УДК 517.54

О РАЗЛОЖЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА*)

О. А. Данилов

1. Введение

Понятие дискретной аналитической функции на гауссовой решетке $\mathbb{G} = \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z}$ введено Айзексом [1]. Он классифицировал эти функции на функции первого и второго рода и исследовал функции первого рода.

Далее Ферран [2] и Даффин [3] создали теорию дискретных аналитических функций второго рода. Важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности, получены С. Л. Соболевым [4]. Новые плодотворные аналитические и комбинаторные идеи принес Цайльбергер [5]. Их развил и обобщил А. Д. Медных [6]. Другой подход к дискретным аналитическим функциям предложен Тёрстоном в [7], где была получена эффективная быстро сходящаяся аппроксимация в теореме Римана о конформных отображениях односвязных римановых поверхностей.

Все вышеуказанные результаты основывались на различных непосредственных линейных и нелинейных дискретизациях уравнений Коши — Римана. Напомним [1], что дискретная аналитическая функция $f : \mathbb{Z} + i\,\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ первого рода определяется линейным уравнением

$$f_{m,n+1} - f_{m,n} = i(f_{m+1,n} - f_{m,n}), \tag{1}$$

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00642), АВЦП развития научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1/3707) и ФЦП (проект 02.740.11.0457).

© 2010 Данилов О. А.

а дискретная аналитическая функция второго рода — уравнением вида

$$f_{m,n+1} - f_{m+1,n} = i(f_{m+1,n+1} - f_{m,n}). \tag{2}$$

Пионерский шаг в понимании природы дискретных аналитических функций предпринят Даффиным [8], где регулярная решетка $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ была заменена произвольным графом с ромбическими гранями. Далеко идущие обобщения этих идей даны Мерка в [9], где линейная теория дискретных аналитических функций была распространена на дискретные римановы поверхности. Кэниён [10] развил теорию оператора Дирака и построил функцию Грина для линейной теории на ромбических графах. Этот подход привел к важным приложениям в теории кодирования Идальго [11].

Цель настоящей работы — доказательство теорем существования и единственности разложения Тейлора по системе псевдостепеней для дискретных аналитических функций первого рода, заданных уравнением (1) в положительном квадранте гауссовой плоскости. Аналогичная задача для дискретных аналитических функций второго рода решена в [12].

2. Дискретные аналитические функции первого и второго рода

2.1. Определения и основные свойства. Рассмотрим комплекснозначную функцию f, определенную на некотором множестве $E \subset \mathbb{G}$. Если f определена на тройке чисел $\{z, z+1, z+i\}$, тогда f называется *дискретной аналитической функцией первого рода* на этой тройке, если справедливо соотношение:

$$\frac{f(z+1) - f(z)}{1} = \frac{f(z+i) - f(z)}{i} \tag{3}$$

или, иначе,

$$\mathrm{cr}(f(z)) = f(z+1) + if(z+i) - (1+i)f(z) = 0. \tag{4}$$

Если соотношение (3) справедливо для всякой тройки $\{z, z+1, z+i\}$, принадлежащей множеству $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, то говорим, что f является

дискретной аналитической функцией первого рода на $\mathbb{E}$. Дискретная аналитическая функция первого рода, определенная в положительном квадранте $\mathbb{G}^+ = \{m + in \in \mathbb{G} : m \geqslant 0,\ n \geqslant 0\}$, называется *дискретной целой функцией первого рода*. Множество всех дискретных аналитических функций первого рода на $\mathbb{E}$ и на $\mathbb{G}^+$ обозначим соответственно $\mathscr{D}_1(\mathbb{E})$ и $\mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$. Оператор cr, введенный формулой (4), является дискретным аналогом оператора Коши — Римана из комплексного анализа, а само уравнение (4) называется *уравнением Даффина*.

Напомним определение дискретной аналитической функции второго рода. Рассмотрим комплекснозначную функцию f, определенную на некотором подмножестве $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$. Функцию f, определенную на единичном квадрате, содержащем точки $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$, называют *дискретной аналитической функцией второго рода* на этом квадрате, если

$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{i+1} = \frac{f(z+i) - f(z+1)}{i-1} \tag{5}$$

или, иначе,

$$\overline{\partial} f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2 f(z+1+i) + i^3 f(z+i) = 0. \tag{6}$$

Если соотношение (5) справедливо для каждого единичного квадрата $\{z, z+1, z+1+i, z+i\}$, содержащего множество $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, то будем говорить, что f является *дискретной аналитической функцией второго рода на* $\mathbb{E}$. Дискретная аналитическая функция второго рода, определенная на всем $\mathbb{G}^+$, называется *дискретной целой функцией второго рода*. Множество всех дискретных аналитических функций второго рода на $\mathbb{E}$ и на $\mathbb{G}^+$ обозначим соответственно через $\mathscr{D}_2(\mathbb{E})$ и $\mathscr{D}_2(\mathbb{G}^+)$.

Функции 1, z и псевдостепень $z^{[n]}$ являются дискретными аналитическими функциями первого рода на $\mathbb{G}$. Напомним определение псевдостепени:

$$z^{[n]} = \begin{cases} x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-n+1) \text{ при } y = 0, \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \binom{n}{s} i^{n-s} x^{[s]} y^{[n-s]} \text{ при } z = x + iy \in \mathbb{G}. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что значение дискретной аналитической функции $f(z)$ первого рода однозначно восстанавливается на верхней полуплоскости

$$\mathbb{G}_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{G} : y \geqslant 0\} \tag{8}$$

по значениям $\{f(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$.

Действительно, зная $\{f(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$, по формуле (4) находим последовательно $\{f(x+i),\ x \in \mathbb{Z}\}$. Далее по k-му слою $\{f(x+ik),\ x \in \mathbb{Z}\}$ и формуле (4) получим $(k+1)$-й слой $\{f(x+i(k+1)),\ x \in \mathbb{Z}\}$. В частности, для значений $\{f(x),\ x = 0, 1, \dots\}$ вычислим $\{f(z),\ z \in \mathbb{G}^+\}$.

Дискретную аналитическую функцию $f(z)$ первого рода, определенную на $\mathbb{G}_1$ (или на $\mathbb{G}^+$), с помощью значений $\{f(x),\ x \in \mathbb{Z}\}$ (или с помощью значений $\{f(x),\ x = 0, 1, 2, \dots\}$) будем называть *аналитическим продолжением* $f(z)$ с множества $\{x \in \mathbb{Z}\}$ $(x = 0, 1, 2, \dots\})$ до множества $z \in \mathbb{G}_1$ (до множества $z \in \mathbb{G}^+$). Сделанные выше замечания стимулируют нас искать для дискретных аналитических функций первого рода подходящие для уравнения Даффина (4) экспоненту $e(\xi, z)$ и систему псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Будем искать решение разностного уравнения (4) в классе функций $\mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$ в виде $f(z) = a^x b^y$, где $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$, $a = a(\xi)$, $b = b(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$. Получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{gathered} \operatorname{cr}(f(z)) = \operatorname{cr}(a^x b^y) = a^{x+1} b^y + i a^x b^{y+1} - (1+i) a^x b^y = 0, \\ a^x b^y (a + ib - 1 - i) = 0, \quad b = ia + 1 - i. \end{gathered} \tag{9}$$

Положим $a = e^{\xi}$, $b = ie^{\xi} + 1 - i$. При $\xi \to 0$ имеем следующие эквивалентности:

$$a^x b^y \sim (1+\xi)^x (1+i\xi)^y \sim 1 + z\xi. \tag{10}$$

Для уравнения (4) введем экспоненту $e(\xi, z)$ и псевдостепени $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, принадлежащие классу $\mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$, по формуле

$$e(\xi, z) = e(\xi, x, y) = e^{\xi x} (1 - i + ie^{\xi})^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!} \xi^k. \tag{11}$$

Очевидно, что $e(\xi, z+w) = e(\xi, z) \cdot e(\xi, w)$. Для вычисления $\pi_k(z)$ используем следующую *формулу Родрига:*

$$\pi_k(z) = \pi_k(x,y) = \frac{d^k e(\xi, z)}{d\xi^k}\bigg|_{\xi=0} = \frac{d^k}{d\xi^k}(e^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^y\Big|_{\xi=0}, \qquad (12)$$

где $z \in \mathbb{G}^+$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. В частности, для $k = 0, 1, 2$ получим

$$\pi_0(z) \equiv 1, \quad \pi_1(z) = z, \quad \pi_2(z) = z^2 + (1+i)y. \qquad (13)$$

Далее нам понадобятся следующие свойства системы псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$:

(A1) $\pi_k(0) = 0$ для всех $k > 0$,

(A2) $\pi_k(z)$ удовлетворяет биномиальному тождеству

$$\pi_k(z+w) = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \pi_s(z)\pi_{k-s}(w),$$

(A3) $\pi_0(z) \equiv 1$ и $\pi_k(z) = z^k + P_{k-1}(x,y)$ для всех $k \geqslant 1$, где P_{k-1} является полиномом от (x,y) степени $\leqslant k-1$,

(A4) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ сходится абсолютно для всех $z \in \mathbb{G}^+$, если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ сходится для всех $\xi \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.1. *Система псевдостепеней* $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет свойствам* (A1)–(A4).

Доказательство Свойство (A1) очевидно. По формуле Лейбница получим доказательство свойства (A2):

$$\pi_k(z+w) = \frac{d^k e(\xi, z+w)}{d\xi^k}\bigg|_{\xi=0} = \frac{d^k}{d\xi^k}(e(\xi,z)e(\xi,w))\bigg|_{\xi=0}$$
$$= \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \frac{d^s e(\xi,z)}{d\xi^s}\bigg|_{\xi=0} \frac{d^{k-s} e(\xi,w)}{d\xi^{k-s}}\bigg|_{\xi=0} = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} \pi_s(z)\pi_{k-s}(w).$$

Доказательство свойства (A3) проведем методом математической индукции. Утверждение, очевидно имеет место при $k = 1$. Допустим, что справедлива формула $\pi_k(z) = z^k + P_{k-1}(x,y)$, где $P_{k-1}(x,y)$ — полином степени не выше $k-1$.

Установим следующую рекуррентную формулу для $\pi_{k+1}(z)$:

$$\pi_{k+1}(z) = (x+y)\pi_k(z) + (i-1)y\pi_k(z-i). \tag{14}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(z) &= \frac{d^{k+1}e(\xi,z)}{d\xi^{k+1}}\bigg|_{\xi=0} = \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}}(e^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^y\bigg|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}(xe^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^y + e^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^{y-1}yie^{\xi})\bigg|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}(xe^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^y + e^{\xi x}(1-i+ie^{\xi})^{y-1}y(ie^{\xi}+1-i+i-1))\bigg|_{\xi=0} \\
&= \frac{d^k}{d\xi^k}(xe(\xi,z) + ye(\xi,z) + y(i-1)e(\xi,z-i))\bigg|_{\xi=0} \\
&= (x+y)\frac{d^ke(\xi,z)}{d\xi^k}\bigg|_{\xi=0} + (i-1)y\frac{d^ke(\xi,z-i)}{d\xi^k}\bigg|_{\xi=0} \\
&= (x+y)\pi_k(z) + (i-1)y\pi_k(z-i).
\end{aligned}$$

По предположению индукции имеем

$$\pi_k(z) = z^k + P_{k-1}(x,y), \quad \pi_k(z-i) = (z-i)^k + \widetilde{P}_{k-1}(x,y).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(z) &= (x+y)\pi_k(z) + (i-1)y\pi_k(z-i) \\
&= (x+y)z^k + (x+y)P_{k-1}(x,y) + (i-1)y((z-i)^k + \widetilde{P}_{k-1}(x,y)) \\
&= (x+y+iy-y)z^k + \widetilde{P}'_k(x,y) = z^{k+1} + \widetilde{P}'_k(x,y),
\end{aligned}$$

где $P_{k-1}(x,y)$, $\widetilde{P}_{k-1}(x,y)$ и $\widetilde{P}'_k(x,y)$ — многочлены степени не выше $k-1$ и k соответственно. Свойство (A3) доказано.

Для доказательства свойства (A4) нам понадобится следующая лемма [13, т. 1, лемма 1, с. 264]. Обозначим $M_F(r) = \sup\limits_{|\xi|=r} |F(\xi)|$.

Лемма 1 *Пусть для целой функции*

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\xi^k$$

существует положительное $r_0 \in \mathbb{R}$ *такое, что при всех действительных* $r \geqslant r_0$ *выполнено неравенство* $M_F(r) < e^{\nu r}$ *для некоторого положительного* $\nu \in \mathbb{R}$. *Тогда для коэффициентов* c_k *ее тейлоровского разложения найдется целое* k_0 *такое, что для всех целых* $k \geqslant k_0$ *справедлива оценка*

$$|c_k| < \left(\frac{e\nu}{k}\right)^k. \tag{15}$$

Функция

$$e(\xi, z) = e^{\xi x}(1 - i + ie^{\xi})^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!}\xi^k$$

является целой функцией по переменному ξ для любых $z \in \mathbb{G}^+$. Для всех действительных $r > r_0 = 1$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} M_{e(\xi,z)}(r) = \sup_{|\xi|=r} |e(\xi, z)| &\leqslant (\sup_{|\xi|=r} |e^{\xi x}|)(\sup_{|\xi|=r} |(1 - i + ie^{\xi}|^y) \\ &\leqslant (\sup_{|\xi|=r} |e^{\xi}|)^x (\sup_{|\xi|=r} |(1 - i + ie^{\xi}|)^y \\ &\leqslant e^{rx}(\sup_{|\xi|=r} |ie^{\xi}| + \sqrt{2})^y \leqslant e^{rx}(e^r + \sqrt{2})^y \\ &\leqslant e^{rx}(2e^r)^y \leqslant e^{rx}e^{2ry} = e^{r(x+2y)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда видим, что $e(\xi, z)$ — целая функция экспоненциального типа по переменному ξ. По лемме 1 и формуле Стирлинга при $k \geqslant k_0$, $r \geqslant r_0 = 1$ справедлива асимптотическая оценка для коэффициентов $e(\xi, z)$:

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{k!} < \left(\frac{e(x + 2y)}{k}\right)^k = \frac{\sqrt{2\pi k}(x + 2y)^k}{\sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k} < \frac{2\sqrt{\pi k}(x + 2y)^k}{k!}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$|\pi_k(z)| < 2\sqrt{\pi k}(x + 2y)^k. \tag{18}$$

Пусть теперь

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$$

— произвольная целая функция. По формуле Коши — Адамара имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, и, таким образом, для дискретного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$$

верна оценка

$$\sqrt[k]{|a_k \pi_k(z)|} \leqslant \sqrt[k]{|a_k|}(x+2y)\ \sqrt[2k]{4\pi k} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{19}$$

что обеспечивает абсолютную сходимость дискретного ряда $f(z)$ при всех $z \in \mathbb{G}^+$.

2.2. Соотношения между непрерывными и дискретными аналитическими функциями. Для функции $e(\xi, z)$ рассмотрим лорановское разложение по степеням $\zeta = e^{\xi}$ вида

$$\zeta^x (1 - i + i\zeta)^y = \sum_{s=x}^{x+y} c(x, y, s)\zeta^s, \tag{20}$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\zeta^x (1 - i + i\zeta)^y}{\zeta^{s+1}}\, d\zeta, \tag{21}$$

а Γ — любой контур, содержащий внутри 0. Заметим, что

$$\begin{gathered} (1 - i + i\zeta)^y = \sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} (1-i)^{y-k} (i\zeta)^k, \\ \zeta^x (1 - i + i\zeta)^y = \sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} (1-i)^{y-k} \cdot i^k \cdot \zeta^{x+k}. \end{gathered} \tag{22}$$

Полагая $k + x = s$, $k = s - x$, получим из (22) и формулы (20)

$$c(x, y, s) = \binom{y}{k} (1-i)^{y-k} \cdot i^k = \binom{y}{s-x} (1-i)^{y+x-s} \cdot i^{s-x}. \tag{23}$$

Следовательно,

$$e(\xi, z) = \sum_{s=x}^{x+y} c(x, y, s) e^{\xi s} = \sum_{s=x}^{x+y} \binom{y}{s-x} (1-i)^{y+x-s} \cdot i^{s-x} \cdot e^{\xi s}, \tag{24}$$

$$\pi_k(z) = \pi_k(x,y) = \frac{d^k e(\xi,z)}{d\xi^k}\bigg|_{\xi=0} = \sum_{s=x}^{x+y} c(x,y,s)s^k$$
$$= \sum_{s=x}^{x+y} \binom{y}{s-x} (1-i)^{y+x-s} \cdot i^{s-x} \cdot s^k. \quad (25)$$

В частности, $\pi_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2,\ldots$. Пусть $F(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$ — произвольная целая функция, а $\tilde{f}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ — ассоциированный с ней дискретный ряд. Свойство (A4) позволяет переписать дискретный сходящийся ряд в $\mathbb{G}^+$ в виде

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{s=x}^{x+y} c(x,y,s)s^k \right)$$
$$= \sum_{s=x}^{x+y} c(x,y,s) \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \right) = \sum_{s=x}^{x+y} c(x,y,s)F(s). \quad (26)$$

Таким образом,

$$\tilde{f}(z) = \sum_{s=x}^{x+y} c(x,y,s)F(s), \quad z \in \mathbb{G}^+.$$

В частности, по формуле (21)

$$\tilde{f}(x) = c(x,0,x)F(x) = F(x), \quad x = 0,1,2,\ldots.$$

По теореме Гельфонда — Шеффера, зная начальные значения $F(x) = f(x) \in \mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$, $x = 0,1,2,\ldots$, найдем целую функцию $F(\xi) \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$. Далее с помощью абсолютно сходящегося ряда

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$$

получим сходящийся ассоциированный дискретный ряд

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Поскольку $f(x) = F(x) = \tilde{f}(x)$ для всех $x = 0, 1, 2, \ldots$, в силу однозначности аналитического продолжения получим $f(z) = \tilde{f}(z)$ при $z \in \mathbb{G}^+$. Следовательно, решение разностного уравнения (4) представимо в виде дискретного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Мы установили следующую теорему.

Теорема 2.2. *Любое решение $f(z)$ разностного уравнения* (4) *на $\mathbb{G}^+$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Тейлора*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+.$$

Указанное разложение неединственно. При этом $f(z) \equiv 0$ для всех $z \in \mathbb{G}^+$ тогда и только тогда, когда $F(s) = 0$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \in \mathscr{A}(\mathbb{C}).$$

2.3. Теорема о гомоморфизме. Нам потребуются следующие свойства классической гамма-функции $\Gamma(\xi)$. Функция

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{+\infty} t^{\xi-1} e^{-t}\, dt$$

допускает аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость за исключением точек $\xi = 0, 1, 2, \ldots$, в которых она имеет простые полюсы и не имеет нулей. В частности, отсюда следует, что функция $\frac{1}{\Gamma(-\xi)}$ — целая во всей комплексной плоскости и обращается в нуль только в точках $\xi = 0, 1, 2, \ldots$, в которых она имеет простые нули. Для функции $\Gamma(z)$ справедливы равенства

$$\Gamma(\xi)\Gamma(-\xi) = \frac{\pi}{\xi \sin(\pi\xi)}, \tag{27}$$

и

$$\frac{1}{\Gamma(\xi)} = \xi e^{C\xi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{\xi}{n}\right) e^{-\frac{\xi}{n}} \right), \tag{28}$$

где бесконечное произведение абсолютно и равномерно сходится на любом компакте комплексной плоскости, а $\mathrm{C} = 0.5772\ldots$ — постоянная Эйлера. Для описания ядра гомоморфизма Θ из пространства целых функций $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ на пространство дискретных аналитических функций первого рода $\mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$ нам потребуется целая функция

$$F_0(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)} = \frac{\xi\Gamma(\xi)\sin(\pi\xi)}{\pi} = \frac{\Gamma(\xi+1)\sin(\pi\xi)}{\pi}, \tag{29}$$

которая обращается в нуль лишь в точках $z = 0, 1, 2, \ldots$ и имеет в них только простые нули.

Важным следствием из теоремы 2.2 является следующая теорема о гомоморфизме.

Теорема 2.3 (о гомоморфизме). *Пусть*

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$$

и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) \in \mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$$

— ассоциированная с $F(\xi)$ дискретная аналитическая функция первого рода. Тогда отображение $\Theta : F(\xi) \longmapsto f(z)$ осуществляет эпиморфизм линейного пространства $\mathscr{A}(\mathbb{C})$ на линейное пространство $\mathscr{D}_1(\mathbb{G}^+)$. Ядро указанного гомоморфизма $\operatorname{Ker}\Theta$ имеет вид

$$\operatorname{Ker}\Theta = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\mathscr{A}(\mathbb{C}) = \Gamma(\xi+1)\sin(\pi\xi)\mathscr{A}(\mathbb{C}),$$

где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Пусть $F(\xi)$ — целая функция и $F(\xi) \in \operatorname{Ker}\Theta$. Тогда в силу теоремы 2.2 последнее условие эквивалентно равенствам: $F(s) = 0$ при $s = 0, 1, 2, \ldots$. Положим $F_0(\xi) = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}$ и рассмотрим мероморфную функцию $h(\xi) = \frac{F(\xi)}{F_0(\xi)}$. В силу указанных выше свойств функции $F_0(\xi)$ функция $h(\xi)$ имеет устранимые особенности в точках

$s = 0, 1, 2, \ldots$ и аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости. Следовательно, $h(\xi)$ — целая аналитическая функция и

$$F(\xi) \in \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\mathscr{A}(\mathbb{C}) = \Gamma(\xi+1)\sin(\pi\xi)\mathscr{A}(\mathbb{C}).$$

Обратно, если $F(\xi) \in \Gamma(\xi+1)\sin(\pi\xi)\mathscr{A}(\mathbb{C})$, то очевидно, что $F(s) = 0$ при $s = 0, 1, 2, \ldots$ и, следовательно, F принадлежит $\operatorname{Ker}\Theta$. Таким образом,

$$\operatorname{Ker}\Theta = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\mathscr{A}(\mathbb{C}) = \Gamma(\xi+1)\sin(\pi\xi)\mathscr{A}(\mathbb{C}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R. F.* A Finite Difference Function Theory // Univ. Nac. Tucuman. Revista A. 1941. V. 2. P. 177–201.
2. *Ferrand J.* Fonctions Preharmoniques et Functions Preholomorphes // Bull. Sci. Math. 2nd Ser. 1944. V. 68. P. 152–180.
3. *Duffin R. J.* Basic Properties of Discrete Analytic Functions // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 335–363.
4. *Соболев С. Л.* Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // Докл. АН СССР, 1965, Т. 164, № 1. С. 54–57.
5. *Zeilberger D.* A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. V. 23 (Series A). P. 95–104.
6. *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Киев: Наук. думка. 1982. С. 137–144.
7. *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem. Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture // Purdue University, 1985.
8. *Duffin R. J.* Potential theory on rhombic lattice // J. Combinatorial Theory. 1968. V. 5. P. 258–272.
9. *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model // Commun. Math. Phys. 2001. V. 218. P. 177–216.
10. *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs // Invent. Math. 2002. V. 150. P. 409–439.
11. *Hidalgo R. A., Godoy M. M.* Introduccion a las estructaras de superficies de Riemann discretas, 2007. At: //http: //docencia.mat.utfsm.cl/ rhidalgo/files/discreta.pdf.
12. *Данилов О. А., Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009, Т. 9, вып. 2. С. 38–46.
13. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 1.

г. Новосибирск *20 ноября 2010 г.*