УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том XIX 1988 № 2

УДК 629.735.33.015.3.025.73

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОФИЛЕЙ С МАКСИМАЛЬНЫМ КРИТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ МАХА ПОТОКА ПРИ ЗАДАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

С. М. Аульченко, А. Ф. Латыпов, В. Г. Самарин

С помощью проекционно-оптимизационного метода, основанного на совместном решении оптимизационной задачи и задачи обтекания, на основе уравнений Эйлера исследуется задача построения симметричного профиля, реализующего бесскачковое обтекание с максимальным числом Маха набегающего потока.

Одной из задач прикладной аэродинамики дозвуковых скоростей полета является построение крыловых профилей с максимальным критическим числом Маха [1]. Качественное решение этой задачи на основе теоремы сравнения для случая потенциального обтекания известно [2]. В [1] приведены примеры расчета некоторого класса профилей, реализующих максимальное критическое число Маха. Однако для построения профилей, обеспечивающих также заданные значения коэффициентов аэродинамических характеристик, удовлетворительного алгоритма до сих пор нет. Для решения задач аэродинамического проектирования применяются прямые методы, методы, решающие обратную задачу, и вариационные методы. При несомненных достоинствах указанных методов и определенном круге решенных с их помощью задач они не лишены и недостатков. Первые требуют больших ресурсов ЭВМ, вторые — априорного представления о распределении параметров. Вариационные постановки реализуются пока лишь для достаточно простых задач. Метод, предложенный в работе [3], в существенной мере свободен от указанных выше недостатков и может быть применен для построения оптимальных профилей при учете различных геометрических и газодинамических ограничений.

Суть метода состоит в следующем. При многократном решении задач обтекания основное время ЭВМ идет на решение системы уравнений, описывающей течение газа, поэтому определение оптимального контура и решение задачи обтекания объединено в единый вычислительный процесс. Метод предполагает полную параметризацию задачи, включающую не только параметрическую форму задания контура тела $f=f(x, p)$, но и некоторую конечно-мерную аппроксимацию решения ψ_N

уравнений течения газа с некоторым числом свободных параметров a, к которым добавляются параметры, регулирующие размеры расчетных ячеек c:

$$\psi_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c}) = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})|_{\partial\Omega} + \underset{\omega_{ij}(\bar{c})}{U} \xi^T \boldsymbol{A}^{ij}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\,\eta, \quad \boldsymbol{x} = (x, y),$$

$$\boldsymbol{U}\,\omega_{ij} = \Omega, \quad \xi = (1, x, x^2, \ldots, x^N), \quad \eta = (1, y, y^2, \ldots, y^N),$$

ξ, η — базисные вектор-функции на [0,1], $\boldsymbol{A}^{ij}$ — матрица коэффициентов аппроксимации в ячейке ω_{ij}, которые вычисляются по рекуррентным соотношениям, вытекающим из принадлежности решения некоторому классу гладкости, что избавляет от необходимости многократно решать систему алгебраических уравнений большой размерности для определения коэффициентов аппроксимации во всей области. Таким образом, решение задачи в целом сводится к минимизации объединенного функционала, включающего невязки уравнений течения и собственно функционал оптимизационной задачи при соответствующих ограничениях:

$$H = F_{\text{опт}}(\boldsymbol{p})\,[1 + \alpha_1 F_T(\psi_N)] \Rightarrow \min_{a,\,p,\,c}, \quad \alpha_1 \gg 1,$$

$F_{\text{опт}}(p)$ — функционал оптимизационной задачи, $F_{\text{т}}(\varphi_N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{c}))$ — функционал невязок.

В данной статье демонстрируется его применение для решения задачи построения контура симметричного профиля, реализующего максимальное критическое число Маха потока идеального газа, набегающего под нулевым углом атаки при заданных геометрических ограничениях.

Постановка задачи. На профиль крыла, кроме естественных габаритных ограничений типа $l = \text{const}$, где l — хорда профиля, $f(0, \boldsymbol{p}) = 0$, $f(x_k, \boldsymbol{p}) = 0$, $x = 0$, $x = x_k$ — левый и правый концы хорды, часть требований к геометрии задается из соображений аэродинамического и конструктивного характера. В рассматриваемом случае эти дополнительные требования таковы:

$$\left.\begin{aligned} f_x(0, \boldsymbol{p}) = \infty, \quad f_x(x_k, \boldsymbol{p}) \geqslant \operatorname{tg}\theta_0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta_0 < 0, \\ f_{xx}(x, \boldsymbol{p}) \leqslant 0, \quad x \in [0, x_k]. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Условие при $x = x_k$ призвано исключить ситуации, связанные с возможным отрывом потока в диффузорной части профиля. Кроме того, условие построения в расчетной области около профиля регулярных сеток требует существования непрерывной 3-й производной $f(x, \boldsymbol{p})$, т. е.

$$f(x, \boldsymbol{p}) \in C^3(0, x_k). \qquad (2)$$

Из условий (1), исключающих конфигурации с торцом, являющиеся решениями в общем случае, и ограничения $M \leqslant 1$, следует: $f(x, \boldsymbol{p}) \in C^{\alpha}(0, x_k]$, $\alpha \geqslant 1$, иначе контур имеет излом, где $M > 1$. Функции $f(x, \boldsymbol{p})$ выбираем из множества степенных функций. Учитывая, что в расчетах на ЭВМ $f_x(0, \boldsymbol{p}) \leqslant K$, это множество является компактом, содержащим минимизирующую последовательность.

Итак, требуется построить контур $f(x,\ p)$, $x \in [0,\ x_k]$, удовлетворяющий условиям (1), (2), для которого в области течения $M \leqslant 1$, и доставляющий максимум площади, им ограниченной. Для заданного числа Маха невозмущенного потока этот контур доставляет максимум критического значения M_*. Для выделения единственного решения при несимметричном обтекании требуется выполнение следующих условий: если угол задней кромки больше нуля, то $q_+(x_k) = q_-(x_k) = 0$, если равен нулю, то $q_+(x_k) = q_-(x_k)$, где $q_+(x_k)$, $q_-(x_k)$ — модули скорости в конечной точке профиля, полученные при расчете течения сверху и снизу соответственно, [4]. Отметим, что в рамках предлагаемого алгоритма реализуема задача в обратной постановке: найти контур, удовлетворяющий условиям (1), (2), для которого всюду в области число $M \leqslant 1$, имеющий максимум M_* при некотором ограничении на площадь сечения.

Алгоритм решения задачи обтекания несимметричного плоского профиля под углом атаки. В качестве уравнения, по которому вычисляется невязка уравнений течения газа, возьмем уравнение для функции тока. Хотя оно имеет второй порядок, зато содержит одну неизвестную функцию, что существенно для специфики применяемого численного метода:

$$\left.\begin{gathered} \Phi = (a^2 - u^2)\,\psi_{xx} - 2uv\psi_{xy} + (a^2 - v^2)\,\psi_{yy} = 0, \\ q = (u,\ v),\quad \rho u = \psi_y,\quad \rho v = -\psi_x. \end{gathered}\right\} \tag{3}$$

Если считать невозмущенный поток однородным и искать решение уравнения (3) в классе $c^2(\Omega)$, то функция Бернулли и энтропия будут постоянными во всем потоке:

$$\frac{1}{2} q^2 + e_b = G_0,\quad S = S_0.$$

Все величины, входящие в (3), необходимо выразить через функцию и ее производные. Для совершенного газа они находятся последовательным решением следующих уравнений:

$$Dq^2 + Eq^{1-\gamma} = 1,\quad D = \frac{1}{2G_0},$$

$$E = \frac{\gamma e^{(\gamma-1)S/gR}}{(\gamma - 1)} (\psi_x^2 + \psi_y^2)^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$\rho = \frac{1}{q} (\psi_x^2 + \psi_y^2)^{1/2},\quad a^2 = \gamma \rho^{\gamma-1} e^{(\gamma-1)S_0/gR},$$

$$u = \psi_y/\rho,\quad v = -\varphi_x/\rho,$$

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} = e_b = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho},\quad S = \frac{gR}{(\gamma - 1)} \ln \frac{p}{\rho^\gamma}.$$

При дальнейших расчетах предполагаем, что параметры потока нормированы на соответствующие критические значения.

Построение расчетной области. Рассмотрим переход от системы координат $(x,\ y)$ (рис. 1) к системе координат $(t,\ \lambda)$, связанной с контуром профиля. Пусть контур расположен так, как показано на рис. 1. Для удобства пока опустим вектор $\boldsymbol{p}$ в списке аргументов функции, задающей профиль. Верхняя часть контура Γ_+ задана функцией $y = f(x)$,

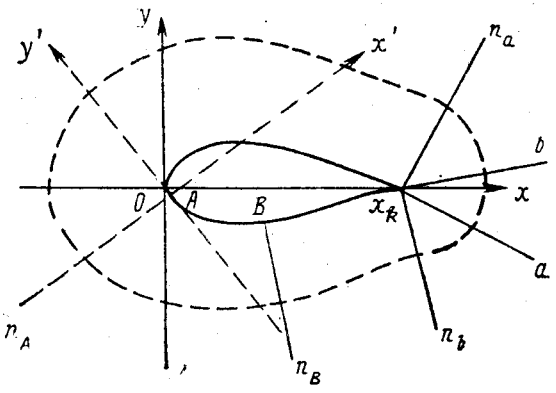


Рис. 1

нижняя Γ_- — $y=\bar{f}(x)$, причем $f_x(0)=\bar{f}_x(0)=\infty$. Прямые a, b — касательные в точке x_k к Γ_+ и Γ_- соответственно. Лучи n_a, n_b—нормали к ним в точке x_k. Лучи n_A, n_B—нормали к Γ_- в точках A, B, причем n_A образует с осью Ox заданный угол α, а n_B параллельна n_b. Плоскость (x, y) разбита на три подобласти с границами:

I. n_B, $y=\bar{f}(x)$, $x\in[0, x_B]$, $y=f(x)$, $x\in[0, x_k]$, n_a.

II. n_a, n_b.

III. n_b, $y=\bar{f}(x)$, $x\in[x_B, x_k]$, n_b.

Формулы перехода от (t, λ) к (x, y) в этих подобластях:

I.

$$x=\begin{cases} -t-\dfrac{\lambda\bar{f}_t(t)}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)}}, & t\in[-t_B, 0], \\ t-\dfrac{\lambda f_t(t)}{\sqrt{1+f_t^2(t)}}, & t\in[0, T], \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} \bar{f}(t)-\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)}}, & t\in[-t_b, 0], \\ f(t)+\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+f_t^2(t)}}, & t\in[0, T]. \end{cases}$$

II.

$$x=\begin{cases} T-\lambda\sin(t-\varphi^-+T), & t\in[T_-, -T], \\ T+\lambda\sin(t+\varphi^+-T), & t\in[T, T_+], \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} \lambda\cos(t-\varphi^-+T), & t\in[T_-, -T], \\ \lambda\cos(t+\varphi^+-T), & t\in[T, T_+], \end{cases}$$

$$\varphi^+=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+f_t^2(t)}}\right),$$

$$\varphi^-=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)}}\right),$$

$$T_+=T+\frac{\pi}{2}-\varphi^+,$$

$$T_-=-T-\frac{\pi}{2}+\varphi^-,$$

III.

$$x=-t-\frac{\lambda\bar{f}_t(T)}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(T)}},\quad t\in[-T,\ -t_B],$$

$$y=\bar{f}(t)-\frac{\lambda}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(T)}}.$$

Направляющие косинусы и метрические параметры систем координат в подобластях соответственно равны:

$$\alpha'_{\rm I}=\frac{1}{\sqrt{1+F_t^2(t)}},\quad \beta'_{\rm I}=F_t(t)\,\alpha'_{\rm I},\quad \alpha''_{\rm I}=-\beta'_{\rm I},\quad \beta''_{\rm I}=\alpha'_{\rm I},$$

$$\sqrt{g_{11\,\rm I}}=\sqrt{1+F_t^2(t)}\,(1+\lambda|K|),\quad \sqrt{g_{22\,\rm I}}=1,$$

$$F(t)=\bar{f}(t),\quad t\in[-t_B,\ 0],\quad F(t)=f(t),\quad t\in[0,\ T].$$

K — кривизна контура

$$\alpha'_{\rm II}=\cos(t\pm\varphi^{\pm}\mp T),\quad \beta'_{\rm II}=-\sin(t\pm\varphi^{\pm}\mp T),$$

$$\alpha''_{\rm II}=-\beta'_{\rm II},\quad \beta''_{\rm II}=\alpha'_{\rm II},$$

$$\sqrt{g_{11\,\rm II}}=\lambda,\quad \sqrt{g_{22\,\rm II}}=1.$$

$$\alpha'_{\rm III}=\frac{1}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)}},\quad \beta'_{\rm III}=\frac{\bar{f}_t(t)}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)}},$$

$$\alpha''_{\rm III}=\frac{\bar{f}_t(-T)}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(-T)}},\quad \beta''_{\rm III}=\frac{1}{\sqrt{1+\bar{f}_t^2(-T)}},$$

$$\sqrt{g_{11\,\rm III}}=\sqrt{1+\bar{f}_t^2(t)},\quad \sqrt{g_{22\,\rm III}}=1.$$

При переходе через границы областей необходимо использовать формулы пересчета для производных, обеспечивающих их непрерывность нужного порядка.

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\rm II}=\frac{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\rm I};$$

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\lambda}\right|_{\rm II}=\frac{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial\lambda}\right|_{\rm I}+$$

$$+\frac{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}\left(\sqrt{g_{11\,\rm I}}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}-\sqrt{g_{11\,\rm II}}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}\right)\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\rm I};$$

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right|_{\rm II}=\frac{g_{11\,\rm II}}{g_{11\,\rm I}}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right|_{\rm I}+\frac{g_{11\,\rm II}}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\rm I}\left[\frac{1}{\beta''}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta''}{\beta\sqrt{g_{11}}}\right)_{\rm I}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta''}{\beta\sqrt{g_{11}}}\right)_{\rm II}\right)+\frac{\beta'}{\beta''}\left(\sqrt{g_{11\,\rm I}}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}-\sqrt{g_{11\,\rm II}}\,\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}\right)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}\left.\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right|_{\rm I}\left(\frac{\sqrt{g_{11\,\rm I}}}{\beta''}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)_{\rm II}-\frac{\sqrt{g_{11\,\rm II}}}{\beta''}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)_{\rm I}\right).$$

Соотношения для производных при переходе от (t, λ) к (x, y) имеют следующий вид:

$$\psi_x = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta''}{\sqrt{g_{11}}}\psi_t - \frac{\beta'}{\sqrt{g_{22}}}\psi_\lambda\right),$$

$$\psi_y = \frac{1}{\beta}\left(-\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}}\psi_t + \frac{\alpha'}{\sqrt{g_{22}}}\psi_\lambda\right);$$

здесь β — синус угла между координатными линиями. Для подобластей I, II, $\beta = 1$, для III

$$\beta = \frac{1 + \bar{f}_t(t)\bar{f}_t(-T)}{\sqrt{(1+\bar{f}_t^2(t))(1+\bar{f}_t^2(-T))}}.$$

Формулировка краевой задачи. Уравнение (3) в переменных (t, λ) имеет вид:

$$\Phi = A\psi_{tt} + 2B\psi_{t\lambda} + C\psi_{\lambda\lambda} + D\psi_t + E\psi_\lambda = 0,$$

$$A = (a^2 - u^2)\frac{\beta''^2}{g_{11}} + (a^2 - v^2)\frac{\alpha''^2}{g_{11}} + 2uv\frac{\alpha''\beta''}{g_{11}},$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{g_{11}}}[(a^2 - u^2)\beta'\beta'' + (a^2 - v^2)\alpha'\alpha'' + uv(\beta''\alpha' + \beta'\alpha'')],$$

$$C = (a^2 - u^2)\beta'^2 + (a^2 - v^2)\alpha'^2 + 2uv\alpha'\beta',$$

$$D = \left[(a^2 - u^2)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\beta'^2}{g_{11}} - \beta'\beta''\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{\beta''^2}{\beta g_{11}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) + \right.$$

$$+ (a^2 - v^2)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha''^2}{g_{11}} - \alpha'\alpha''\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\alpha''^2}{\beta g_{11}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) +$$

$$\left. + 2uv\left(\frac{\beta''}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}} - \beta'\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{\beta''\alpha''}{\beta g_{11}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)\right],$$

$$E = -(a^2 - u^2)\left(\frac{\beta''}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta'}{\partial t} - \frac{\beta''\beta'}{\beta\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) -$$

$$-(a^2 - v^2)\left(\frac{\alpha''}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + \frac{\alpha''\alpha'}{\beta\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) - 2uv\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial t} + \frac{\beta''\alpha'}{\beta\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta}{\partial t}\right).$$

Численное решение строится в прямоугольной расчетной области, схематически изображенной на рис. 2.

Границы подобласти Ω_1:

$$\Gamma_1^1 \equiv \{\lambda = 0,\ t \in [-t_A,\ T_+]\}, \quad \Gamma_1^3 \equiv \{\lambda = \lambda_M,\ \ t \in [-t_A,\ T_+]\}.$$

$$\Gamma_1^2 \equiv \{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M,\ t = -t_A\}, \quad \Gamma_1^4 \equiv \{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M,\ t = T_+\}.$$

Границы подобласти Ω_2:

$$\Gamma_2^1 \equiv \{\lambda = 0,\ t \in [T_-,\ -t_A]\}, \quad \Gamma_2^3 \equiv \{\lambda = \lambda_M,\ t \in [T_-,\ -t_A]\},$$

$$\Gamma_2^2 \equiv \{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M,\ t = -t_A\}, \quad \Gamma_2^4 \equiv \{0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_M,\ t = T_-\}.$$

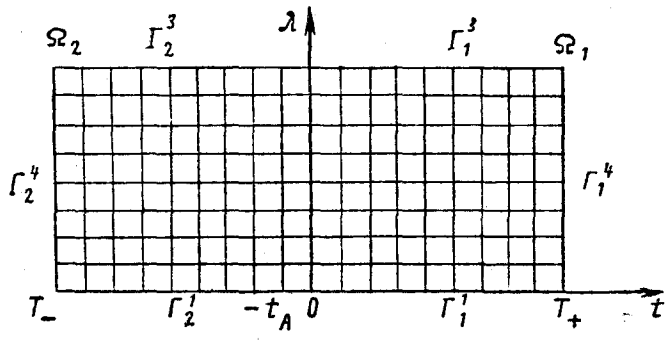


Рис. 2

Форма профиля определяется заданием функций верхнего и нижнего контуров:

$$f(t,\ \boldsymbol{p}_+)=a_+ t^4+b_+ t^3+c_+ t^2+d_+ t+t^{\alpha_+},\quad t=\left(\frac{x}{x_k}\right)^{1/4},\quad t\in[0,\ 1],$$

$$\overline{f}(t,\ \boldsymbol{p}_-)=a_- t^4+b_- t^3+c_- t^2+d_- t+t^{\alpha_-},\quad t=-\left(\frac{x}{x_k}\right)^{1/4},\quad t\in[-1,\ 0],$$

$$\boldsymbol{p}_+=(a_+,\ b_+,\ c_+,\ d_+,\ \alpha_+),\quad \boldsymbol{p}_-=(a_-,\ b_-,\ c_-,\ d_-,\ \alpha_-).$$

Здесь длина хорды профиля $l=x_k$ в плоскости $(x,\ y)$ и 1 в переменных $(t,\ \lambda)$. Внешняя граница выбирается на достаточном расстоянии $\lambda=\lambda_{\max}$ от профиля, чтобы считать влияние его на параметры на внешней границе малым. Область содержит внутренние разрезы n_A и $[x_k,\ x_M]$, которые разбивают ее на два четырехугольника, изображенных на рис. 2. Рассмотрим постановку условий на границах расчетной области. На поверхности крыла ставится условие непротекания, т. е. $\psi=0$ на $\Gamma_1^1\cup\Gamma_2^1$. Для вычисления производных функций ψ в области необходимо задание их на части границ. На контуре: $\psi_t=0$, $\psi_{tt}=0$. При симметричном обтекании $\Gamma_1^2(\Gamma_2^2)$ является нулевой линией тока. При несимметричном обтекании на прямой $\Gamma_1^2(\Gamma_2^2)$ ставится условие $\psi=\overline{\psi}(\lambda,\ \boldsymbol{b})$, где $\overline{\psi}(\lambda,\ \boldsymbol{b})$ — некоторое параметрическое задание ψ, подлежащее уточнению, как функция параметра $\boldsymbol{b}$, при оптимизации. Задание ψ на прямой и отказ от выделения нулевой линии тока в этом случае связаны со способом построения расчетной сетки. На второй внутренней границе $\Gamma_1^4(\Gamma_2^4)$ ставятся условия совпадения решения и его производных до заданного порядка при обходе профиля сверху и снизу. На внешней границе $\Gamma_1^3\cup\Gamma_2^3$ могут рассматриваться либо условие Дирихле: $\psi(t,\ \lambda_M)=\psi_\Gamma(t,\ \lambda_M)$, где $\psi_\Gamma(t,\ \lambda_M)$ — невозмущенная функция тока, либо, в случае смешанной краевой задачи, условия: $u=u_\infty$, $v=0$. Условие $v=0$ эквивалентно $\psi_x=0$, что является вариантом «мягких» условий. Численная реализация этих условий обсуждается после перехода к конечно-мерной модели.

Аппроксимация краевой задачи. Расчет в областях Ω_1, Ω_2 производится независимо. Области Ω_k, $k=1,\ 2$ разбиваются на ячейки ω_{ij}: отрезки $[-t_A,\ T_+]$ и $[T_-,\ -t_A]$ разбиваются на N_k+1 узлов соот-

ветственно $\{t_i^k\}$, $i=\overline{0,\ N_k}$; отрезок $[0,\ \lambda_M]$ на N_3+1 узел $\{\lambda_l\}$, $i=0,\ N_3$. Аппроксимация ψ принимает следующий конкретный вид:

$$\psi_{ij}(t,\ \lambda)=[\psi_{ij-1}(t,\ \lambda_{j-1})-\psi_{ij-1}(t_{i-1},\ \lambda_{j-1})]+[\psi_{i-1\,j}(t_{i-1},\ \lambda)-$$

$$-\psi_{i-1\,j}(t_{i-1},\ \lambda_{j-1})]+\psi_{i-1\,j-1}(t_{i-1},\ \lambda_{i-1})+\sum_{s=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{sl}^{ij}\xi^s\eta^l,\quad m=3,$$

$$\xi=\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}},\quad 0\leqslant\xi\leqslant 1,$$

$$\eta=\frac{\lambda-\lambda_{j-1}}{\lambda_j-\lambda_{j-1}},\quad 0\leqslant\eta\leqslant 1.$$

Коэффициенты в ячейках вычисляются по формулам:

$$a_{ql}^{ij}=\frac{1}{q!}\left(\frac{h_i}{h_{i-1}}\right)^q\sum_{k=q}^{m}k!\ a_{kl}^{i-1\,j};\quad k,\ l=\overline{1,\ 3},\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}a_{kq}^{ij}&=\frac{1!}{q!}\left(\frac{H_j}{H_{j-1}}\right)^q\sum_{l=q}^{m}e!\ a_{kl}^{ij-1},\quad i=\overline{1,\ N_1},\ j=\overline{1,\ N_2},\\ h_i&=t_i-t_{i-1},\quad H_j=\lambda_j-\lambda_{j-1},\quad q=1,\ 2,\quad i\neq 1,\ j\neq 1.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Коэффициенты a_{sl}^{ij}, $s,\ l=1,\ 2$ могут быть вычислены как по формуле (4), так и по (5). Однако легко проверить, что они совпадают, например, из (4):

$$a_{11}^{ij}=\sum_{l=1}^{3}l!\ a_{l\,1}^{i-1\,j}\ \frac{h_i}{h_{l-1}}=\sum_{l=1}^{3}e!\left(\sum_{k=1}^{3}k!\ a_{ek}^{i-1\,j-1}\ \frac{H_j}{H_{j-1}}\right)\frac{h_i}{h_{i-1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}k!\left(\sum_{l=1}^{3}l!\ a_{lk}^{i-1\,j-1}\ \frac{h_i}{h_{i-1}}\right)\frac{H_j}{H_{j-1}}=\sum_{k=1}^{3}k!\ a_{1k}^{ij-1}\ \frac{H_j}{H_{j-1}}=a_{11}^{ij}.$$

Коэффициент a_{33}^{ij} во всех ячейках, кроме примыкающих к внешней границе, вычисляется из условия коллокации в узле: $\Phi(t_i,\ \lambda_j)=0$, которое приводит к системе нелинейных уравнений. Вычисляя $a_{33}^{iN_3}$ в узлах ячеек, примыкающих к Γ_1^3 и Γ_2^3, по формуле

$$a_{33}^{iN_3}=\psi_\Gamma(t_i,\ \lambda_M)-\psi_\Gamma(t_{i-1},\ \lambda_M)+\psi^{iN_3}(t_{i-1},\ \lambda_{N_3-1})-\psi^{iN_3}(t_i,\ \lambda_{N_3-1})-$$

$$-\sum_{s=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}a_{sl}^{iN_3}q^{s+l},\quad q^{s+l}=\begin{cases}1, & s+l<6\\ 0, & s+l=6,\end{cases}\tag{6}$$

удовлетворим в них условию Дирихле. Для смешанной краевой задачи величина $a_{33}^{iN_3}$ вычисляется из условия $\psi_x^{iN_3}(t_i,\ \lambda_M)=0$ и штрафуется при минимизации величина $\sum_{i=0}^{N_1+N_2}[u^{iN_3}(t_i,\ \lambda)-u_\infty]^2$. Остальные невычисляемые коэффициенты — свободные параметры аппроксимации, их число $\sim N$.

$$N=\max(N_1,\ N_2,\ N_3).$$

Таким образом, решение задачи обтекания профиля сводится к задаче конечно-мерной минимизации функционала [5]:

$$F_T\left(\psi_N(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{p},\ \boldsymbol{c})\right)=\left[\frac{1}{\Omega}\iint\limits_{\Omega}\Phi_{\mathrm{p}}(\psi_N)\,d\omega\right]^{1/2}$$

по параметрам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, где $\boldsymbol{a}$ — вектор свободных параметров, $\boldsymbol{c}$ — вектор нормированных параметров распределения узлов сетки. Φ_{p} — регуляризирующий функционал задачи:

$$\Phi_{\mathrm{p}}(\psi)=\psi_{tt}^2+\psi_{t\lambda}^2+\psi_{\lambda\lambda}^2.$$

Функционал оптимизационной задачи имеет вид: $F_{\text{опт}}(\boldsymbol{p})=\left[\int\limits_0^1 f(t,\ \boldsymbol{p})\,dt\right]^{-1}$, для симметричного профиля $\boldsymbol{p}=(a_+,\ b_+,\ c_+,\ d_+,\ \alpha_+)$. В объединенный функционал H добавляется член $\alpha_2 q_{\pm}^2(x_k)$, где $\alpha_2\gg 1$, учитывающий условие Жуковского. Ограничения оптимизационной задачи формулируются и учитываются следующим образом:

$$1)\ L_1=\theta_0-\operatorname{arctg}\left(f_x(x_k,\ \boldsymbol{p})\right)\leqslant 0;$$

$$2)\ L_2=\frac{1}{\Omega}\sum_{j=1}^{N_3}\left[\sum_{i=1}^{N_1}0{,}5\left(|M-1|+M-1\right)|_{\xi_i=\eta_j=0{,}5}\,S(\omega_{ij})+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N_2}0{,}5\left(|M-1|+M-1\right)|_{\xi_i=\eta_j=0.5}\,S(\omega_{ij})\right]\leqslant 0.$$

Для учета ограничения $f_{xx}(x,\ p)$ используется алгоритм Штурма исследования многочленов.

Результаты расчетов. Проведены расчеты следующих оптимизационных задач. Исходными параметрами в серии расчетов являются $\operatorname{tg}\theta_0$ — тангенс угла наклона контура профиля в точке x_k и число M невозмущенного потока M_∞. При фиксированном ограничении на угол задней кромки $\theta\leqslant 10^\circ$ построены контуры с максимальной площадью, охватываемой ими, и реализующие в своем классе безударное обтекание с данным числом M_∞. Зависимость между значением критического числа M набегающего потока и площадью профиля приведена в таблице. Так как все размеры в расчетах являются приведенными, то изменение площади приведено в процентах.

M_*	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
S, %	100	86,8	73,4	61,3	51

Контуры профилей для чисел $M_\infty=0{,}5$; 0,6; 0,7 приведены на рис. 3. Можно отметить, что с уменьшением критического числа Маха при фиксированном θ_0 увеличивается участок контура, примыкающий к точке x_k, близкий к прямоугольному с углом наклона θ_0, следовательно, уменьшается криволинейный участок, на котором число M близко

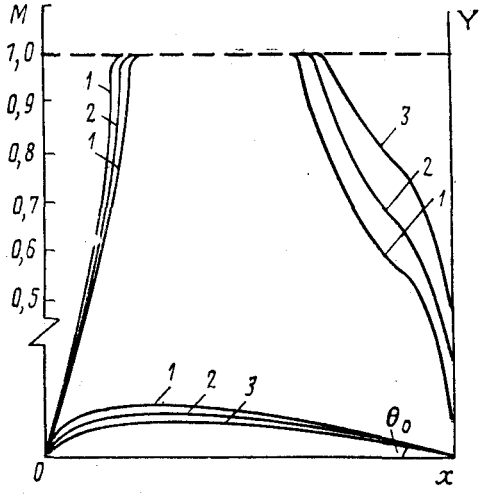


Рис. 3

к единице. Допустимое из аэродинамических соображений увеличение θ_0 при фиксированном M_∞ приводит к росту площади профиля и, следовательно, для заданной площади к росту M_*. Проведенные расчеты показывают неплохое качественное согласование полученных распределений газодинамических параметров потока на контуре с теоретическими результатами [2].

Проведен ряд расчетов оптимизационных задач с заменой функционала $F_{\text{опт}} = \max\limits_{p} S$ на $F_{\text{опт}} = \max\limits_{p} M_*$ при фиксированной площади профиля, которая соответствовала площади, полученной при решении задачи в постановке I. В результате получено практически то же значение M_*, что и задавалось в качестве M_∞ при решении оптимизационной задачи в постановке I. При расчетах использовались комплексы программ оптимизации [6]. В заключение отметим, что данный метод решения краевых задач позволяет компактно хранить информацию об уже решенных задачах в виде оптимальных векторов $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{c}_0$, $\boldsymbol{p}_0$, что удобно при аэродинамическом проектировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брутян М. А., Ляпунов С. В. Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха. — Ученые записки ЦАГИ, 1981, т. 12, № 5.

2. Gilbarg D., Shiggman M. On bobies schieving extreme values of the critical Mach number. — Journal Rational Mech., Anal., 1954, vol. 3, N 2.

3. Аульченко С. М., Латыпов А. Ф., Яненко Н. Н. Применение проекционного метода для построения контура тела минимального сопротивления. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, № 2.

4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962.

5. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. — М.: Изд. МГУ, 1983.

6. Латыпов А. Ф., Никуличев Ю. В. Специализированный комплекс программ оптимизации. — Препринт ИТПМ СО АН СССР № 15—85, Новосибирск, 1985.

Рукопись поступила 18/IX 1986 г.