УДК 528.14
В.Е. Мизин
СГГА, Новосибирск

О СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБКАХ ПОВТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрен вопрос обнаружения систематических ошибок путем сравнения результатов оценки точности измерений до уравнивания, по разностям двойных измерений и после уравнивания с использованием доверительного оценивания.

V.Ye. Mizin
Siberian State Academy of Geodesy (SSGA)
10 Plakhotnogo Ul, Novosibirsk, 630108, Russian Federation

SYSTEMATIC ERRORS IN REPEATED MEASUREMENTS

The problem of systematic errors detection is considered. Measurement accuracy results evaluated before the adjustment by differences of double measurements are compared with those evaluated by confidence after the adjustment.

Двойные и повторные измерения, выполняемые, в частности, с целью мониторинга земель линейного объекта, могут содержать одинаковые систематические ошибки, которые будут погашаться в разностях соответствующих измерений. Обнаружить подобные ошибки можно сравнением данных оценки точности измерений до и после уравнивания [1].

При мониторинге линейных объектов часто единственным способом оценки точности измерений до уравнивания становиться оценка «по разностям двойных измерений» $d_i = x_i - x'_i$:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad \text{или} \quad \mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \qquad (1)$$

– Средняя квадратическая ошибка равноточных измерений и средняя квадратическая ошибка единицы веса неравноточных измерений, при несущественном значении остаточной систематической ошибки ($\delta = 0$);

$\delta = [d]/n$ или $\delta = [pd]/[p]$,

p_i – вес результата измерения.

Если остаточная систематическая ошибка существенна,

$$m = \sqrt{\frac{[(d')^2]}{2(n-1)}} \quad \text{или} \quad \mu = \sqrt{\frac{[(pd')^2]}{2(n-1)}} \qquad (2)$$

– Средние квадратические ошибки измерений при $\delta \neq 0$; $d'_i = d_i - \delta$.

Наличие остаточной систематической ошибки устанавливают по допускам типа [1]:

$$|[d]| \le 2{,}5[|d|]/\sqrt{n} \quad \text{или} \quad |[P_d d]| \le 2{,}5[|P_d d|]/\sqrt{[P_d]}. \qquad (3)$$

Для решения поставленной задачи предлагаем использовать методику доверительного оценивания параметров.

Пусть выполнена оценка точности равноточных двойных измерений при условии полной компенсации систематических ошибок в разностях двойных измерений, $\delta = 0$. Если число измерений $n < 20$. доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ имеет вид:

$$P(\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m) = \beta, \qquad (4)$$

где γ_1 и γ_2 зависят от доверительной вероятности β, близкой к единице (0,90 ÷ 0,99), и числа степеней свободы $r = n$, если средняя квадратическая ошибка вычисляется по формуле Гаусса

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad (5)$$

$r = n - 1$, если средняя квадратическая ошибка результата измерения вычисляется по формуле Бесселя

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad (6)$$

Найдем, чему будет равно число степеней свободы, если средняя квадратическая ошибка m определена по разностям двойных измерений (1).

Как известно, истинная ошибка разности двойных измерений равна самой разности: $\theta_d = d$. Среднюю квадратическую ошибку разности можно найти по формуле Гаусса

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \qquad (7)$$

По значению средней квадратической ошибки разности (7) строим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения разности

$$P(\gamma_1 m_d < \sigma_d < \gamma_2 m_d) = \beta. \qquad (8)$$

Здесь γ_1 и γ_2 определяются по числу степеней свободы $r = n$.

Функция $d = x - x'$ позволяет установить связь средних квадратических ошибок разности и измерения:

$$m_d = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}, \qquad (9)$$

откуда $m = m_d/\sqrt{2}$ – средняя квадратическая ошибка результата измерения.

Разделив все составляющие неравенства ($\gamma_1 m_d < \sigma_d < \gamma_2 m_d$) на $\sqrt{2}$, перейдем к доверительному интервалу для среднего квадратического отклонения измерения:

$$P(\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m) = \beta.$$

При этом, коэффициенты γ_1 и γ_2 определяются по числу степеней свободы r = n, как и для доверительного интервала (8).

Для примера воспользуемся результатами уравнивания моделей двух геодезических сетей из [2]. Повторные измерения представим рядом случайных нормально распределенных чисел – ошибок измерений с заданной точностью σ.

Нивелирная сеть с числом измерений n = 17 и числом необходимых измерений t = 10 (σ = 1,0) уравнена параметрическим способом в четырех вариантах, случайные ошибки которых получили различные систематические искажения. По результатам уравнивания по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-t}} \qquad (10)$$

получены следующие средние квадратические ошибки: 1) 2,1; 2) 2,9; 3) 4,2; 4) 4,4.

Оценка точности до уравнивания, по разностям двойных измерений:

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} = 0{,}95.$$

Для β = 0,99 и r = n = 17, $\gamma_1 = 0{,}690$, $\gamma_2 = 1{,}727$. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$P(0{,}66 < \sigma < 1{,}64) = 0{,}99. \qquad (11)$$

Значения средних квадратических ошибок, полученных по результатам уравнивания искаженных систематическими влияниями измерений, не попадают в заданный интервал.

Средние квадратические ошибки, вычисленные по результатам уравнивания при случайных ошибках измерений, равные m = 0,84 и m = 0,93, оказались в границах доверительного интервала (11).

Сеть полигонометрии с числом измерений n = 31 и числом избыточных измерений r = 9 (σ_β = 3,0″, σ_S = 1,0 см) уравнена коррелатным способом. Точность угловых измерений до уравнивания характеризует средняя квадратическая ошибка, полученная по разностям двойных измерений по формуле (1),

$m_\beta = 2{,}39''$.

По результатам уравнивания выполнена оценка точности угловых измерений по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[v_\beta^2] + [pv_S^2]}{r}}. \qquad (12)$$

В первом варианте, при случайных ошибках измерений $\mu = m_\beta = 3{,}8''$. В остальных вариантах присутствуют систематические ошибки 2) $\mu = m_\beta = 5{,}2''$; 3) $\mu = m_\beta = 5{,}0''$; 4) $\mu = m_\beta = 4{,}7''$; 5) $\mu = m_\beta = 4{,}5''$. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$P(1{,}65 < \sigma < 4{,}13) = 0{,}99. \qquad (13)$$

Только значение средней квадратической ошибки первого варианта попадает в заданный интервал. Средние квадратические ошибки остальных вариантов превышают границу интервала 4,13, что подтверждает наличие систематических влияний в результатах угловых измерений.

Таким образом, сравнение результатов оценки точности до уравнивания, по разностям двойных измерений и после уравнивания, с использованием доверительного оценивания параметров, позволяет обнаружить наличие таких систематических ошибок, которые погашаются в разностях двойных измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И., Голубев В.В. Уравнивание геодезических построений. – М.: Недра, 1984. – 413 с.

2. Лесных Н.Б. Объекты статистического анализа в геодезии: монография. – Новосибирск: СГГА. – 2010. – 128 с.

© В.Е. Мизин, 2011