

УДК 528.063, 519.652

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ОТМЕТОК ПРОДОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

**Николай Владимирович Канашин**

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 190031, Россия, г. Санкт-Петербург, Московский пр., 9, кандидат технических наук, доцент, тел. (812)457-85-38, e-mail: nikolay\_kanashin@mail.ru

**Иван Иванович Сухарев**

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 190031, Россия, г. Санкт-Петербург, Московский пр., 9, старший лаборант, тел. (812)457-85-38, e-mail: sukharev\_ivann@mail.ru

В статье рассмотрены методы интерполяции и аппроксимации продольного профиля железной дороги, реализуемые стандартными функциями программы Mathcad, с целью сравнения точности получения интерполируемых отметок головки рельса на интересующих пользователя пикетах. Показано, что существующие способы решения этой задачи исследованы недостаточно и не лишены недостатков. Предположено, что в силу свойств продольного профиля железной дороги как математической функции от пикетажа интерполяция является более точным способом ее описания, чем аппроксимация, а метод интерполяции, обеспечивающий лучшую в сравнении с иными способами точность получения интерполируемых отметок одинаков, и не зависит от вида профиля. На основе экспериментальных данных доказана верность этих предположений и установлено, что интерполяция сплайнном позволяет получить более точный результат, чем аппроксимация B-сплайнами, полиномиальная аппроксимация или линейная интерполяция отметок продольного профиля железной дороги.

**Ключевые слова:** железная дорога, продольный профиль, интерполяция, аппроксимация, точность интерполирования, сплайн-интерполяция, интерполяция отметок.

Задача интерполяции и аппроксимации функций давно известна и методы ее решения изложены в различной литературе, например [1–15]. Области ее прикладного применения разнообразны и приведены в работах [16–23]. Однако в ряде случаев, таких как построение продольного профиля железной дороги, методы ее решения исследованы недостаточно. Здесь следует отметить работу [24], где в целях интерполяции отметок профиля предложен метод полиномиальной аппроксимации, однако она не лишена недостатков, среди которых возможно отметить следующие:

– применение аппроксимации при решении задачи вычисления отметок профиля на интересующих пользователя пикетах, на наш взгляд, не является корректным вследствие несовпадения узлов аппроксимирующей функции и исходных высот профиля сооружения, что приводит к заведомо ложным значениям интерполируемых отметок. Поэтому более верным является применение в этих целях интерполирующей функции, которая лишена отмеченного недостатка;

– точность получения интерполируемых отметок профиля относительно их истинных значений неизвестна.

Исходя из изложенного, возникает вопрос: какой метод интерполяции функций позволяет получить интерполируемые значения отметок профиля с наилучшей точностью? Безусловно, конечный вид интерполирующей функции зависит от исходных данных, в нашем случае продольного профиля, и в общем виде является величиной случайной, однако применительно к продольному профилю железной дороги следует отметить две особенности:

- отметки головки рельса железной дороги при съемке всегда получают через равный или примерно равный и небольшой относительно длины всей дороги интервал;
- разность смежных отметок головки рельса вследствие нормативного ограничения на уклон железной дороги всегда небольшая относительно абсолютного значения отметок величина.

Учитывая отмеченные особенности, на наш взгляд, разумно предположить, что среди всех методов интерполяции лишь один применительно к задаче интерполирования отметок продольного профиля даст лучший результат. Кроме того, в целях лучшего практического применения этот метод следует выбрать так, чтобы его реализация была проста, не требовала существенных трудозатрат и была выполнена в распространенном программном продукте.

Для проверки этого предположения провели эксперимент, в ходе которого на прямом участке железнодорожной линии длиной порядка 350 м через 50 м разбили пикетаж, геометрическим нивелированием получили отметки, а с помощью электронного тахеометра – и плоские прямоугольные координаты обеих нитей головки рельса попикетно и случайным образом, причем для каждой рельсовой нити порядок случайного набора отметок был различен. Выполнив экспорт результатов измерений на компьютер, для каждой рельсовой нити в виде отдельных текстовых файлов сформировали два массива координат и отметок точек головки рельса – снятых случайным образом и попикетно. Заметим, что в реальных условиях по результатам съемки железнодорожного пути, как правило, получают координаты и отметки не только головки рельса, но и ситуационных съемочных пикетов, однако с технической точки зрения процесс сортировки точек по их ситуационной принадлежности и выделения из их общего массива конкретных съемочных пикетов затруднений не вызывает.

Полученные текстовые файлы были загружены в программу Mathcad 14, где на основе координат и высот выполнили построение продольного профиля по отметкам, полученным случайным образом. С помощью встроенных функций программы выполнили описание построенных профилей интерполирующими функциями с целью получения отметок головки рельса через 50 м. Кроме того, была выполнена полиномиальная аппроксимация профилей по предложенной в работе [24] методике и также через интервал 50 м получены значения отметок. Сравнив полученные результаты с фактическими попикетно снятыми отметками, судили о точности того или иного метода интерполяции.

Программа Mathcad 14 поддерживает реализацию нескольких методов интерполяции [25]:

- линейную, заключающуюся в соединении узлов интерполяции отрезками прямых (встроенная функция *linterp*);
- интерполяцию кубическими сплайнами в различных вариантах: сплайн с продолжением интерполирующей кривой после конечных точек функции прямой линией (встроенная функция *lspline*), сплайн с продолжением интерполирующей кривой после конечных точек квадратичной параболой (встроенная функция *pspline*) и сплайн с продолжением интерполирующей кривой после конечных точек функции кубической параболой (встроенная функция *cspline*);
- интерполяцию величин по аппроксимирующей кривой в виде *B*-сплайна разного порядка (встроенная функция *bspline*): линейный, с соединением аппроксимирующих узлов полиномом 1-й степени, квадратичный с соединением аппроксимирующих узлов квадратичной параболой и кубический с соединением аппроксимирующих узлов кубической параболой;
- интерполяцию величин по аппроксимирующей кривой в виде полинома различной степени (встроенная функция *regress*).

Интерполирование экспериментальных данных выполнили всеми перечисленными методами. Расхождения интерполированных указанными методами попикетных отметок и их фактических значений относительно левой по ходу пикетажа головки рельса приведены в табл. 1, относительно правой – в табл. 2.

Таблица 1

Расхождения интерполированных различными методами попикетных отметок и их фактических значений относительно левой головки рельса

| Пикетаж   | Расхождения отметок в мм, полученные из интерполирования |                                   |  |  |                                     |              |            |                                  |
|---|--|-----------------------------------|--|--|-------------------------------------|--------------|------------|----------------------------------|
|   | линейной<br>интерполяцией                                | интерполяции сплайнами            |  |  | интерполяции<br><i>B</i> -сплайнами |              |            | полиномиальной<br>аппроксимацией |
|   |  | с линей-<br>ным про-<br>должением | с продолже-<br>нием квад-<br>ратичной<br>параболой | с продолже-<br>нием куби-<br>ческой па-<br>раболой | линейный                            | квадратичный | кубический |                                  |
| 0   | 0  | 0                                 | 0  | 0  | 0                                   | 0            | 0          | 3                                |
| 50  | 1  | 1                                 | 1  | 1  | 91                                  | 2            | -26        | -1                               |
| 100   | 4  | -1                                | -1   | -1   | -135                                | -1           | 5          | 20                               |
| 150   | -2   | -3                                | -3   | -3   | -136                                | -3           | -1         | -14                              |
| 200   | -7   | -10                               | -10  | -10  | 418                                 | -10          | -10        | 2                                |
| 250   | -10  | -14                               | -14  | -13  | -570                                | -13          | -17        | -9                               |
| 300   | -36  | 4                                 | 25   | 53   | -843                                | 22           | 48         | -24                              |
| Средняя<br>квадратическая<br>ошибка <i>m</i> , мм | 14   | 7                                 | 12   | 21   | 423                                 | 10           | 22         | 13                               |

Среднюю квадратическую ошибку  $m$  определения интерполируемых отметок профиля, приведенную в табл. 1 и 2, вычислили на основе известной формулы Гаусса [26]

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n}},$$

где  $\Delta_i$  – случайные погрешности измерений, равные разности интерполированной и фактической отметок  $i$ ;  $n$  – количество измерений.

Таблица 2

Расхождения интерполированных различными методами попикетных отметок и их фактических значений относительно правой головки рельса

| Пикетаж  | Расхождения отметок в мм, полученные из интерполирования: |                                   |  |  |                                |              |            |                                  |
|--|---|-----------------------------------|--|--|--------------------------------|--------------|------------|----------------------------------|
|  | линейной<br>интерполяций                                  | интерполяции сплайнами            |  |  | интерполяции<br>$B$ -сплайнами |              |            | полиномиальной<br>аппроксимацией |
|  |   | с линей-<br>ным про-<br>должением | с продолже-<br>нием квад-<br>ратичной<br>параболой | с продолже-<br>нием куби-<br>ческой па-<br>раболой | линейным                       | квадратичный | кубический |                                  |
| 0  | 0   | 0                                 | 0  | 0  | 0                              | 0            | 0          | -3                               |
| 50   | 10  | 8                                 | 8  | 8  | 58                             | 9            | -32        | 8                                |
| 100  | 10  | 2                                 | 2  | 2  | -88                            | 1            | 23         | 34                               |
| 150  | 11  | 10                                | 10   | 10   | -88                            | 10           | 22         | -1                               |
| 200  | 1   | -5                                | -5   | -5   | 315                            | -3           | -21        | 22                               |
| 250  | -8  | -14                               | -14  | -14  | -451                           | -14          | -12        | -19                              |
| 300  | -25   | 4                                 | 19   | 33   | -689                           | 18           | 34         | -4                               |
| Средняя квад-<br>ратическая<br>ошибка $m$ , мм | 12  | 8                                 | 10   | 15   | 337                            | 10           | 23         | 17                               |

Исходя из вычисленных средних квадратических ошибок интерполяции  $m$ , приведенных в табл. 1 и 2, возможно заключить, что лучшую среди перечисленных в них методах точность позволяет обеспечить интерполяция сплайнами с линейным продолжением. Большие в сравнении иными методами расхождения отметок, полученных из интерполирования линейным  $B$ -сплайнами, на наш взгляд, возможно объяснить малым количеством интерполируемых величин. Результаты интерполирования отметок профиля полиномиальной аппроксимацией, как и предполагалось, обеспечивают худшую в сравнении с интерполирующими кривыми точность.

Сравнивая данные табл. 1 и 2 в целом, следует отметить, что приведенные в них значения достаточно согласуются между собой, что подтверждает корректность постановки задачи исследования точности методов интерполяции отметок продольного профиля и достоверность полученного результата.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шарый С. П. Курс вычислительных методов : учебник. – Новосибирск : Изд-во института вычислительных технологий СО РАН, 2016. – 548 с.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы: учеб. пособие. – 2-е изд., испр.. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
3. Баркалов К. А. Численные методы: учеб.-метод. пособие. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2011. – 38 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы : учебник. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
5. Мэтьюз Джон Г., Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. – 3-е изд., пер. с англ. – М. : Вильямс, 2001. – 720 с.
6. Numerical recipes in C: the art of scientific computing / H. William, A. Saul, T. William, P. Brian. – 2nd. ed. – Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1992. – 994 р.
7. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск : Наука, 1983. – 215 с.
8. Абакушина М. В. Анализ методов интерполяции нерегулярно заданных высот квазигеоида // Сб. статей по итогам научно-технических конференций. – М. : МИИГАиК, 2015. вып. 8. – С. 76–81.
9. Гончаров В. Л. Теория интерполяции и приближения функций. – 2-е изд., перераб. – М. : гос. изд. технико-теорет. лит., 1954. – 327 с.
10. Квасов Б. И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 416 с.
11. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 304 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 832 с.
13. Бронштейн И. Н., Семеняев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – 13-е изд., исправленное. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.
14. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods // Mathematics of computation, 1982. – № 38. – Р. 181–200.
15. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
16. Осипов В. В. Анализ методов создания цифровых моделей поверхностей // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск : СГГА, 2011. Т. 1, ч. 2. – С. 73–77.
17. Новикова П. Н., Долгаль А. С., Симанов А. А. Трехмерная интерполяция и подавление влияния приповерхностных неоднородностей при обработке гравиметрических данных // Вестник Пермского университета. Геология. – 2013. – Вып. 1 (18). – С. 50–56.
18. Дементьев Ю. В., Каленицкий А. И., Черемушкин А. В. Выбор и обоснование условий линейной интерполяции топографической редукции за влияние масс промежуточного слоя внешней области // Вестник СГУГиТ. – 2012. – Вып. 4 (20). – С. 18–26.

19. Чернова Л. И., Кошечкин И. С. Кусочно-нелинейная интерполяция цифровой модели рельефа // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2004. – № 1 (17). – С. 39–44.
20. Егорова С. А. Кондратьева В. А. О способах интерполяции характеристик электромагнитных устройств // Вестник СГУГиТ. – 2005. – Вып. 10. – С. 152–156.
21. Briese C., Pfeifer N., Dotninger P. Application of the Robust Interpolation for DTM determination // IAPRS. – Graz., 2002. – Vol. 34, Part 3AA.
22. Мазуров Б. Т. Аппроксимация гравитационного влияния локального рельефа с использованием некоторых аналитических моделей и метода конечных элементов // Вестник СГУГиТ. – 2015. – Вып. 3 (31). – С. 5–15.
23. Онгарбаева А. Д., Насымбаев Ж. Применение сплайн-интерполяции в численных методах // Векторы развития современной науки : материалы междунар. научно-пр. конф. (Уфа, 20-21 января 2014 г.). – Уфа. : Исследовательский центр информационно-правовых технологий, 2014. – С. 201–207.
24. Использование полиномиальной интерполяции при построении продольного профиля железной дороги / Е. Г. Толстов, Д. В. Крашеницин, А. А. Никитчин, Н. В. Канашин // Изыскательский вестник. – 2009. – № 2 (8). – С. 69–72.
25. Гурский Д. А., Турбина Е. С. Mathcad для студентов и школьников. Популярный самоучитель. – СПб. : Питер, 2005. – 400 с.
26. Маркузе Ю. И., Голубев В. В. Теория математической обработки геодезических измерений: учеб. пособие для вузов / под общ. ред. Ю. И. Маркузе. – М. : Академический Проект: Альма Матер, 2010. – 247 с.

Получено 27.03.2017

© Н. В. Канашин, И. И. Сухарев, 2017

## INVESTIGATION OF THE ACCURACY OF MARKS INTERPOLATION OF THE RAILWAY LONGITUDINAL PROFILE BY DIFFERENT METHODS

**Nikolay V. Kanashin**

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 190031, Russia, Saint Petersburg, 9 Moskovsky Pr., Ph. D., Associate Professor, phone: (812)457-85-38, e-mail: nikolay\_kanashin@mail.ru

**Ivan I. Sukharev**

Emperor Alexander I. St. Petersburg State Transport University, 190031, Russia, Saint Petersburg, 9 Moskovsky Pr., Senior Laboratory Assistant, phone: (812)457-85-38, e-mail: sukharev\_ivann@mail.ru

The article contains the results of studies evaluating the accuracy of interpolation of the railway profile elevation by different methods. It is shown that the existing methods of solving this problem are understudied and contains drawbacks. It is assumed that the interpolation is more accurate description of the longitudinal profile than the approximation, and the interpolation method which provides the required accuracy does not depend of the profile type. The correctness of these assumptions was confirmed by experimental calculations and it is found that the best result of interpolation of the elevations of the longitudinal profile of the railway is provided by spline interpolation.

**Key words:** railway, longitudinal profile, interpolation, approximation, accuracy of interpolation, spline interpolation, interpolation of marks.

## REFERENCES

1. Sharyy, S. P. (2016). *Kurs vychislitel'nykh metodov* [The course computational methods]. Novosibirsk: Institute of Computational Technologies SB RAS Publ. [in Russian].
2. Kalitkin, N. N. (2011). *Chislennye metody* [Numerical methods]. (2nd ed. fixed). St. Petersburg: BKhV-Peterburg [in Russian].
3. Barkalov, K. A. (2011). *Chislennye metody* [Numerical methods]. Nizhniy Novgorod: State University of Nizhni Novgorod [in Russian].
4. Bakhvalov, N. S., Zhidkov, N. P., & Kobel'kov, G. M. (2008). *Chislennye metody* [Numerical methods]. (6nd ed.). Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory [in Russian].
5. Mathews, John H., & Fink Kurtis, D. (2001). *Chislennye metody. Ispol'zovanie MATHLAB. [Numerical Methods. Using Matlab]*. (2nd ed.). (L. Kozachenko Trans.). Moscow: Vil'yams [in Russian].
6. William, H., Saul, A., William, T., & Brian, P. (1992). *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. (2nd. ed.). Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press.
7. Vasilenko, V. A. (1983.) *Splayn-funktsii: teoriya, algoritmy, programmy* [Spline functions: theory, algorithms, programs]. Novosibirsk: Science [in Russian].
8. Abakushina, M. V. (2015). Analysis of interpolation methods given irregularly heights quasigeoid. In *Sbornik statey po itogam nauchno-tehnicheskikh konferentsiy* [Proceeding of scientific-technical conferences] (pp. 76–81). Moscow: MIIGAiK [in Russian].
9. Goncharov, V. L. (1954). *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsiy* [Theory of interpolation and approximation of functions]. (2nd ed. fixed). Moscow: State Publ. of Technical and Theoretical Literature [in Russian].
10. Kvasov, B. I. (2005). *Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami*. [Isogeometric methods of approximation by splines]. Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics [in Russian].
11. Demidenko, E. Z. (1981). *Lineynaya i nelineynaya regressii* [Linear and nonlinear regression]. Moscow: Finance and Statistics [in Russian].
12. Korn, G., Korn, T. (1974). *Spravochnik po matematike* [A handbook on mathematics]. Moscow: Science [in Russian].
13. Bronshteyn, I. N., & Semendyaev, K. A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i ucha-shchikhsya vuzov* [Handbook of mathematics for engineers and technical colleges students]. (13th ed., fixed). Moscow: Science [in Russian].
14. Franke, R. (1982). Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of computation*, 38, 181–200.
15. Kreyn, S. G., Petunin, Yu. I., & Semenov, E. M. (1978). *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow: Science [in Russian].
16. Osipov, V. V. (2011). Analysis of methods for creating digital models of surfaces. In *Sbornik materialov GEO-Sibir'-2011: T. 1, ch. 2* [Proceedings of GEO-Siberia-2011: Vol. 1, Part 2.] (pp. 73–77). Novosibirsk: SSGA [in Russian].
17. Novikova, P. N., Dolgal', A. S., Simanov, A. A. (2013). Three-dimensional interpolation and the suppression of the influence of near-surface inhomogeneities in the processing of gravity data. *Vestnik Permskogo universiteta. Geologiya* [Bulletin of Perm University. Geology], 1(18), 50–56 [in Russian].
18. Dement'ev, Yu. V., Kalenitskiy, A. I., Cheremushkin, A. V. (2012). The selection and justification of the conditions of the linear interpolation of topographic reduction for the impact of the mass of the intermediate layer outer region. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik SSUGT], 4(20), 18–26 [in Russian].

19. Chernova, L. I., Koshechkin, I. S. (2004). Piecewise nonlinear interpolation of the digital elevation model. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Proceedings of Irkutsk State Technical University], 1(17), 39–44 [in Russian].
20. Egorova, S. A., & Kondrat'eva, V. A (2012). About the methods of interpolation of the characteristics of electromagnetic devices. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik SSUGT], 10, 152–156 [in Russian].
21. Briese, C., Pfeifer, N., & Dotninger, P. (2002). Application of the Robust Interpolation for DTM determination. *IAPRS*, Vol. 34, Part 3AA, Graz.
22. Mazurov, B. T. (2015). Approximation of the gravitational influence of the local elevation with the use of some analytical models and the finite elements method. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik SSUGT], 3(31), 5–15 [in Russian].
23. Ongarbaeva, A. D., & Nasymbaev, Zh. (2014). The use of spline interpolation in numerical methods. In *Materialy mezhdunarodnoy Nauchno-prakticheskoy konferentsii: Vektory razvitiya sovremennoy nauki* [Proceedings of International Scientific and Practical Conference: Vectors of Development of Modern Science] (pp. 201–207). Ufa: Research Center for Information and Legal Technologies [in Russian].
24. Tolstov, E.G., Krashenitsin, D. V., Nikitchin, A. A., Kanashin, N. V. (2009) The use of polynomial interpolation in constructing the longitudinal profile of the railway. *Izyskatel'skiy vestnik* [Survey Vestnik], 2(8), 69–72 [in Russian].
25. Gurskiy, D. A., & Turbina, E. S. (2005). *Mathcad dlya studentov i shkol'nikov. Populyarnyy samouchitel'* [Mathcad for students and schoolchildren. A popular tutorial]. St. Petersburg: Piter [in Russian].
26. Markuze, Yu. I., & Golubev, V. V. (2010). *Teoriya matematicheskoy obrabotki geodezicheskikh izmereniy* [Theory of mathematical processing of geodetic measurements]. Moscow: Academic Project: Al'ma Mater [in Russian].

Received 27.03.2017

© N. V. Kanashin, I. I. Sukharev, 2017