) дают близкие приближенные значения срока n_o, что позволяет говорить о согласованности результатов иследований для долгосрочных облигаций, продающихся с дисконтом [1; 2].

Сравнивая два способа решения задачи о влиянии срока до погашения на процентный риск облигации, можно сделать следующие выводы:

1. Результаты исследований согласуются между собой, что позволяет уточнить зависимость процентного риска облигации от срока до погашения для долгосрочных облигаций.

2. Для облигации, продающейся с премией или по номиналу ($f \geq r$), чем больше срок до погашения, тем больше процентное изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину, т. е. тем больше процентный риск облигации. Это утверждение справедливо как для краткосрочных, так и для долгосрочных облигаций, продающихся с премией или по номиналу.

3. Для облигации, продающейся с дисконтом ($f < r$), существует срок $n_o = n_o(r)$, где r – начальный уровень доходности облигации, такой, что чем больше срок до погашения n, не превосходящий n_o ($n \leq n_o$), тем больше процентное изменение цены облигации при изменении ее доходности на заданную величину. После срока n_o ($n > n_o$) процентное изменение цены облигации при изменении доходности на заданную величину и, следовательно, процентный риск облигации начинают уменьшаться с увеличением срока до погашения n.

Таким образом, долгосрочная облигация, продающаяся с дисконтом, со сроком до погашения $n > n_o$ при увеличении n становится менее чувствительной к изменению рыночной процентной ставки. Может возникнуть вопрос: почему случаи, когда процентный риск облигации начинает уменьшаться с увеличением срока до погашения, наблюдаются редко? Можно объяснить это следующим образом: срок n_o достаточно велик и реальные сроки до погашения большинства облигаций, продающихся с дисконтом, меньше n_o. Как показывают вычисления (табл. 3 и формулы (1) и (2)), чем больше разность $(r - f)$, тем меньше срок n_o, и если f значительно меньше r, при сроке до погашения $n > n_o$ становится возможным наблюдение убывания процентного риска облигации. Однако наиболее характерным для рынка яв-

ляется состояние, когда значение купонной ставки f близко к значению уровня рыночной доходности r и разность $(r - f)$ достаточно мала. Поведение процентного риска таких облигаций, судя по приведенным выше сообщениям, было замечено рынком, однако здесь необходимы специальные рыночные исследования.

4. Применение математических методов позволило уточнить зависимость процентного риска от срока до погашения для долгосрочных облигаций.

5. Результаты сравнения можно рассматривать как дополнение теории финансовых инвестиций в условиях определенности, которая является основой всей существующей теории финансовых инвестиций.

Заметим, что влияние срока до погашения на процентный риск облигации было рассмотрено при условии горизонтальности кривой рыночных доходностей и параллельности ее перемещений. В реальности кривая доходностей не является горизонтальной и ее сдвиги не обязательно параллельны. Тем не менее приведенные результаты исследования в целом подтверждаются рыночными наблюдениями и могут быть полезны в задачах портфельного и долгосрочного инвестирования.

Список литературы

1. *Попова Н. В.* Влияние срока до погашения на изменчивость цены облигации // Вестник Финансового университета. – 2013. – № 3 (75). – С. 72–84.

2. *Попова Н. В.* О некоторых свойствах дюрации Маколея // Вестник Финансового университета. – 2011. – № 1 (61). – С. 42–46.

3. *Попова Н. В.* Рыночные теоремы и их продолжение // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. – 2013. – № 7 (61). – С. 93–101.

4. Энциклопедия финансового риск-менеджмента / под ред. А. А. Лобанова и А. В. Чугунова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2009.

5. *Hawawini G. A.* On the Mathematics of Macaulay's Duration // Hawawini G. (ed.). Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contribution. – Garland, 1982.

6. *Pianca P.* Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula (June 6, 2005). – URL: http://ssrn.com/abstract=738445

References

1. Popova N. V. Vliyanie sroka do pogasheniya na izmenchivost' tseny obligatsii [The Impact of Due Date on Changeability of Bond Price]. *Vestnik Finansovogo universiteta* [Vestnik of the Finance University], 2013, No. 3 (75), pp. 72–84. (In Russ.).

2. Popova N. V. O nekotorykh svoystvakh dyuratsii Makoleya [Certain Features of Macaulay Duration]. *Vestnik of the Finance University*, 2011, No. 1 (61), pp. 42–46. (In Russ.).

3. Popova N. V. Rynochnye teoremy i ikh prodolzhenie [Market Theorems and their Extension]. *Vestnik Rossiyskogo ekonomicheskogo universiteta imeni G. V. Plekhanova* [Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics], 2013, No. 7 (61), pp. 93–101. (In Russ.).

4. Entsiklopediya finansovogo risk-menedzhmenta [Encyclopedia of Finance Risk Management], edited by A. A. Lobanov, A. V. Chugunov. 4th edition, revised and amended. Moscow, Al'pina Biznes Buks, 2009. (In Russ.).

5. Hawawini G. A. On the Mathematics of Macaulay's Duration. *Hawawini G. (ed.). Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contribution*. Garland, 1982.

6. Pianca P. Maximum Duration of Below Par Bonds: A Closed-form Formula (June 6, 2005). Available at: http://ssrn.com/abstract=738445