УДК 539.3

Е.А. МАКАРЕНКОВ, А.В. СЯСЕВ, В.Ю. КЛИМ
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Получено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности с граничными условиями третьего рода для двухсвязной области длинного эксцентрического цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой эксцентрическое кольцо с расположенными на оси Ox центрами внутренней и внешней окружностей. Для решения поставленной краевой задачи использованы преобразования Лапласа и функции Бесселя первого и второго рода.

Ключевые слова: толстостенный полый эксцентрический цилиндр, нестационарные температурные поля, двухсвязная область.

Є.А. МАКАРЕНКОВ, А.В. СЯСЄВ, В.Ю. КЛИМ
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРУ

Отримано аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності з граничними умовами третього роду для двозв'язної області довгого ексцентричного циліндру, поперечний переріз якого має вигляд ексцентричного кільця з розташованими на осі Ox центрами внутрішнього та зовнішнього кіл. Для розв'язання задачі використано перетворення Лапласа та функції Бесселя першого та другого родів.

Ключові слова: товстостінний порожнистий ексцентричний циліндр, нестаціонарні температурні поля, двозв'язна область.

E.A. MAKARENKOV, A.V. SIASIEV, V.Y. KLYM
Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

THE SOLVING OF HEAT EXCHANGE TASK FOR HOLLOW CYLINDER

The analytical solution of the nonstationary heat exchange task with third-form boundary conditions for two-relations domain for long eccentric cylinder that centers of the internal and external ring are on the axes Ox is obtained. The Laplace transform and Bessel functions are used for solving task.

Key words: thick hollow eccentric cylinder, nonstationary temperature fields, two-relations domain.

Постановка проблемы

В сложных конструкциях для атомной энергетики, летательных аппаратов широко используются элементы, имеющие форму полого эксцентрического цилиндра. При воздействии высокотемпературного газового или жидкостного потока, проходящего через внутреннюю полость цилиндра, создается неравномерный нагрев стенок элемента, определяемый особенностью конструкции. Вместе с тем повышенный интерес наблюдается к вопросу исследования нестационарных температурных полей, возникающих в элементах конструкций вследствие кратковременного воздействия высоких температур. Определение наибольшей неравномерности распределения таких температурных полей, а значит и возникновение критического термонапряженного состояния элементов, позволит прогнозировать нарушения рабочих режимов эксплуатации конструкции в целом.

Анализ последних исследований и публикаций

Решение подобной задачи методом конечных интегральных преобразований для ограниченного цилиндра с непрерывно действующим источником тепла и граничными условиями третьего рода на трех границах приведено в работе [4]. Интегральные преобразования Фурье, Бесселя, Вебера первого и второго рода были использованы авторами работы [5] для решения нестационарных краевых задач в случае однородных цилиндричных круговых областей. В работах [7,8] подобная задача решена методом факторизации с использованием конечного интегрального преобразования смешанной задачи математической физики для кругового конечного цилиндра с заданной начальной температурой.

Формулирование цели исследования

Цель работы заключается в получении аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности с граничными условиями третьего рода для двухсвязной области.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим плоское температурное поле длинного эксцентрического цилиндра, поперечное сечение которого имеет вид (рис.1). Расстояние между центрами ограничивающих окружностей обозначим через *l*.

С каждой из ограничивающих полостей связываем свою систему координат x_m, y_m (m= 1,2), для которой выполняется соотношение [1]:

$$x_m + iy_m = r_m e^{i\theta_m}, \ (m=1,2). \tag{1}$$

При этом индекс 1 относится у внешнему контуру, индекс 2 – к внутреннему (рис.1).

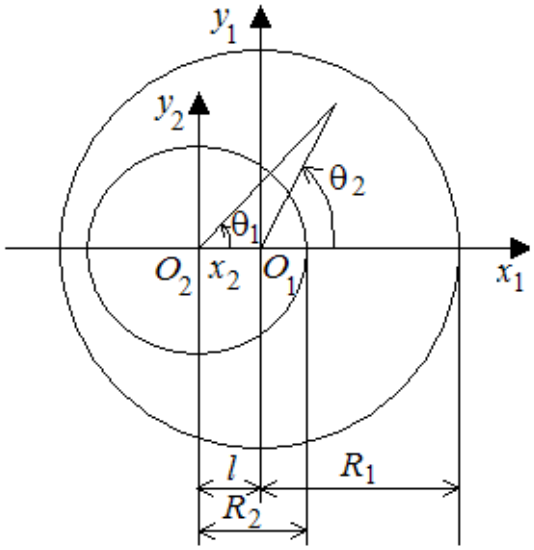


Рис. 1. Поперечное сечение эксцентрического цилиндра

Для определения неизвестного температурного поля T решаем уравнение теплопроводности:

$$\Delta T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \tag{2}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho_j^2} + \frac{1}{\rho_j}\frac{\partial}{\partial \rho_j} + \frac{1}{\rho_j^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2}$ (j=1,2); $\rho_1 = \frac{r_1}{R_2}$; $\rho_2 = \frac{r_2}{R_2}$; $\tau = \frac{at}{R_2^2}$; a – коэффициент температуропроводности; t– время при следующих граничных условиях:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho_j} - \gamma_j\left(T - T_c^{(j)}(\theta)\right) = 0, \quad \gamma_j = \frac{k_j(\theta)}{\lambda_T} \ (j=1,2); \quad \rho_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad \rho_2 = 1, \tag{3}$$

где $T_c^{(1)}(\theta)$, $T_c^{(2)}(\theta)$, $k_1(\theta)$, $k_2(\theta)$ – соответственно температуры и коэффициенты теплообмена среды на внешней и внутренней границах области. В качестве начального условия при $t = 0$ принималась температура $T = 0$.

Для решения поставленной краевой задачи (2), (3) применим преобразования Лапласа [2]. Тогда уравнение (2) в изображениях записывается следующим образом:

$$\Delta T^* + \beta T^* = 0, \qquad \beta^2 = -S. \tag{4}$$

Граничные условия в изображениях примут вид:

$$\frac{\partial T^*}{\partial \rho_1} - \gamma_1\left(T^* - \left(T_c^{(1)}\right)^*\right) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial \rho_2} - \gamma_2\left(T^* - \left(T_c^{(2)}\right)^*\right) = 0. \tag{5}$$

Решением задачи (4), (5) является следующее соотношение:

$$T^* = T_1^* + T_2^*,$$

где T_1^* – температурное поле в сплошном цилиндре; T_2^* – температурное поле, обусловленное наличием произвольно расположенной полости.

Принимая во внимание периодический закон изменения неизвестной функции вдоль координаты θ, запишем выражения:

$$T_1^* = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(1)} J_n(\beta\rho_1) + B_n^{(1)} N_n(\beta\rho_1)\right]\left[A_n^{(2)} \cos n\theta_1 + B_n^{(2)} \sin n\theta_1\right],$$

$$T_2^* = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n^{(3)} J_n(\beta\rho_2) + B_n^{(3)} N_n(\beta\rho_2)\right]\left[A_n^{(4)} \cos n\theta_2 + B_n^{(4)} \sin n\theta_2\right],$$

где $J_n(\beta\rho_i)$, $N_n(\beta\rho_i)$, $(i=1,2)$ – функции Бесселя первого и второго рода.

Так как температура на оси сплошного цилиндра ($\rho_1 = 0$) должна быть конечной, функция T_1^* не должна содержать бесселеву функцию второго рода, которая стремится к бесконечности при $\rho_1 \to 0$, следовательно $B_n^{(1)} = 0$, с другой стороны функция T_2^* не может содержать бесселеву функцию первого рода от мнимого аргумента $\beta = i\sqrt{s}$, так как она стремится к бесконечности при $\rho_2 \to \infty$ и поэтому $B_n^{(3)} = 0$. Из условия симметричности температурного поля относительно оси, проходящей через точки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, находим, что $B_n^{(2)} = B_n^{(4)} = 0$.

Таким образом, общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(1)} J_n(\beta\rho_1)\cos n\theta_1 + C_n^{(2)} N_n(\beta\rho_2)\cos n\theta_2\right]. \qquad (6)$$

Сведем рассматриваемую температурную задачу к бесконечной системе уравнений в области изображений [3]. Для удовлетворения граничных условий на внешнем (ρ_1, θ_1) и на внутреннем (ρ_2, θ_2) контурах необходимо представить решение (6) соответственно в системах (ρ_1, θ_1) или (ρ_2, θ_2). Для этого применим теорему сложения функций кругового цилиндра.

Представим связь между двумя произвольно расположенными системами координат следующим образом (рис. 2).

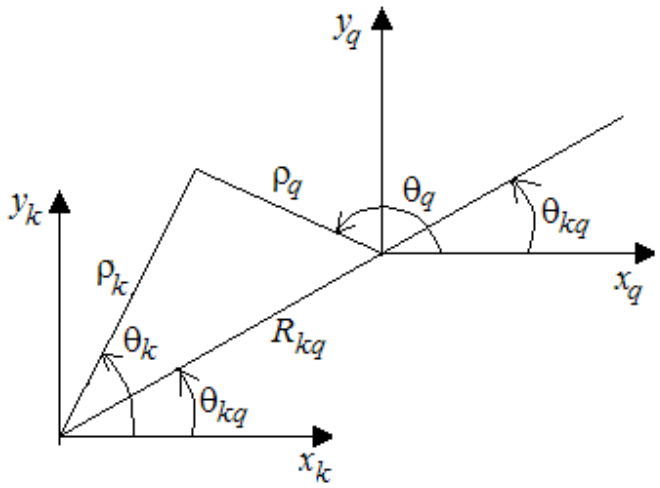


Рис. 2. Связь между двумя произвольно расположенными системами координат

Приведем теорему сложения цилиндрических функций для двух случаев [1]:

1) если $\rho_k < R_{kq}$

$$b_n(\beta\rho_q)\cos n\theta_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_{n-p}(\beta R_{kq}) J_p(\beta\rho_k)\left[\cos(n-p)\theta_{kq}\cos p\theta_k - \sin(n-p)\theta_{kq}\sin p\theta_k\right];$$

2) если $\rho_k > R_{kq}$

$$b_n(\beta\rho_q)\cos n\theta_q = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(\beta R_{kq}) b_p(\beta\rho_k)\left[\cos(n-p)\theta_{kq}\cos p\theta_k - \sin(n-p)\theta_{kq}\sin p\theta_k\right].$$

На рис. 1 представлена двухсвязная область. Положение произвольной точки в первой и второй системах координат описывается следующим образом: $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$; $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. Таким образом, для внешнего контура можно записать , что $z_1 = z_2 - l$, $q=1$, $k=2$, $R_{21} = l$, $\theta_{21} = 0$; для внутреннего контура – $z_2 = z_1 + l$, $q=2$, $k=1$, $R_{12} = l$, $\theta_{12} = \pi$.

В этом случае теорема сложения функций Бесселя первого и второго рода имеет соответствующий вид для случаев:

1) при $\rho_k = \rho_2 < l$ имеем:

$$J_n(\beta\rho_1)\cos n\theta_1 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(\beta l) J_p(\beta\rho_2)\cos p\theta_2 =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} J_{n-p'}(\beta l) J_p(\beta\rho_2)\cos p\theta_2 + \sum_{p=1}^{\infty} J_{n+p'}(\beta l) J_{p'}(\beta\rho_2)\cos p\theta_2,$$

где $p' = -p$.

С учетом того, что $J_{-p} = (-1)^p J_p$, получим следующее выражение:

$$J_n(\beta\rho_1)\cos n\theta_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] J_p(\beta\rho_2)\cos p\theta_2 , \qquad (7)$$

где $\varepsilon_p = 0{,}5$ при $p = 0$ и $\varepsilon_p = 1$ при $p > 0$.

2) при $\rho_k = \rho_1 > l$ имеем:

$$N_n(\beta\rho_2)\cos n\theta_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] J_p(\beta\rho_1)\cos p\theta_1 . \qquad (8)$$

Таким образом, используя соотношения (7), (8), для двух систем координат общее решение (6) представим следующим образом:

1) в системе координат (ρ_1, θ_1)

$$T^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(1)} J_p(\beta\rho_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(2)} \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] N_p(\beta\rho_1) \right\} \cos p\theta_1 ; \qquad (9)$$

2) в системе координат (ρ_2, θ_2)

$$T^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(2)} N_p(\beta\rho_2) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(1)} \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] J_p(\beta\rho_2) \right\} \cos p\theta_2 . \qquad (10)$$

Представим $\left(T_c^{(1)}\right)^*$, $\left(T_c^{(2)}\right)^*$ в виде рядов Фурье

$$\left(T_c^{(1)}\right)^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left(T_c^{(1)}\right)_p \cos p\theta_1 , \qquad \left(T_c^{(2)}\right)^* = \sum_{p=0}^{\infty} \left(T_c^{(2)}\right)_p \cos p\theta_2 , \qquad (11)$$

где $\left(T_c^{(1)}\right)_p$, $\left(T_c^{(2)}\right)_p$ – коэффициенты рядов Фурье.

После подстановки выражений (9) – (11) в граничные условия (5), получаем следующие зависимости:

$$-\gamma_1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(T_c^{(1)}\right)_p \cos p\theta_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(1)} \left[\beta J_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 J_p(\beta\rho_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(2)} \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] \left[\beta N_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 N_p(\beta\rho_1) \right] \right\} \cos p\theta_1 , \qquad (12)$$

$$-\gamma_2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(T_c^{(2)}\right)_p \cos p\theta_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ C_p^{(2)} \left[\beta N_{p'}(\beta) + \gamma_2 N_p(\beta) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n^{(1)} \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] \left[\beta J_p(\beta) - \gamma_2 J_p(\beta) \right] \right\} \cos p\theta_2 . \qquad (13)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_p^{(1)} = \beta J_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 J_p(\beta\rho_1) , \qquad A_p^{(2)} = \beta N_{p'}(\beta) + \gamma_2 N_p(\beta) ,$$

$$A_{np}^{(1)} = \varepsilon_n \left[J_{n-p}(\beta l) + (-1)^p J_{n+p}(\beta l) \right] \left[\beta N_p(\beta\rho_1) - \gamma_1 N_p(\beta\rho_1) \right],$$

$$T_p^{(1)} = -\gamma_1\left(T_c^{(1)}\right)_p, \qquad T_p^{(2)} = \gamma_2\left(T_c^{(2)}\right)_p.$$

Приравняем левые и правые части зависимостей (12) и (13) при одинаковых гармониках и получим две бесконечные системы алгебраических уравнений с неизвестными $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$:

$$A_p^{(1)} C_p^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{np}^{(1)} C_n^{(2)} = T_p^{(1)}, \quad p = 0,1,.... , \tag{14}$$

$$A_p^{(2)} C_p^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{np}^{(2)} C_n^{(1)} = T_p^{(2)}, \quad p = 0,1,.... . \tag{15}$$

Исследование квазирегулярности и единственности решения бесконечности систем при условии, что параметр β ограничен, проведено по аналогии с работой [4]. Решение бесконечной системы уравнений (14), (15) осуществлено в нулевом приближении [3].

Выводы

В результате исследования получено аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для эксцентрического полого цилиндра с поперечным сечением в виде эксцентрического кольца, которое позволило получить достаточно простые решения поставленной задачи.

Список использованной литературы

1. Гузь, О. М. Про застосування теореми додавання циліндричних функцій до розв'язування лінійних задач механіки у випадку скінченних багатозв'язних областей / О. М. Гузь // Доп. АН УРСР. – 1966. – №8. – С. 996 – 999.
2. Гузь, О. М. Задача Діріхле для рішення Гельмгольца для ексцентричного кільця / О. М. Гузь // Доп. АН УРСР. – 1966. – №10. – С. 1271 – 1275.
3. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – С. 30 – 56.
4. Кащеев, М. В. Решение задачи теплопроводности для цилиндра конечных размеров с внутренними источниками тепла / М. В. Кащеев // Журнал Ученые записки Российского гос. соц. ун-та., 2009. – №7 (1). – С. 218 – 222.
5. Конет, І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Камянець-Подільс. держ. пед. ун-т. – Чернівці: Прут, 2001. – 310 с.
6. Лыков, А. В. Теория теплопроводности/ А. В. Лыков. – М.: Всшая школа, 1967. – 600 с.
7. Макаренков, Е. А. Температурное поле теплоизолированного по торцам цилиндра при конвективном теплообмене на образующих/ Е.А. Макаренков, А. В. Сясев // Дніпропетровськ, ДНУ: Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка.– 2015. – Т. 23. – № 5. – Вип. 19. – С. 9 – 14.
8. Siasiev, A.V. Mathematical simulation of building up the shells of heated bodies of revolutio / A.V. Siasiev, A.A. Siasieva // Topical areas of fundamental and applied research V. Proceedings of the Conference. North Charleston, USA, 22-23.12.2014.– CreateSpace, 2015. – Vol. 1. – P. 131-133.