

ПРЕПОДАВАНИЕ ПСИХОЛОГИИ

Ю. П. Леонов, Е. Н. Соколов

Сферическая геометрия цветового пространства

Об определении цветового пространства. Для того чтобы представить, как наблюдатель воспринимает цвет, достаточно определить геометрию его внутреннего *цветового пространства* (ЦП), с которым связано ощущение цвета. Этой проблемой занимается не обычная классическая физика, а психофизика, включающая в исследования самого наблюдателя. Принятое в классической физике описание цвета через длину волны и яркость, конечно, недостаточно для представления о механизмах восприятия цвета наблюдателем.

Координаты ЦП обычно определяются на основании представлений о цвете и цветовом зрении. Например, физик Освальд создал в 1917 г. трехмерное ЦП. По вертикальной оси координат откладывается яркость ахроматических цветов, в ортогональной плоскости расположены чистые цветовые тона, определяемые доминирующей длиной волны. Эти координаты являются интуитивно понятными шкалами, которые можно использовать для описания цвета, однако сама модель Освальда отображает скорее его представления о ЦП, чем действительное ЦП наблюдателя. Изображение множества воспринимаемых цветов в выбранных координатах (цветовое тело) недостаточно для определения геометрии ЦП.

Существует довольно много эмпирических (дискриптивных) ЦП. Например, в ЦП Манселла (основанном на представлениях этого художника) в качестве координат используются более сложные шкалы цвета — светлота (value), насыщенность (saturation) и цветовой тон (hue), которые также не связаны с геометрией ЦП (Wyszecki, Stiles, 1982). Точное определение этих шкал вызывает трудности, тем не менее, система Манселла является национальной американской системой измерения цвета. Наиболее точным в принятом смысле является *линейное* ЦП, созданное Т. Юнгом (там же). Оно определено на основании фотометрических измерений в опыте сложения цветов, и его координаты измеряются с высокой точностью.

В линейном ЦП цвет представляется радиусом-вектором $Q(B, G, R)$ точки с координатами B, G, R . С математической точки зрения линейное ЦП — это пространство векторов, замкну-

тых относительно операций сложения векторов и умножения на число. Все цвета можно получить путем сложения и умножения на 3 — число единичных векторов, образующих систему координат. Единичные векторы в ЦП связаны с основными цветами. Любой цвет линейного пространства представляется вектором, заданным в координатной форме:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{B} + \mathbf{G}\mathbf{G} + \mathbf{R}\mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$ — координаты цвета, $\mathbf{B}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$ — базовые векторы основных цветов.

Уравнение (1) можно интерпретировать как векторную шкалу цвета, которая является далеко идущим обобщением скалярных шкал Фехнера и Стивенса.

Линейное векторное пространство хорошо известно. Однако применение его к цвету потребовало больших усилий. Нужно было показать, что ЦП действительно является линейным векторным пространством. На языке психофизики это означает, что любой цвет может быть представлен уравнением (1) как сумма основных цветов, которые можно выбирать неединственным образом. В опыте сложения цветов удалось определить точные цветовые характеристики наблюдателя — функции сложения цветов. Основная заслуга здесь принадлежит американским психофизикам, которые создали цветовые характеристики стандартного наблюдателя (W.D. Wright, J. Guild, 1929; по: Wyszecki, Stiles, 1982). Линейное пространство широко используется для определения координат цвета и различных вычислений. Однако одно обстоятельство в нем оставалось неясным — как следует измерять различие между цветами (цветовое различие). С самого начала было понятно, что цветовое различие не равно длине отрезка между точками ЦП. Это означает, что ЦП является неевклидовым. Так возникла проблема создания более точного ЦП.

Теоретически в пространстве можно определить много различных геометрий. Это обнаружилось после появления неевклидовой геометрии. Для цвета наиболее подходящим оказалось риманово пространство, определенное заданием расстояния между бесконечно близкими точками (Леонов, 2001). Риманово пространство с самого начала привлекло внимание исследователей. Попытку использования римановой метрики в конце XIX в. предпринял Гельмгольц, и затем в 1920 г. Э. Шредингер. В 1943 г. измерения малых цветовых различий, необходимых для оценки метрики риманова пространства, были проведены Д. Мак-Адамом (Wyszecki, Stiles, 1982). После этого риманово пространство заняло центральное место в исследовании цвета. Однако установить риманову метрику в ЦП не удалось, так как оценка линейного элемента риманова пространства, являющегося бесконечно малым цвето-

вым различием, оказалась невозможной в условиях собственных (нейрональных) шумов сетчатки. На основании опытов Д. Мак-Адама стало ясно, что геометрия ЦП на уровне порога вообще не является римановой. Можно лишь надеяться использовать риманову геометрию в качестве приближения для цветовых различий, превышающих порог. Но тогда следовало найти способ определения этой приближенной геометрии. Такую задачу пытались решить Гельмгольц и Шредингер, однако им тоже не удалось определить риманову метрику в условиях шумов. Оценка цветовых различий путем интегрирования линейного элемента для найденных римановых метрик давала результаты, расходящиеся с оценками наблюдателя. Пороговые цветовые различия также не определялись римановой метрикой.

Выход был найден в начале 1980-х гг. на основании экспериментальных исследований, касавшихся шкалирования ЦП для цветовых различий, превышающих порог (Соколов, Измайлов, 1984; Izmailov, Sokolov, 1991). Это позволило исключить влияние собственных шумов сетчатки и определить геометрию ЦП. В экспериментах использовалась специальная техника шкалирования пространства (многомерное шкалирование). В результате проведенных экспериментов оказалось, что все реальные цвета наблюдателя располагаются на сфере постоянного радиуса (гиперсфере) в 4-мерном пространстве с центром в начале координат. Таким образом, было показано, что для цветовых различий, превышающих порог, геометрия ЦП является римановой геометрией на поверхности гиперсферы (теоретическое исследование риманова ЦП см.: Леонов, 2001).

При переходе к ЦП на гиперсфере его размерность не увеличивается, хотя гиперсфера определена в 4-мерном пространстве. Как и в линейном пространстве, на поверхности гиперсферы положение точки определяется тремя координатами (тремя углами). Но при этом появляется четвертая координата и четвертый основной цвет. На поверхности гиперсферы ЦП “искривляется”, в искривленном пространстве можно правильно определить цветовое различие и, следовательно, более точно определить геометрию ЦП наблюдателя. Геометрия ЦП на гиперсфере не совпадает с геометрией линейного пространства.

Цветовые шкалы наблюдателя в римановом пространстве определяются его координатами (углами положения точки на гиперсфере). Таким образом, шкалы цвета связаны с геометрией ЦП, их нельзя выбирать произвольно, как это делается в дескриптивных цветовых системах.

Интересно отметить, что в 1929 г. группа физиков во главе с Диммиком теоретически рассмотрела 4-мерное ЦП. В частности, рассматривалось ЦП в гиперплоскости (Boring, 1951). Однако

выбор гиперплоскости оказался неудачным, так как согласно результатам работы Е.Н. Соколова и Ч.А. Измайлова (1984) противоречил наблюдениям. Выбор гиперплоскости послужил препятствием в развитии этой интересной идеи.

Видимая яркость цвета. Для перехода от линейного к риманову ЦП нам понадобятся уравнения видимой яркости тест-стимула, оцениваемой наблюдателем в опыте сложения цветов. Это одна из основных проблем в теории цвета. Она, к сожалению, неясно изложена в монографиях по цвету и требует дополнительного обсуждения.

Особенностью опыта сложения цветов является уравнивание цветовых потоков по цветности, а не по фотометрическим яркостям потоков. Таким образом, фотометрические яркости тест-стимула и яркости смеси трех основных цветов могут быть разными. Это можно выразить неравенством

$$B^* \neq B_1 + B_2 + B_3, \quad (*)$$

где B_1 , B_2 , B_3 — яркости основных цветов в лм, B^* — яркость тест-стимула в лм.

Можно заметить, что в (*) аддитивность яркости потоков основных цветов сохраняется.

Особенность опыта сложения (*) цветов связана со шкалой видимой яркости наблюдателя, отличной от простого суммирования яркостей световых потоков в фотометрии. Вследствие этого яркость различных цветовых потоков, с физической точки зрения, влияет на цвет смеси совершенно непредвиденным образом. Например, сложение красного, зеленого, синего потоков одинаковой яркости, равной 1 лм, дает поток синего цвета, а не белого, как мог бы ожидать физик. Синий цвет действует на сетчатку значительно эффективнее, и незначительное добавление синего цвета дает синий оттенок смеси, который и видит нормальный наблюдатель. С точки зрения физика, небольшое добавление потока синего не должно изменять цвет смеси. Таким образом, видимая яркость имеет существенное значение в опытах сложения цветов.

Видимую яркость монохроматических цветов можно определить уравнениями

$$L = k_m V(\lambda),$$

$$V(\lambda) = L_b b(\lambda) + L_g g(\lambda) + r(\lambda), \quad (2)$$

где $V(\lambda)$ — функция относительной спектральной чувствительности цветового зрения к монохроматическим цветам; k_m — коэффициент пропорциональности между энергетической и световой

яркостью; $b(\lambda)$, $g(\lambda)$, $r(\lambda)$ — функции сложения монохроматических цветов с единичной спектральной плотностью энергетической яркости $E(\lambda)=1$; L_b , L_g — коэффициенты яркости, принятые в системе B,G,R, CIE-31, $L_b:L_g:L_r=0.0601:4.5907:1$ (Wyszecki, Stiles, 1982).

Для произвольного цвета с энергетической плотностью $P(\lambda)$ видимая яркость наблюдателя определяется уравнением

$$L = k_m \int V(\lambda) P(\lambda) d\lambda. \quad (3)$$

Используя в (3) уравнение (2), получим для видимой яркости уравнение

$$L = L_b B + L_g G + R, \quad (4)$$

$$B = k_m \int b(\lambda) P(\lambda) d\lambda, G = k_m \int g(\lambda) P(\lambda) d\lambda, R = k_m \int r(\lambda) P(\lambda) d\lambda,$$

где B, G, R — координаты цвета. Уравнение видимой яркости (4) остается линейным, но отличается от сложения яркостей потоков в фотометрии наличием коэффициентов.

§ 1. Геометрия риманова цветового пространства. Рассмотрим свойства координат цвета в римановом пространстве на гиперсфере (см. также: Леонов, 2001). Гиперсфера в 4-мерном пространстве с координатами (u,v,w,s) определяется уравнением

$$u^2 + v^2 + w^2 + s^2 = 1. \quad (5)$$

Ее центр находится в начале координат, радиус принят равным единице. Уравнение гиперсферы можно записать в сферической системе координат (u,v,w,s) в виде:

$$u = \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, v = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma, w = \sin\alpha \cos\beta, s = \cos\alpha. \quad (6)$$

Уравнения (6) являются параметрическими уравнениями гиперсферы, отнесенными к углам (α, β, γ) . Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что (6) удовлетворяют уравнению (5). Из (6) следует, что координаты точек на поверхности (5) не превышают единицы. Показано (Леонов, 2001), что координаты B, G, R линейного пространства являются однородными (проективными) координатами 4-мерного пространства

$$B = u/s, G = v/s, R = w/s, s = 1/\rho, \rho^2 = B^2 + G^2 + R^2 + 1. \quad (7)$$

Уравнения получены проектированием точки M' на поверхность гиперсферы вдоль прямой $M'M$, направленной под углом α к оси o,s (рис.1).

Из уравнений (7) видно, что благодаря нормировке $1/\rho$ при переходе к координатам (u, v, w, s) значения последних не превышают единицы.

Координаты линейного ЦП на основании (6) и (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B &= \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \cos \gamma, & G &= \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ R &= \operatorname{tg} \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

На основном интервале периодических функций уравнения (8) определяют однозначное соответствие между координатами B, G, R и сферическими углами α, β, γ . На основании (8) для обратных координат имеем уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= B^2 + G^2 + R^2, \\ \operatorname{tg} \beta &= \sqrt{(B^2 + G^2)/R}, \\ \operatorname{tg} \gamma &= G/B. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно уравнениям (2) видимая яркость монохроматических цветов пропорциональна кривой относительной световой эффективности и определяется уравнением

$$L(\lambda) = V(\lambda) = L_b \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \cos \gamma + L_g \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \sin \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cos \beta, \quad (10)$$

$$\bar{b}(\lambda) = \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \cos \gamma, \quad \bar{g}(\lambda) = \operatorname{tg} \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad \bar{r}(\lambda) = \operatorname{tg} \alpha \cos \beta.$$

Для произвольного цвета, функция спектральной энергетической яркости которого равна $P(\lambda)$, видимая яркость цвета (точнее, цветового потока) определяется уравнением

$$L = \operatorname{tg} \alpha (L_b \sin \beta \cos \gamma + L_g \sin \beta \sin \gamma + \cos \beta),$$

где углы определяются на основании координат B, G, R .

Из уравнений видно, что угол α является шкалой яркости. Максимальная величина видимой яркости может быть бесконечной ($\operatorname{tg} \alpha = e$, $\alpha = \pi/2$). Цвета большой видимой яркости располагаются вблизи экваториальной плоскости гиперсферы.

Сфера спектральных цветов. Из уравнений (6) можно видеть, что тройка координат (u, v, w) определяет сферу в трехмерном подпространстве радиуса $\sin \infty$. Уравнения сферы в параметрическом виде и декартовых координатах имеют вид

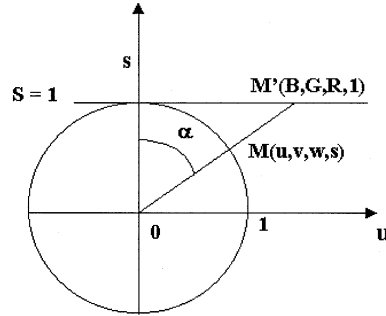


Рис. 1. Проекция цветового пространства на гиперсферу

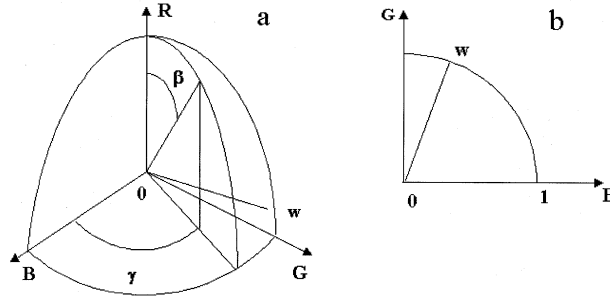


Рис. 2. Яркость монохроматических цветов

$$\begin{aligned} u &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \quad v = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad w = \sin \alpha \cos \beta, \\ u^2 + v^2 + w^2 &= \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Углы β , γ определяют положение точек на сфере. Центр сферы расположен на оси o , s в точке $s = \cos \alpha$ (см. далее § 3). На сфере (11) расположены спектральные цвета в диапазоне видимых волн. Уравнение (11) можно записать в координатах B , G , R линейного ЦП. Используя уравнения (8), получим сферу, определяемую уравнением (рис. 2, а)

$$B^2 + G^2 + R^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (12)$$

Уравнение (12) сферы можно записать для монохроматических цветов с единичной функцией спектральной плотности энергетической яркости $E_\lambda = 1$

$$\bar{b}^2 + \bar{g}^2 + \bar{r}^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad (12')$$

где $\bar{b}$, $\bar{g}$, $\bar{r}$ — функции сложения цветов системы CIE-31. По осям координат расположены основные цвета системы **B**, **G**, **R**.

Шкала монохроматических цветов $\operatorname{tg} \alpha$ (12') непостоянна. Она меняется в зависимости от длины волны. На рис. 3 изображена шкала яркости в зависимости от длины волны. Значение уравнения (12) становится понятным в римановой геометрии, где $\operatorname{tg} \alpha$ является шкалой яркости. Трудность интерпретации сферы (12) в линейном ЦП состоит в том, что видимая яркость цвета не равна длине вектора цвета. В линейной теории видимая яркость является линейной функцией координат (2). Радиус сферы определяет некоторую шкалу видимой яркости, неизвестную в линейном пространстве.

Сферу (12) можно спроектировать на плоскость B , G . Тогда в прямоугольных координатах B , G получится круговой сектор

спектральных цветов (рис. 2, б). Радиус окружности зависит от $\operatorname{tg} \alpha$. На дуге окружности расположены сине-зеленые цвета. В начале координат в плоскости В, G расположен красный цвет R. По осям координат расположены основные цвета В, G. На горизонтальной оси В, R располагаются пурпурные цвета, полученные смешением цветов В, R. На вертикальной оси располагаются цвета, полученные смешением G, R. Ввиду малости отрицательных значений функции $b(\lambda)$ линия спектральных цветов точно воспроизводит границу кругового сектора. Это является преимуществом кругового сектора по сравнению с треугольником цветности в системе b, g. Следует заметить, что цветовая плоскость В, G (рис. 2, б) не является диаграммой цветности. В ней используются обычные цветовые координаты.

Можно перейти к координатам цветности b, g, r , аналогичным координатам цветности линейной теории. Тогда в прямоугольных координатах b, g получится круговой сектор спектральных цветов с переменным радиусом, отличным от треугольника цветности в линейной теории. Различные спектральные цвета расположены на концентрических окружностях различных радиусов. На плоскости цветности, как известно, белый цвет располагается на биссектрисе $\gamma = \pi/4$.

Для перехода к риманову пространству в работе использована одна из основных систем координат линейного ЦП — система

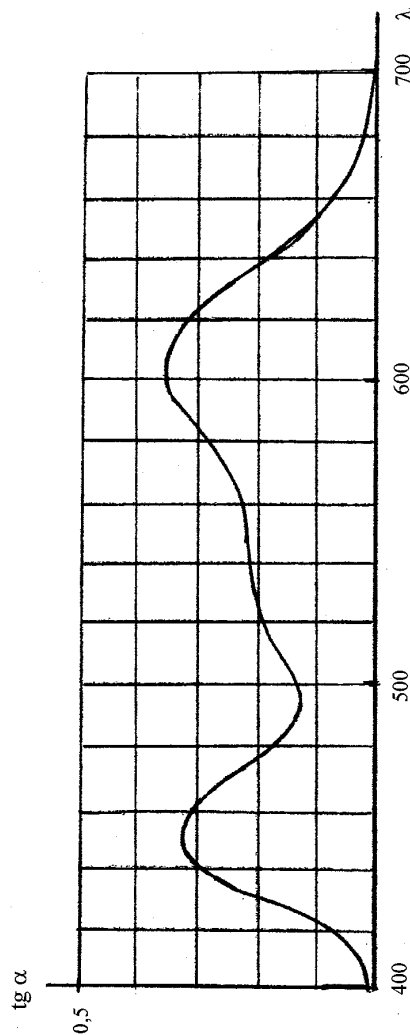


Рис. 3. Сфера видимых спектральных цветов

R,G,B (CIE-31). Эта система удобна, так как содержит основные характеристики стандартного наблюдателя. Однако в линейном ЦП можно использовать и другие системы координат, удобные с той или иной точки зрения. В этом случае необходимо провести линейное преобразование координат для перехода от стандартной системы CIE-31 к выбранной системе.

Положение белого цвета на сфере спектральных цветов. Прямая серых цветов в пространстве B,G,R. На цветовой сфере расположена точка белого цвета W. Координаты W можно определить на пересечении со сферой прямой серых цветов.

В линейном ЦП прямая серых цветов проходит через начало координат — точку черного цвета и точку белого цвета. Рассмотрим ЦП с ортогональными координатами B, G, R и единичными базовыми векторами $\mathbf{B}(1,0,0)$, $\mathbf{G}(0,1,0)$, $\mathbf{R}(0,0,1)$.

В выбранном пространстве можно определить серый цвет параметрическими уравнениями

$$B = L_b p, G = L_g p, R = p, \quad (13)$$

где p — параметр яркости, L_b , L_g , 1 — значения яркости синего, зеленого и красного цветов, $\mathbf{B}$ (435.8), $\mathbf{G}$ (546.1), $\mathbf{R}$ (700) CIE-31, совпадающие с коэффициентами яркости системы CIE-31, $L_b = 0.0601$, $L_g = 4.5907$, $L_r = 1$ (Wyszecki, Stiles, 1982).

Цвет, заданный уравнением (13), определяется наблюдателем как ахроматический. При различных значениях параметра p получаются также белые цвета различной яркости. При $p=0$ получается черный цвет. При малых значениях p цвет будет казаться серым, переходящим в черный.

Уравнения (13) определяют прямую ахроматических цветов. Выражения (13) являются обычными уравнениями прямой в пространстве с прямоугольными координатами B, G, R. Уравнения записаны в параметрической форме с параметром p . Вектор с координатами $(L_b, L_g, 1)$ — направляющий вектор прямой в ЦП, он определяет прямую серых цветов, на которой располагаются также белый и черный. Параметр p связан с видимой яркостью L ахроматических цветов уравнением

$$L = p(L_b + L_g + 1). \quad (14)$$

Следует отметить, что видимая яркость — одно из наиболее сложных понятий в теории цвета. Его сложность связана с наличием шкалы наблюдателя. Точное выражение шкалы яркости до настоящего времени неизвестно. Яркость ахроматических цветов зависит от условий наблюдения. Она может зависеть от предварительной адаптации наблюдателя к темноте или от наблюдения в условиях контраста (о влиянии различных условий на измеряемую

яркость см.: Padgham, Saunders, 1975). Уравнение (14) задает линейную стивеновскую шкалу яркости для некоторых условий наблюдения. В других условиях наблюдения иногда рассматривают фехнеровскую логарифмическую шкалу (Wyszecki, Stiles, 1982).

Определим координаты белого цвета W на цветовой сфере (12). Для этого удобно записать уравнение прямой ахроматических цветов в форме с единичным направляющим вектором. Уравнения (13) принимают вид

$$B/n=kr, G/m=kr, R/t=kr, k=\sqrt{L_b^2 + L_g^2 + 1}, \quad (15)$$

где $n = L_b/k$, $m = L_g/k$, $t = 1/k$ — координаты направляющего вектора единичной длины.

Подставляя (15) в уравнение сферы (12), получим для координат белого цвета

$$B_w = n \operatorname{tg} \alpha, G_w = m \operatorname{tg} \alpha, R_w = t \operatorname{tg} \alpha. \quad (16)$$

На основании (12) и (13) можно определить шкалу яркости ахроматических цветов

$$kr = \operatorname{tg} \alpha, \alpha = \operatorname{arctg} kr. \quad (17)$$

На основании (17) можно видеть, что угол α является шкалой яркости ахроматических цветов. Можно заметить, что шкала (17) отличается от шкалы яркости линейного ЦП (14). В частности, угол α ограничен при неограниченном возрастании параметра r . Шкала (17) уже не является ни степенной, ни логарифмической шкалой яркости. Она соответствует римановой геометрии ЦП наблюдателя.

Если положить $\operatorname{tg} \alpha = 1$, то координаты точки w на сфере единичного радиуса равны

$$B_w = n, G_w = m, R_w = t. \quad (16')$$

Определим углы положения белого цвета для значений коэффициентов яркости $L_b=0.0601$, $L_g=4.5907$, $L_r=1$, принятых в CIE-31. Координаты единичного направляющего вектора равны: $n=0.01279$, $m=0.9770$, $t=0.21282$. Координаты единичного вектора одновременно являются направляющими косинусами углов ψ_1, ψ_2, ψ_3 прямой относительно осей координат. Пользуясь этим, получим $\psi_1=89.26$, $\psi_2=12.31$, $\psi_3=77.71$. Найденные значения углов показывают, что направление прямой серых цветов в пространстве близко к направлению оси основного зеленого цвета (рис. 2, а).

§ 2. Сферическая геометрия в трехмерном цветовом пространстве, “расширение пространства”. Важно понять, почему при опре-

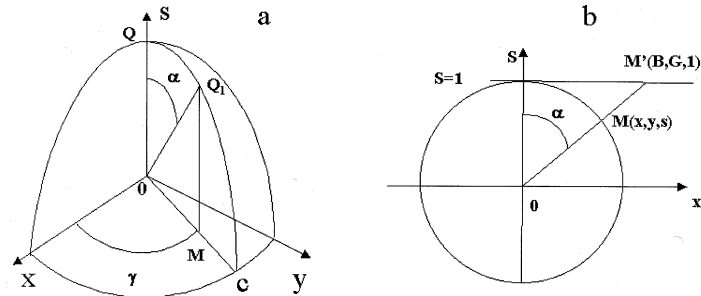


Рис. 4. Сферическая геометрия в трехмерном пространстве

делении цветовых различий происходит расширение ЦП и появляется четвертая координата. Для этого придется познакомиться со сферической геометрией. Вначале удобно рассмотреть геометрию на сфере в трехмерном пространстве. Рассмотрим сферу с центром в начале координат и с единичным радиусом в пространстве x, y, s (рис. 4). Пусть необходимо определить расстояние между точками $M_0(0, 0)$, $M(x, y)$. Наиболее просто выбрать расстояние равным длине отрезка M_0M . Вместо этого расстояние будет измеряться отрезком Q, Q_1 , расположенным на поверхности сферы (рис. 4, а). Точки M_0, M являются проекциями точек Q, Q_1 на плоскость x, y . Смысл такого определения расстояния состоит в использовании шкалы расстояний, отличной от евклидова расстояния на плоскости. Для этого необходимо искривить плоское пространство (x, y) . В частном случае это достигается путем перехода к расстоянию на сферической поверхности. В других случаях можно использовать другие поверхности. Таким образом, для формирования шкалы расстояний можно использовать поверхности в пространстве большего числа измерений по сравнению с размерностью плоскости x, y .

Определим величину расстояния Q, Q_1 на сфере. Для этого достаточно установить связь между координатами плоскости x, y и координатами точек Q, Q_1 , используя сферические координаты (рис. 4, а). Имеем

$$u = \sin\alpha \cos\gamma, v = \sin\alpha \sin\gamma, s = \cos\alpha.$$

Тогда цветовое различие, равное евклидову расстоянию между точками $Q(\sin\alpha \cos\gamma, \sin\alpha \sin\gamma)$ и $Q_1(0, 0)$, определяется выражением

$$\Delta L^2 = (\sin\alpha)^2 + (1 - \cos\alpha)^2.$$

После простого преобразования получим

$$\Delta L = 2 \sin (\alpha / 2). \quad (18)$$

Расстояние ΔL между Q, Q_1 определяется в плоскости большого круга сферы Q_1, O, C (рис. 4, а).

Расстояние Q, Q_1 можно выразить через координаты B, G плоскости, которая не совпадает с координатной плоскостью (x, y) . На рис. 4, б показана плоскость $s = 1$, параллельная координатной плоскости (x, y) . Необходимо перейти от координат B, G к координатам точки на поверхности сферы. Рассмотрим эту задачу подробнее. Можно спроектировать точку M' , лежащую в плоскости $s = 1$, на поверхность сферы вдоль прямой M, M' (рис. 4, б). Соотношение между координатами $M'(B, G, 1)$ $M(x, y, s)$ дается простым векторным уравнением

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}/r, \mathbf{q}(x, y, s), \mathbf{r}(B, G, 1). \quad (19)$$

Уравнение определяет радиус-вектор $\mathbf{q}$ единичной длины точки на поверхности сферы единичного радиуса. Вектор $\mathbf{r}$ определяет положение точки M' в цветовой плоскости $s = 1$. В координатной форме векторное уравнение записывается в виде

$$x=B/r, y=G/r, s=1/r, r^2=B^2+G^2+1. \quad (20)$$

Обратный переход определяется уравнениями

$$B=x/s, G=y/s. \quad (21)$$

Из (21) следует, что B, G являются проективными координатами пространства x, y, s . Пользуясь уравнениями (20), можно определить расстояние Q, Q_1 на основании

$$\Delta L^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta s^2. \quad (22)$$

Используя координаты точек $Q(0,0), Q_1(\operatorname{tg} \alpha \cos \gamma, \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma)$, получим также величину (18).

Приведенные чисто геометрические рассуждения относились к построению сферической шкалы расстояний между точками плоскости. Для этого использовались евклидовы расстояния между точками сферы. Евклидовы расстояния между точками на поверхности сферы, конечно, не равны евклидовым расстояниям на плоскости, здесь мы переходим в сферическую неевклидову геометрию.

Оказывается, что наблюдатель формирует свою шкалу цветовых различий именно так — переходя от трехмерного ЦП к гиперсфере в четырехмерном пространстве. Рассуждения в этом случае становятся более сложными. Однако они подобны приведенным

рассуждениям для трехмерного пространства. Для измерения цветовых различий в пространстве наблюдатель измеряет евклидовы расстояния на гиперсфере в четырехмерном пространстве (u, v, w, s) . Расстояния на поверхности гиперсферы определяются уравнением (22)

$$\Delta L^2 = \Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 + \Delta s^2, \quad (23)$$

где в правой части записаны разности координат точек.

ЦП B, G, R является ортогональным подпространством четырехмерного пространства (u, v, w, s) . Можно определить уравнения, связывающие координаты ЦП B, G, R с координатами u, v, w, s . В векторной форме уравнения совпадают с (19), где следует использовать векторы $\mathbf{q}(u, v, w, s)$, $\mathbf{r}(B, G, R, 1)$. Для координат четырехмерного пространства из (19) имеем

$$u = B/\rho, v = G/\rho, w = R/\rho, s = 1/\rho, \rho^2 = B^2 + G^2 + R^2 + 1. \quad (24)$$

Координаты ЦП являются проективными

$$B = u/s, G = v/s, R = w/s. \quad (25)$$

§ 3. Цветовые различия основных цветов. Структура риманова ЦП. Определим расстояния между положениями основных цветов на гиперсфере. Такими основными цветами являются синий, зеленый, красный, белый, черный. Для упрощения перехода к координатам u, v, w, s координаты основных цветов B, G, R в линейном ЦП были приняты равными единице.

$$\begin{aligned} \text{Синий: } (1, 0, 0), B=1, G=0, \\ \text{Зеленый: } (0, 1, 0) \quad B=0, G=1, R=0, \\ \text{Красный: } (0, 0, 1) \quad B=0, G=0, R=1, \\ \text{Белый: } (m, n, t) \quad B=m, G=n, R=t, \\ \text{Черный: } \chi(0, 0, 0). \end{aligned} \quad (26)$$

Основные цвета расположены на осях B, G, R (рис. 2, а). Численные значения координат белого цвета m, n, t получены на основании уравнения (16) для $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Углы α, β, γ , соответствующие основным цветам, определяются на основании уравнений (8). Для основных цветов они равны:

$$\begin{aligned} B(1, 0, 0) \alpha = \pi/4, \beta = \pi/2, \gamma = 0, \\ G(0, 1, 0) \alpha = \pi/4, \beta = \pi/2, \gamma = \pi/2, \\ R(0, 0, 1) \alpha = \pi/4, \beta = 0, \\ \chi(0, 0, 0) \alpha = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

На основании (6) и (27) определим координаты основных цветов на поверхности гиперсферы в четырехмерном пространстве

$$Q_b(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}), Q_g(0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), Q_r(0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (28)$$

Цветовые различия основных цветов

	B	G	R	W	BL
B	0	1	1	0.993	0.765
G	1	0	1	0.1516	0.765
R	1	1	0	0.887	0.765
W	0.993	0.1516	0.887	0	0.765
BL	0.765	0.765	0.765	0.765	0

$$W(n/\sqrt{2}, m/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), BL(0,0,0,1).$$

Из (28) непосредственно видно, что основные цвета лежат на гиперсфере единичного радиуса. Координаты белого цвета W определяются на основании уравнения (16) для $\text{tg}\alpha=1$. Отображением черного цвета $\chi(0,0,0)$ является цвет BL , находящийся на “северном” полюсе гиперсферы (см. рис. 1). Цвет BL отличается от обычного черного $\chi(0,0,0)$. Его координаты не равны нулю при отсутствии стимула (28). Поэтому вероятно, что BL может быть собственным цветом сетчатки (Гельмгольц).

Определим цветовые различия между основными цветами в четырехмерном пространстве. Различия равны евклидовым расстояниям (23) между соответствующими точками (28).

Таблица, в которой приведены значения цветовых различий основных цветов, симметрична относительно главной диагонали, где расположены нулевые расстояния между одинаковыми цветами. Цветовые различия между основными цветами B , G , R зависят от отношения их яркостей. Цветовые различия в таблице вычислены для отношения яркостей, равного единице: $L_B:L_G:L_R=1:1:1$. В системе B,G,R , CIE-31 для отношения яркостей основных цветов приняты значения 0.0601:4.5907:1. Для этого отношения яркостей координаты основных цветов на основании уравнений (24) оказываются равными $Q_B(0.0599, 0, 0, 0.99819)$, $Q_G(0, 0.977087, 0, 0.21284)$, $Q_R(0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. В этом случае на основании уравнений (23) получаются следующие значения цветовых различий между основными цветами: $L_{GR}=1.303$, $L_{BR}=0.7670$, $L_{BG}=1.254$. Эти значения точнее описывают экспериментальные данные (Соколов, Измайлов, 1984).

Рассмотрим определение расстояния между белым и зеленым цветами. Используя координаты белого и зеленого цветов из (28) для расстояния ΔL^2 , на основании (23) получим следующее выражение

$$\Delta L^2 = n^2/2 + (m-1)^2/2 + t^2/2 + 1/2 = 1 - m, \text{ где } n^2 + m^2 + t^2 = 1.$$

Следовательно, цветовое различие ΔL равно

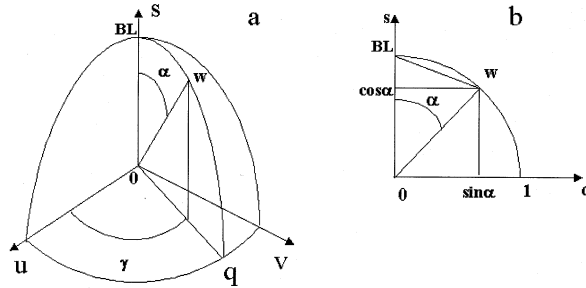


Рис. 5. Отображение прямой ахроматических цветов на гиперсферу

$\Delta L = \sqrt{1} - m = 0.1516$, где положено $m = 0.9770$ (см. § 2).

Как было установлено в § 2, белый цвет находится вблизи основного зеленого цвета. Найденное цветовое различие это подтверждает, так как ΔL значительно меньше единицы.

На основании (23) и (24) можно показать, что цветовое различие между произвольными цветами $M_1(B_1, G_1, R_1)$, $M_2(B_2, G_2, R_2)$ можно определить уравнением, подобным (18)

$$\Delta L = 2 \sin(\psi/2), \quad (29)$$

где ψ — центральный угол между векторами $\rho_1(B_1, G_1, R_1, 1)$, $\rho_2(B_2, G_2, R_2, 1)$, определяемый формулой скалярного произведения векторов

$$\cos \psi = \rho_1 \rho_2 / \rho_1 \rho_2.$$

Структура риманова цветового пространства. Как уже указывалось, размерность ЦП на поверхности гиперсферы при переходе от линейного ЦП не увеличивается, так как положение цвета определяется тремя углами α, β, γ . Однако гиперсфера расположена в пространстве четырех измерений, и необходимо понять, какой цвет формирует четвертое измерение.

Согласно (28), тремя основными цветами являются обычные основные цвета линейного ЦП. В нашем случае основными выбраны цвета В, Г, Р. Однако в качестве основных цветов линейного пространства можно выбрать какую-нибудь другую тройку. Четвертым основным является темный цвет BL, который увеличивает число измерений до четырех. Темный цвет расположен на четвертой оси о, s и имеет отличные от нуля координаты. Из таблицы цветовых различий ясно, что расстояния от BL до остальных основных цветов одинаковые. Следовательно, цвет BL является центром симметрии самосветящихся спектральных цветов, включая белый.

В римановом ЦП цвет BL играет особую роль. Он более точно описывает механизм восприятия серых цветов. Этот механизм связан с контрастом и оказывается более сложным по сравнению с представлением черного цвета в линейном ЦП точкой $\chi(0,0,0)$ с нулевыми координатами.

Прямая ахроматических цветов o, q (рис. 5, а) принадлежит ортогональному подпространству (u, v, w) и, следовательно, ортогональна прямой o, s 4-мерного пространства (u, v, w, s) . Введение прямой o, s , ортогональной подпространству (u, v, w) , означает введение дополнительно четвертой координаты ЦП.

Можно рассмотреть плоскость большого круга гиперболы в координатах (s, o, q) , проходящую через ось o, s . На рис. 5, б сфера спектральных цветов (11) в координатах (u, v, w) расположена в гиперплоскости $s = \cos \alpha$, ее центр расположен в точке $s = \cos \alpha$ оси o, s . Радиус сферы спектральных цветов на основании уравнений (11) равен значению координаты $q = \sin \alpha$. Центр сферы нулевого радиуса ($\alpha = 0$) располагается в точке черного цвета BL.

Дугу большого круга гиперболы BL, W, 1 можно считать отображением прямой ахроматических цветов, так как при изменении угла α изменяются координаты q и s . На дуге расположена точка W белого цвета. Цветовое различие между темным и белым цветами равно евклидову расстоянию BL, W и определяется выражением

$$\Delta L^2 = (\sin \alpha)^2 + (1 - \cos \alpha)^2 = 2(1 - \cos \alpha),$$

$$\Delta L = 2 \sin(\alpha/2).$$

Величина ΔL остается постоянной для всех спектральных цветов при $\alpha = \text{const}$, так как все цвета, включая белый, расположены в подпространстве $s = \cos \alpha$. Это подтверждается постоянным значением цветового различия между цветом BL и основными цветами В, Г, Р, W, приведенным в таблице для $\alpha = \pi/4$.

Из приведенных рассуждений следует, что ось o, s определяет не только положение цвета BL, но и структуру всего сферического ЦП.

Рассмотрим координатные гиперплоскости четырехмерного пространства (u, v, w, s) , определяемые уравнениями

$$u = 0, v = 0, w = 0, s = 0.$$

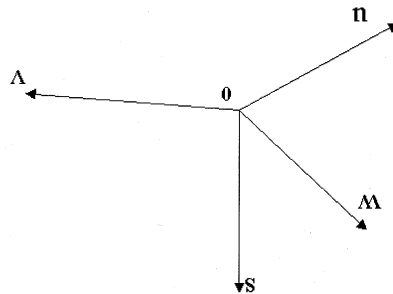


Рис. 6. Четырехмерное цветовое пространство

Уравнения гиперплоскостей задают соответственно ортогональные координатные подпространства (u, v, w) , (u, v, s) , (u, w, s) , (v, w, s) , являющиеся трехмерными. В отличие от координатных плоскостей пространства трех измерений в 4-мерном пространстве имеются четыре координатных подпространства. Условно 4-мерное ЦП можно представить на рис. 6, где между координатами (u, v, w) имеются прямые углы. Вокруг оси o, s расположены ортогональные подпространства (u, v, s) , (u, w, s) , (v, w, s) . Используя уравнения (24), можно перейти от координат произвольного ЦП к координатам любого из четырех подпространств. Координатные подпространства играют важную роль в преобразовании цветовых сигналов в сетчатке. Покажем это на примере анализа некоторых координатных подпространств. Для перехода к координатам (u, v, w) используются уравнения (24).

Согласно (24), координаты (u, v, w) пропорциональны линейным координатам ЦП с коэффициентами пропорциональности $1/\rho$. Для малых значений B, G, R

$$B^2 + G^2 + R^2 < 1, \rho \approx 1. \quad (30)$$

Уравнения (24) в этом случае близки к тождественному преобразованию. В частности, неравенство (30) выполняется для координат монохроматических цветов. Таким образом, при переходе к четырехмерному пространству функции сложения цветов с достаточной точностью сохраняются неизменными. Например, для системы CIE-31 с достаточной точностью можно положить

$$u = b, v = r, w = g.$$

Если условия (30) не выполняются, то координаты u, v, w связаны нелинейной зависимостью (24), определяемой сферической геометрией гиперсферы. Учитывая соотношение $\rho \cos \alpha = 1$ [см. уравнения (6) и (7)], можно представить уравнения (24) в виде

$$u = B \cos \alpha, v = G \cos \alpha, w = R \cos \alpha,$$

где угол α определяет видимую яркость. При увеличении угла α видимая яркость возрастает, и в предельном случае при $\alpha = \pi/2$ цвета располагаются на сфере [см. уравнение (11)]

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Координаты (u, v, w) можно также выразить через углы гиперсферы α, β, γ уравнениями

$$u = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, v = \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, w = \sin \alpha \cos \beta. \quad (31)$$

Уравнения (31) являются сферическими координатами сферы спектральных цветов (11) (см. рис. 2, а).

Рассмотрим другое координатное подпространство (u, v, s) .

В подпространстве (u, v, s) координаты можно определить уравнениями в зависимости от углов

$$u = \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma, v = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma, s = \cos\alpha. \quad (32)$$

Эти уравнения определяют некоторое ЦП. Цветовое тело пространства ограничено эллипсоидом вращения с уравнением в декартовых координатах u, v, s

$$(u/\sin\beta)^2 + (v/\sin\beta)^2 + s^2 = 1.$$

Угол β является параметром уравнения. В вершине эллипсоида $(0,0,1)$ располагается черный цвет, в начале координат $(0,0,0)$ — яркий зеленый цвет ($\beta = 0, u = v = 0, w = 1$).

Координаты монохроматических цветов пространства (u, v, s) определяются уравнениями (24). Координата видимой яркости s в системе (u, v, s) существенно отличается от координаты w в подпространстве (u, v, w) . Как уже указывалось, функции u, v близки к функциям сложения $b(\lambda), g(\lambda)$. Однако функция $s(\lambda)$ существенно отличается от $g(\lambda)$. Ее можно вычислить на основании уравнений (24), полагая

$$s = 1/\rho, \rho^2 = b^2 + g^2 + r^2 + 1.$$

Функция $s(\lambda)$ для монохроматических цветов имеет необычный вид, ее значения близки к единице во всем диапазоне длин волн.

Исследование координатных подпространств четырехмерного пространства имеет существенное значение в преобразовании цветковых сигналов сетчатки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Леонов Ю.П. Цветовые шкалы на поверхности четырехмерного пространства // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 14. Психология. 2001. № 4.
 Соколов Е.Н., Измайлов Ч.А. Цветовое зрение. М., 1984.
 Boring E.G. The color solid in four dimensions // Psychol. Experiment. 1951. Vol. 50.
 Izmailov Ch.A., Sokolov E.N. Spherical model of color and brightness discrimination // Psych. Sci. 1991. Vol. 2, N 4.
 Padgham C.A., Saunders J.E. The Perception of Light and Colour. London, 1975.
 Wyszecki G., Stiles W.S. Color Science. 2nd ed. N.Y., 1982.

Поступила в редакцию
21.12.04