УДК 631.4:51
ББК 40.3в631
Б 38

Беданокова С.Ю.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, e-mail: saika70@list.ru
Чуяко Е.Б.
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, Майкоп, e-mail: chuyako@mail.ru

О некоторых уравнениях движения почвенной влаги

(Рецензирована)

Аннотация
Выводятся базовые уравнения движения почвенной влаги и сопутствующие им начальные и краевые условия. На основе модификации известной в физике почв схеме М. Аллера, посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, получены новые уравнения влагопереноса, учитывающие фрактальные свойства почвенных коллоидов.
Ключевые слова: *фрактальная размерность, оператор дробного дифференцирования, коэффициент диффузитивности, влагосодержание.*

Bedanokova S.Yu.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, e-mail: : saika70@list.ru
Chuyako E.B.
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department, Engineering-Economics Faculty, Maikop State University of Technology, Maikop, e-mail: chuyako@mail.ru

On some motion equations of soil moisture

Abstract
In this paper, the basic equations of soil moisture's motion and associated initial and boundary conditions are deduced. On the basis of the modifications of M. Aller's scheme well-known in the soil physics and by introducing the concept of fractal speed of changes in humidity, new equations of moisture transfer have been obtained taking into account fractal properties of soil colloids.
Keywords: *fractal dimension, operator of fractional differentiation, coefficient of diffusion, moisture content.*

Значительный интерес представляет разработка математических моделей, учитывающих влияние фрактальной структуры почвы на их водный и солевой режим.

Существуют различные определения фрактала [1, с. 194; 2, с. 15]. Более наглядным является определение Б. Мандельброта фрактала как структуры, состоящей из частей, которые в каком-то смысле подобны целому, образно говоря, выглядят одинаково, в каком бы масштабе ее не наблюдать. Коллоидное капиллярно-пористое тело является примером системы, близкой к фрактальной.

Известно, что почва представляет собой фрактально коллоидное образование, наличие которых существенно влияет на свойства почв. Известно так же влияние влажности, одной из важнейших характеристик почв, на фрактальные свойства почвенных коллоидов [3, с. 351; 4, с. 199.].

Зависимость фрактальной размерности почвы от влажности существенно может

повлиять на процесс нестационарного движения влаги в этой капиллярно-пористой среде. Обычно движение влаги в почве моделируется нелинейным уравнением диффузии, основанном на законе Дарси. Оно имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right], \quad (1)$$

здесь $\omega = \omega(x,t)$ – влажность в долях единицы, x – глубина, t – время, $D = D(\omega)$ – коэффициент диффузитивности.

Уравнение (1) есть нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа.

Диффузионная модель предполагает отсутствие электрического поля, изотермии вдоль потока влаги, постоянство концентрации растворенных веществ и, если в начальный момент времени $t = 0$ задана непрерывная по глубине влажность $\omega(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le r$, возникает поток влаги из более влажных в менее влажные слои. В случае, когда влажность меняется в небольшом диапазоне, например, при $0 \le x \le \varepsilon < r$, можно положить, что $D(\omega) = a^2 = const$, и переписать уравнение (1) в виде:

$$\omega_t = a^2 \omega_{xx}. \quad (2)$$

Коэффициент диффузитивности связан с давлением $p = p(\omega)$ почвенной влаги, с плотностью ρ и ускоренной силой тяжести g формулой $D(\omega) = \frac{k}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial \omega}$, где $k = k(\omega)$ – коэффициент влагопроводности.

Изменение фрактальной размерности с глубиной должно сопутствовать изменению коэффициента влагопроводности в почвенном слое $0 \le x \le r$ или в фильтрующей почвенной колонке длины *r*. Если это принять во внимание, то уравнение (1) заменится уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial \omega}{\partial x} - k\right]. \quad (3)$$

В случае, когда скорость $v(\omega) = \frac{dk(\omega)}{d\omega}$ движения влаги под действием гравитационных сил является постоянной, уравнение (3) принимает вид [6]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D\frac{\partial \omega}{\partial x} - v\omega\right]. \quad (4)$$

В основе моделей (2) и (4) лежит закон Дарси, исключающий наличие потоков против потенциала влажности и излома на кривой фрактальной размерности.

Уравнение движения влаги в почвах с фрактальной структурой можно получить, если модифицировать известную схему М. Аллера [7], приводящую к уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x} + A\frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial x}\right]. \quad (5)$$

с варьируемым коэффициентом *A*.

Действительно, пусть разность $\psi_\varepsilon - \psi$ эффективного потенциала ψ_ε по терминологии [1] и капиллярного потенциала влажности ψ пропорциональна «фрактальной скорости изменения влажности» $\partial_{0t}^{\alpha}\omega(x,\tau)$, где ∂_{0t}^{α} – оператор дробного дифференцирования по t порядка $\alpha \in (0,1)$ с началом в начальный момент времени $t = 0$ [1]. Таким образом,

$$\psi_\varepsilon - \psi = \mu\partial_{0t}^{\alpha}\omega(x,\tau), \quad (6)$$

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial\tau} d\tau, \quad (7)$$

где $\mu = \mu(t)$ – коэффициент пропорциональности, зависящий только от времени t, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, и предполагается, что роль уравнения течения жидкости играет уравнение

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\psi_e}{\partial x}\right). \quad (8)$$

Из (6) и (8) получаем модифицированное уравнение движения влаги

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\omega)\omega_x + k_\mu \partial_{0\tau}^{\alpha}\omega_x(x,\tau)\right]. \quad (9)$$

Здесь $D(\omega) = k(\omega)\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$, $k_\mu = \mu k(\omega)$, $\omega_x = \frac{\partial\omega}{\partial x}$.

В (7) произведем замену переменной интегрирования τ по формуле

$$\tau = t - t\eta^{1/1-\alpha} \Leftrightarrow \eta = \left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{1-\alpha}.$$

В результате будем иметь

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^1 \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=t-t\eta^{1/1-\alpha}} d\eta.$$

Отсюда следует, что $\lim_{\alpha\to 1}\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \partial_{0\tau}^{1}\omega(x,\tau) = \frac{\partial\omega(x,t)}{\partial t}$.

Следовательно, уравнение (9) при $\alpha \to 1$ переходит в уравнение Аллера (5) с коэффициентом $A = k_\mu = const$.

Уравнение (9) отражает через параметр α фрактальные свойства почвенных коллоидов.

Для почв типа Гарднера [6], [8] коэффициент диффузитивности

$$D(\omega) = \beta e^{\gamma\omega}, \quad (10)$$

где β и γ – параметры, характеризующие почву и зависящие только от времени.

В силу (10) можно предположить, что в слое $0 \le x \le r$ с небольшой влагоемкостью между $D(\omega)$ и ω существует линейная зависимость, и записать равенство

$$D(\omega) = \beta(1+\gamma\omega). \quad (11)$$

В случае (11) уравнение (9) допускает следующую запись:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \frac{\beta}{2\gamma}\frac{\partial^2(1+\gamma\omega)^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[k_\mu \partial_{0\tau}^{\alpha}\omega_x(x,\tau)\right] \quad . \quad (12)$$

Пусть $\delta(t) = \int_0^r \omega(x,t)dx$, $0 \le t \le T$, – влагосодержание несущего слоя $[0,r]$ в момент времени t от начального 0 до расчетного T; k_μ не зависит от x. Тогда уравнение (12) можно приближенно заменить уравнением следующего вида:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\omega(x,\tau) = \beta(1+\gamma\delta)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + k_\mu \partial_{0\tau}^{\alpha}\omega_{xx}(x,\tau). \quad (13)$$

Из уравнения (13) после интегрирования обеих частей по x от 0 до r будем иметь

$$\partial_{0\tau}^{\alpha}\delta(\tau) = \beta[1+\gamma\delta(t)][\omega_x(r,t) - \omega_x(0,t)] + k_\mu \partial_{0\tau}^{\alpha}[\omega_x(r,\tau) - \omega_x(0,\tau)]. \quad (14)$$

Уравнение (14) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений [1] и оно для уравнения (9) порождает следующие локальные и нелокальные краевые условия:

$$\partial_{0t}^{\alpha} \int_0^r \omega(x,\tau)\,dx = \delta^{(\alpha)}(t), \tag{15}$$

$$\omega_x(r,t) = \psi_r(t), \quad \omega_x(r,t) - \omega_x(0,t) = f_1(t), \omega_x(0,t) = f_0(t)$$

В силу (9) условие (15) равносильно условию

$$D[\omega(r,t)]\omega_x(r,t) + \mu k[\omega(r,t)]\partial_{0t}^{\alpha}\omega_x(r,\tau) -$$

$$-D[\omega(0,t)]\omega_x(0,t) - \mu k[\omega(0,t)]\partial_{0t}^{\alpha}\omega_x(0,\tau).$$

Пусть $\theta = \theta(x,t)$ – объемная влажность почвы или запас влаги в точке x в момент времени t; $D(\theta)$ – диффузитивность почвенной влаги, которая определяется как отношение коэффициента влагопроводности к дифференциальной влагоемкости при соответствующей влажности. Тогда уравнение Ричардса в отсутствии гравитационного давления приобретает вид [9]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right], \tag{16}$$

Форма (16) записи уравнения Ричардса часто используется в качестве адекватной основы для моделирования движения влаги в ненасыщенной почве.

Уравнение (16) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{\theta} D(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Из (17) легко видеть, что

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{18}$$

Если объемная влажность с допустимой точностью удовлетворяет уравнению

$$D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} = c_0|t_* - t|^{\rho}\theta(x,t)sign(t_* - t), \tag{19}$$

где c_0 и ρ – характеристики модели почвы, $c_0 = const > 0$, $\rho = const \geq 0$, а t_* – время, когда объемная влажность достигает максимально допустимого значения в процессе искусственного или естественного орошения, то нелинейное уравнение (18) можно аппроксимировать уравнением

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = c_0 sign(t_* - t)|t_* - t|^{\rho}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{20}$$

Уравнение (20) является уравнением движения жидкости: оно гиперболического типа при подъеме объемной влажности, т.е. при $t < t_*$, и эллиптического типа при падении объемной влажности, например, при испарении с поверхности почвы после прекращения орошения.

В случае, когда

$$D(0) = D_0\theta, \; D_0 = const, \tag{21}$$

уравнение (19) становится линейным уравнением в частных производных первого порядка:

$$D_0\frac{\partial\theta}{\partial t} = c_0|t_* - t|^{\rho}sign(t_* - t). \tag{22}$$

Любое решение $\theta = \theta(x,t)$ уравнения (22) представимо в виде

$$D_0\theta(x,t) = \frac{c_0}{\rho+1}|t_* - t|^{\rho+1} + D_0\theta_*(x),$$

где $\theta_*(x)$ – объемная влажность почвы при $t = t_*$.

Для почв с диффузитивностью (21) уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = D_0\frac{\partial^2(\theta\theta_t)}{\partial x^2}, \quad \theta_t = \frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{23}$$

Если, опираясь на (22), предположить, что

$$D_0\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r \theta(x,t)\,dx = c_r|t_* - t|^\rho sign(t_* - t), \tag{24}$$

то уравнение (23) приближенно можно заменить уравнением вида (20) с параметром $c_0 = \frac{c_r}{D_0}$, равенство (24) выступает в качестве нелокального краевого условия.

Примечания:

1. Нахушев А.М. Уравнение математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
3. Фрактальные коллоидные структуры в почвах различной зональности / Г.И. Федотов, Ю.Д. Третьяков, В.К. Иванов [и др.] // ДАН. 2005. Т. 405. С. 351-354.
4. Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов / Г.И. Федотов, Ю.Д. Третьяков, В.К. Иванов [и др.] // ДАН. 2006. Т. 409. С. 199-201.
5. Нерпин С.В., Чудковский А.Ф. Энерго- и массообмен в системе растение-почва-воздух. Л.: Гидрометиздат, 1975. 358 с.
6. Нахушев А.М. О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики: межвуз. сб. Нальчик: КБГУ, 1979. Вып. 2. 198 с.
7. Hallaire M. Leon et productios vegetabl / Institut National de la Reche. Agronomique. 1964. N 9.
8. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряженская В.Т., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
9. Шейн Е.В. Курс физики почв. М.: Изд-во МГУ, 2005. 432 с.

References:

1. Nakhushev A.M. An equation of mathematical biology. M.: Vyssh. шк. 1995. 301 pp.
2. Potapov A.A. Fractals in radiophysics and radiolocation. M.: Universitetskaya kniga, 2005. 848 pp.
3. Fractal colloidal structures in soils of various zonality / G.I. Fedotov, Yu.D. Tretyakov, V.K. Ivanov [etc.] // DAN. 2005. Vol. 405. P. 351-354.
4. Influence of humidity on fractal properties of soil colloids / G.I. Fedotov, Yu.D. Tretyakov, V.K. Ivanov [etc.] // DAN. 2006. Vol. 409. P. 199-201.
5. Nerpin S.V., Chudkovsky A.F. Energy - and mass exchange in the plant-soil-air system. L.: Gidrometizdat, 1975. 358 pp.
6. Nakhushev A.M. On some ways of linearization of the equations of movement of ground waters and soil moisture // Boundary-value problems for the mixed type equations and related problems of the functional analysis and applied mathematics: interuniversity coll. Nalchik: KBGU, 1979. Iss. 2. 198 pp.
7. Hallaire M. Leon et productios vegetabl / Institut National de la Reche. Agronomique. 1964. N 9.
8. Polubarinova-Kochina P.Ya., Pryazhenskaya V.T., Emikh V.N. Mathematical methods in irrigation problems. M.: Nauka, 1969.
9. Sheyn E.V. The course of physics of soils. M.: MSU publishing house, 2005. 432 pp.