

О МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается течение вязкой жидкости в пространстве между оболочкой и формирующей поверхностью. Выводится уравнение, описывающее движение жидкости в узкой щели переменной толщины.

Ключевые слова: вязкая жидкость, упругая оболочка, узкая щель переменной толщины.

В современной промышленности широко применяются различные покрытия специального назначения, которые наносятся на плоскую гибкую подложку тонким равномерным слоем. К таким покрытиям относятся, например, фотополупроводники, используемые в производстве солнечных батарей, покрытия светофильтров и многие другие. Чаще всего слой наносится способом распыления или окунания. При распылении необходимо снизить вязкость жидкости и наносить ее несколько раз, что усложняет процесс. В случае окунания слой получается неравномерной толщины.

Возможно нанесение равномерного слоя вязкой жидкости на гибкую подложку с помощью упругой оболочки, закрепленной на прямоугольном основании, и формирующего стекла. Под оболочку подается сжатый воздух и, деформируясь в сторону формирующего стекла, оболочка заставляет жидкость растекаться в направлении заделки оболочки (рис. 1). При этом прямоугольное основание также поднимается в направлении формирующего стекла до полного заполнения жидкостью покрываемого изделия.

Как правило, подложка имеет форму прямоугольника и при нанесении слоя возникает сложность при заполнении углов. Причина этого заключается в том, что основание, на котором закреплена оболочка, представляет собой прямоугольник, а фронт растекания жидкости при равномерном нагружении оболочки — овал. Поэтому для заполнения полимером всей площади необходимо, чтобы на поверхность оболочки было нанесено избыточное количество полимера. При этом площадь овала, описанного вокруг прямоугольника, на 40–45 % больше площади самого прямоугольника. Следовательно, столько же жидкости вытечет за пределы подложки и может стать непригодным к употреблению. Таким образом, одним из требований к такому способу нанесения слоя является заполнение жидкостью поверхности подложки с минимально необходимым ее количеством. Исходя из этого требования, следует, что фронт растекания жидкости должен достигать сторон прямоугольного основания почти одновременно. Это возможно, если скорость перемещения будет распределена по фронту растекания неравномерно. Для изучения процесса нанесения жидкости на подложку нужно составить математическую модель растекания жидкости в пространстве между стеклом и оболочкой. Жидкость и оболочка перемещаются, воздействуя друг на друга, и величина перемещения фронта растекания пропорциональна перемещению оболочки. Таким образом, для построения модели

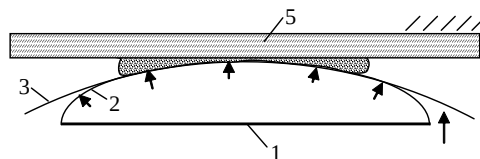


Рис. 1. Схема нанесения жидкости на поверхность:
1 — прямоугольное основание с заделкой оболочки;
2 — упругая мембрана; 3 — гибкая подложка;
4 — наносимый слой; 5 — формирующее стекло

нанесения жидкости на подложку необходимо получить решение двух взаимосвязанных динамических и нелинейных задач, заключающихся в определении:

- деформации оболочки, которая зависит от гидростатического давления, расстояния между стеклом и заделкой, положения жидкости в пространстве между стеклом и оболочкой;

- величины и направления перемещения фронта растекания жидкости, которое зависит от гидростатического давления и деформации оболочки.

Совместное решение поставленных задач связано со значительными трудностями, среди которых необходимо отметить следующие:

- оболочка деформируется под действием гидростатического давления и формирующего стекла, и при опускании стекла на оболочку происходит изменение деформации;

- течение жидкости происходит в пространстве с изменяющейся нелинейно границей.

Для решения разработана пошаговая схема расчета перемещения фронта растекания, алгоритм которого заключается в определении:

- расстояния между стеклом и заделкой при заданных размерах пятна контакта;

- деформации оболочки при заданных условиях (гидростатического давления, предварительного напряжения оболочки и т.п.), при фиксированном расстоянии от стекла до заделки;

- распределения давления в жидкости;

- скорости и направления перемещения фронта растекания при данной деформации оболочки;

- новой границы фронта растекания;

- новой границы пятна контакта;

- расстояния между формирующим стеклом и заделкой для следующего шага.

Далее алгоритм повторяется с п. 2 до тех пор, пока фронт растекания не достигнет заделки.

Определение расстояния между формирующим стеклом и заделкой

Из ранее проведенного эксперимента известно, что размеры пятна контакта изменяются обратно пропорционально расстоянию между стеклом и заделкой. Поэтому в качестве величины, по которой можно определить расстояние между стеклом и заделкой, использовано расстояние от начала координат, помещенных в центр оболочки, до границы пятна контакта по оси, расположенной вдоль длинной стороны. График зависимости расстояния между стеклом и заделкой от размеров пятна контакта для различных вариантов нагружения оболочки, показан на рис. 2. Если абсцисса равна нулю, то касание между стеклом и оболочкой происходит в точке, а величина, отложенная на оси ординат, представляет собой деформацию свободной оболочки. Прямые, показанные на рис. 2, описываются уравнением прямой. Таким образом, для нахождения расстояния между стеклом и заделкой необходимо знать лишь деформацию свободной оболочки при заданных начальных условиях нагружения. Эту величину легко получить в результате опытов.

Определение деформации оболочки

Для определения деформации оболочки использована теория деформации плоской пластины, закрепленной на прямоугольном контуре предварительно растянутой. В этом случае деформация описывается уравнением [1]:

$$D(\Delta^2 \omega) = N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - q, \quad (1)$$

где N_x, N_y — начальные напряжения; w — деформация пластины; D — жесткость пластины; Δ — оператор Лапласа. Учитывая, что жесткость оболочки близка к нулю, уравнение (1) запишется в виде:

$$N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = q, \quad (2)$$

где q — гидростатическая нагрузка на оболочке. Вследствие малой жесткости при деформации оболочки не имеет реактивного момента на заделке и граничные условия запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq X \leq A \\ \omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq Y \leq B, \end{aligned} \quad (3)$$

где A, B — длины сторон заделки. Считаем, что на границе пятна контакта оболочка закреплена жестко. Тогда граничные условия на границе пятна контакта можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad x, y \in \gamma \\ \omega = H, \quad x, y \in \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где γ — граница пятна контакта; Ω — внутренняя область пятна контакта; H — расстояние между стеклом и заделкой. Величина H является заданной заранее и определяется экспериментально. Таким образом, система уравнений (2), (3), (4) представляет собой задачу о деформации оболочки, закрепленной

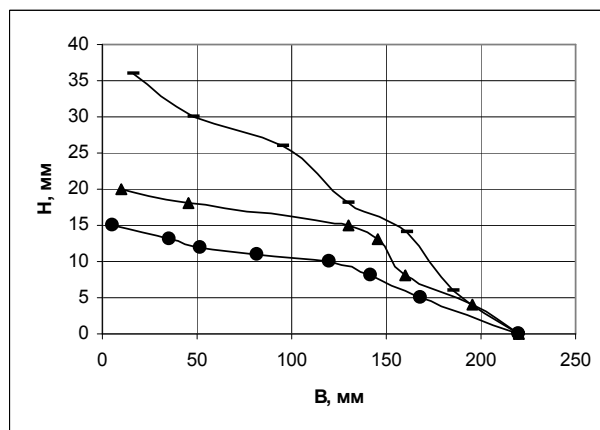


Рис. 2. Изменение расстояния между центром и границей пятна контакта в направлении оси OY:

γ — равномерное предварительное напряжение 1 %, давление под оболочкой $5 \cdot 10^3$ Па;
p — равномерное предварительное напряжение 1 %, давление под оболочкой;
— без предварительного напряжения, давление под оболочкой

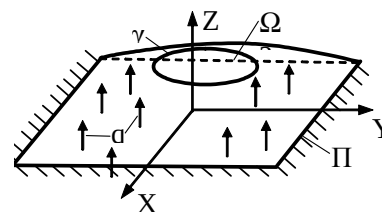


Рис. 3. Расчетная схема для определения деформации упругой оболочки

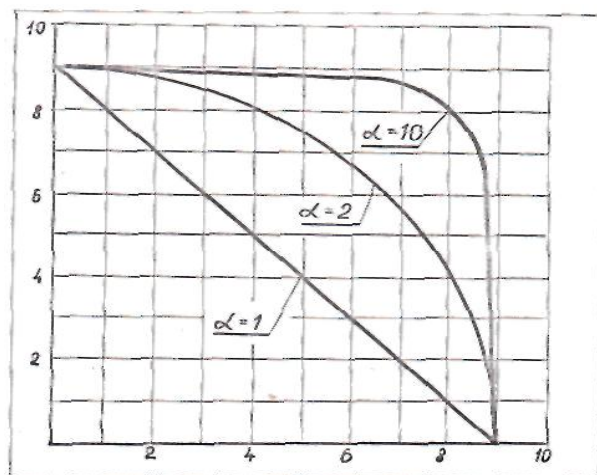


Рис. 4. Изменение кривизны линии с изменением показателя степени

на двух контурах, один из которых представляет собой прямоугольник, другой — криволинейную границу пятна контакта. Причем внутренняя область находится на высоте H над внешней. Расчетная схема для определения деформации оболочки показана на рис. 3.

При таком подходе к решению задачи необходимо знать форму и размеры пятна контакта, которую при заданных условиях определить затруднительно. Анализ предварительно проведенных экспериментов показывает, что форма пятна контакта при уменьшении величины H изменяется от эллипса с малым коэффициентом сжатия, до прямоугольника

с закругленными краями. Поэтому для задания начальной границы пятна контакта использована функция вида

$$\left(\frac{X}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{Y}{b}\right)^\alpha, \quad (5)$$

где a, b — размеры полуосей пятна контакта; α — произвольный показатель степени. При увеличении показателя степени линия, описываемая этим уравнением, будет приближаться к четверти прямоугольника, расположенного в первом квадранте. Изменение кривизны линии, описываемой уравнением (5) с изменением α показано на рис. 4. Численные значения α, A, B определяются экспериментально.

Уравнение (3) с граничными условиями (4) и (5) решается численно, например, с помощью программного модуля MAFCG2 [2], который рассчитывает значение деформации оболочки в каждом узле сеточной функции.

Определение величины и направления скорости перемещения фронта растекания

Будем считать, что:

— жидкость настолько вязкая, что можно пренебречь силами инерции, возникающими во время движения по сравнению с силами вязкого трения при скоростях растекания жидкости в предложенном устройстве (порядок скорости растекания — сантиметры в секунду);

— при указанных скоростях движение считаем безвихревым;

— перепад давлений в зоне течения полимера невелик, поэтому считаем, что жидкость несжимаема.

С учетом сделанных допущений уравнение Навье-Стокса [3] примет вид:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} P \approx \nu \Delta V, \quad (6)$$

Уравнение неразрывности для данного случая выглядит как

$$\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0. \quad (7)$$

Пространство между стеклом и оболочкой представляет собой цель переменной толщины, кровлей которой является стекло, а подошвой — поверхность оболочки. Схематичное изображение щели, в которой происходит течение, показано на рис. 5. Перейдем к криволинейным ортогональным координатам

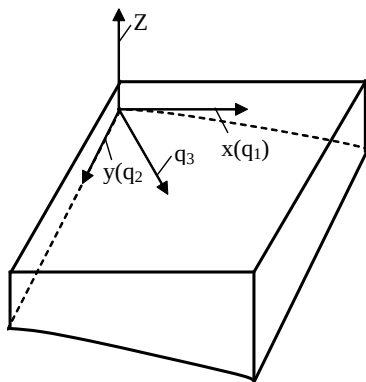


Рис. 5. Схематичное изображение узкой расширяющейся щели

q_1, q_2, q_3 , которые являются известными функциями от декартовых [4]. Так как кровля щели прямолинейна, совместим координатные оси q_1 и q_2 с кровлей, при этом они совпадут с декартовыми координатами X, Y . Криволинейную координату q_3 совместим с поверхностью оболочки. Отнесем члены уравнения (6) к криволинейным координатам и получим проекцию градиента давления на криволинейные оси:

$$(\text{grad} P)_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad (8)$$

а также проекцию лапласиана скорости на те же координатные оси, первая из которых равна:

$$\begin{aligned} (\Delta V)_1 \approx & \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \right. \\ & \times \left[\frac{\partial(H_2 H_3 V_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1 H_3 V_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_2 H_1 V_3)}{\partial q_3} \right] \Bigg\} - \\ & - \frac{1}{H_2 H_3} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_1} \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial(H_3 V_3)}{\partial q_1} \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial(H_1 V_2)}{\partial q_3} \right] \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где H_i — коэффициент Ламэ, равный

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right)^2}. \quad (10)$$

Остальные проекции лапласиана скорости на криволинейные оси получаются циклической перестановкой коэффициентов. Для слоя малой толщины изменение скоростей V_1 и V_2 вдоль координатной линии $q_3 = \text{const}$ должно происходить быстрее, чем вдоль координатной линии $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$ вследствие того, что $\partial q_3 \ll \partial q_2$ и $\partial q_3 \ll \partial q_1$. Это значит, что производными в уравнении (10) вида

$\frac{\partial V_i}{\partial q_1}, \frac{\partial V_i}{\partial q_2}$ можно пренебречь по сравнению с $\frac{\partial V_i}{\partial q_3}$.

Это же справедливо по отношению и ко вторым производным. С учетом сказанного, уравнение движения жидкости в узкой щели переменной толщины запишется в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial q_1} = \nu \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial(H_1 V_1)}{\partial q_3} \right] \\ \frac{1}{\rho} \frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial q_2} = \nu \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 V_2)}{\partial q_3} \right] \\ \frac{\partial P}{\partial q_3} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Первое из уравнений (11) интегрируется в виде:

$$H_1 V_1 = \frac{H_3^2}{\rho \nu} \frac{\partial P}{\partial q_1} \frac{q_3^3}{2} + \frac{H_3 H_1}{H_2} C_1(q_1, q_2) + C_3(q_1, q_2). \quad (12)$$

Функций C_1 и C_2 определяются из граничных условий прилипания жидкости к стенкам щели при $q_3 = 0, q_3 = 1$. Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{2} \frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{H_3^2}{\mu} \frac{\partial P}{\partial q_1}, C_2 = 0. \quad (13)$$

Следовательно,

$$V_1 = -\frac{1}{H_1} \frac{H_3^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial q_1} q_3 (1 - q_3), \quad (14)$$

и аналогично

$$V_2 = -\frac{1}{H_2} \frac{H_3^2}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial q_2} q_3 (1 - q_3), \quad (15)$$

Средние по толщине скорости равны:

$$V_1 = \frac{1}{H_3} \int_0^1 V_1 dq_3, \quad V_2 = \frac{1}{H_3} \int_0^1 V_2 dq_3, \quad (16)$$

Так как

$$\int_0^1 q_3 (1 - q_3) dq_3 = \frac{1}{6}, \quad (17)$$

то

$$V_1 = -\frac{H_3}{12\mu} \frac{1}{H_1} \frac{\partial P}{\partial q_1}, \quad V_2 = -\frac{H_3}{12\mu} \frac{1}{H_2} \frac{\partial P}{\partial q_2}, \quad (18)$$

существует связанный с давлением в жидкости потенциал средних по толщине скоростей

$$\varphi(q_1, q_2) = -\frac{P(q_1, q_2)}{12\mu}, \quad (19)$$

такой, что

$$V_1 = \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad V_2 = \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}. \quad (20)$$

Так как оси q_1 и q_2 совмещены с осями X и Y , то $H_1 = H_2 = 1$. Тогда

$$V_1 = H_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad V_2 = H_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}. \quad (21)$$

Вводя на основании уравнения неразрывности функцию тока средних скоростей Ψ такую, что:

$$V_1 = \frac{1}{H_1 H_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad V_2 = -\frac{1}{H_2 H_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \quad (22)$$

и приравнивал полученные значения для средних по толщине скоростей, имеем:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2 H_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_1 H_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}. \quad (23)$$

Поскольку сетка координатных линий на поверхности основания слоя изометрична, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3^3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3^3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}. \quad (24)$$

Продифференцировав первое уравнение (24) по $\frac{\partial}{\partial q_2}$, а второе по $\frac{\partial}{\partial q_1}$, и приравняв правые части получившихся уравнений запишем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_3^3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_3^3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (25)$$

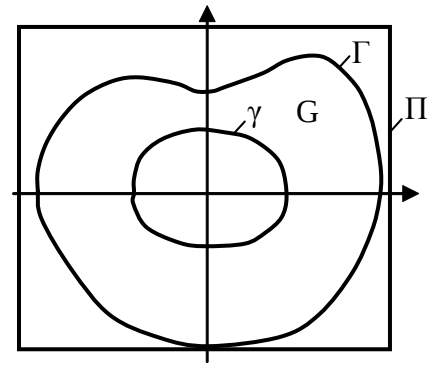


Рис. 6. Изображение двусвязной области для нахождения потенциала средних по толщине скоростей: Π — объемлющий прямоугольник; G — область растекания; Γ — внешняя граница области растекания; γ — внутренняя граница области растекания

Проделав те же операции по отношению к φ , получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \left(H_3^3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(H_3^3 \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (26)$$

Сделанные ранее допущения позволяют задать значения потенциала средних по толщине скоростей в точке А и В, т.е. на границе области, в которой ищется значение функции φ :

$$\varphi_\Gamma = \frac{Patm}{12\mu}, \quad \varphi \in \Gamma, \quad \varphi_\gamma = \frac{q}{12\mu}, \quad \varphi \in \gamma. \quad (27)$$

Таким образом, задача сводится к решению следующей: необходимо найти значение функции $\varphi(q_1, q_2)$ в двусвязной области G с внешней границей Γ и внутренней границей γ (рис. 6) посредством решения системы уравнений (26) и (27).

Аналитическое решение поставленной задачи не получено. Поскольку выражения (2) и (26) являются эллиптическими дифференциальными уравнениями, будем решать систему (26), (27) численно так же с помощью программного модуля MAFCG 2, который в данном случае позволяет получить численное значение потенциала средних по толщине слоя скоростей. Для определения направления перемещения жидкости в области воспользуемся функцией тока. Функция тока ортогональна функции потенциала средних по толщине скоростей. Физически это означает, что жидкость перемещается перпендикулярно линии равного напора, т.е. перпендикулярно линии равных значений потенциала средних по толщине скоростей. Следовательно, для определения направления перемещения жидкости необходимо определить линии равных значений потенциала. Зная распределение потенциала по площади, это легко сделать. Непосредственно направление перемещения фронта растекания находится следующим образом. Линии равного значения потенциала (к которым относятся граница пятна контакта и линия фронта растекания жидкости), заменяется отрезками. Из середины отрезка (рис. 7), соединяющего две соседние точки, принадлежащие границе пятна контакта, проводим перпендикуляр до пересечения с ближайшей линией равного значения потенциала. Затем из полученной точки продолжаем линию перпендикулярно отрезку, соединяющему две соседние

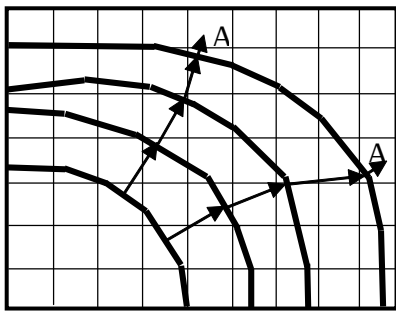


Рис. 7. Построение линии тока

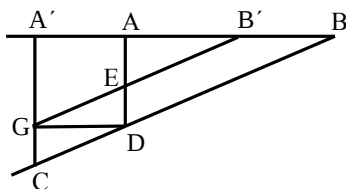


Рис. 8. Расчетная схема для определения новой границы пятна контакта

точки линии равного значения потенциала до пересечения со следующей линией равного значения потенциала.

Продолжая таким образом построение находим точку пересечения линии тока с фронтом растекания (на рис. 7 точка А). Скорость перемещения полученной точки будет направлена перпендикулярно отрезку, на котором лежит последняя точка пересечения. Концы векторов скорости являются границей нового фронта растекания. На основании полученных значений координат фронта растекания, а также новой границы пятна контакта, показанные операции повторяются до тех пор, пока фронт растекания не достигнет одной или нескольких сторон заделки.

Определение новой границы пятна контакта

Рассмотрим сечение щели, в котором происходит течение жидкости, вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат, помещенных в центр пятна контакта. Точка А, принадлежащая фронту растекания жидкости, и точка В, принадлежащая границе пятна контакта, расположены в этой плоскости. Точка С находится на поверхности оболочки (рис. 8).

Для упрощения считаем участок ВС оболочки прямой. Примем следующие допущения:

- давление в жидкости в точке В равно давлению под оболочкой, а в точке А равно атмосферному;
- участок ВС оболочки считаем жестким и неподвижным в данный момент времени.

Отрезок [А'А] представляет собой вычисленное расстояние, на которое переместится точка А, принадлежащая фронту растекания. Отрезки [А'А] и

[AD] — расстояние между оболочкой и стеклом в точках А и А' соответственно. Таким образом, требуется найти расстояние [В'В], на которое переместится точка В, принадлежащая границе пятна контакта.

Из условия неразрывности жидкости следует, что для заполнения площади А'ACD необходимо, чтобы площадь ABD уменьшилась на величину площади А'ACD. Это возможно, например, при параллельном переносе линии BD. Из элементарной геометрии известно, что в этом случае для равенства площадей А'AGD и В'BGD отрезки [А'А] и [В'В] должны быть равными. Следовательно, точки А и В, принадлежащие фронту растекания и границе пятна контакта соответственно, переместятся на одинаковую величину. При этом необходимо учесть, что направление перемещения точек А и В могут не совпадать.

Анализ математических зависимостей показал, что главным фактором, влияющим на процесс растекания жидкости в пространстве между формирующим стеклом и оболочкой, является распределение потенциала средних по толщине скоростей. В свою очередь, этот фактор, согласно (26), зависит от коэффициента Ламэ. Так как криволинейные координатные оси q_1 и q_2 совпадают с декартовыми координатами X и Y, то коэффициент Ламэ представляет собой расстояние между стеклом и оболочкой. Следовательно, процесс растекания зависит от размеров щели. Предложенный пошаговый алгоритм решения задачи о растекании вязкой жидкости в узкой щели переменной толщины содержит большое количество вычислений. Вследствие этого целесообразным является проведение теоретических экспериментов с помощью ЭВМ, в которых должен быть реализован алгоритм, показанный выше.

Библиографический список

1. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. — 635 с.
2. Программный модуль MAFCG2 / под ред. Е. С. Николаева // Сб. программ для решения сеточных уравнений. — М. : МГУ, 1984. — С. 48–56.
3. Лаврентьев, М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — 2-е изд. — М. : Гл. ред. физ.-мат. литературы изд-ва «Наука», 1977. — 408 с.
4. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа : учеб. для вузов / Л. Г. Лойцянский. — 7-е изд., испр. — М. : Дрофа, 2003. — 804 с.

ЛИТУНОВ Сергей Николаевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Оборудование и технологии полиграфического производства».

Адрес для переписки: litunov@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 12.12.2011 г.

© С. Н. Литун