

УДК 530.145.7:517.9
ББК 22.17
М 14

Майорова Анжела Николаевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и информационных технологий гуманитарно-педагогической академии (филиал) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» в г. Ялте, Ялта, e-mail: yumitcay@yandex.ru

Мицай Андрей Юрьевич

Студент кафедры информатики и информационных технологий гуманитарно-педагогической академии (филиал) ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» в г. Ялте, Ялта, e-mail: andrymitcay@yandex.ru

Приближенное интегрирование космологических уравнений Вселенной (Рецензирована)

Аннотация. С помощью метода теории возмущений получены поправки к решениям системы космологических уравнений, описывающих динамическое поведение Вселенной. При этом выбран конкретный вид потенциальной энергии инфлатона, который наиболее просто объясняет наблюдаемую динамику Вселенной. Предлагается приближенное интегрирование системы космологических уравнений в окрестности точки минимума и точки максимума потенциальной энергии инфлатона.

Ключевые слова: теория возмущений, приближенное решение, потенциальная энергия, динамика Вселенной, космологические уравнения.

Mayorova Anzhela Nikolaevna

Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Informatics and Information Technology, Humane-Pedagogical Academy (branch) V.I. Vernadsky Crimean Federal University in Yalta, Yalta, e-mail: yumitcay@yandex.ru

Mitsay Andrey Yuryevich

Student, Humane-Pedagogical Academy (branch) V.I. Vernadsky Crimean Federal University in Yalta, Yalta, e-mail: andrymitcay@yandex.ru

Approximate integration of cosmological equations of the Universe

Abstract. Using the perturbation theory method, we obtain corrections to the solutions of the system of cosmological equations describing the dynamic behavior of the Universe. At the same time, we choose a specific kind of potential energy of the inflaton, which most simply explains the observed dynamics of the Universe. Next, we propose an approximate integration of a system of cosmological equations in the vicinity of the minimum point and the point of maximum potential energy of the inflaton.

Keywords: perturbation theory, approximate solution, potential energy, dynamics of the Universe, cosmological equations.

Введение

В 1998 году было открыто ускоренное расширение Вселенной. С этого момента началась эра новой космологии [1–3], хотя идеи о возможности такого поведения Вселенной высказывались гораздо раньше. Чтобы избавиться от начальной сингулярности, В. Гурович и А. Старобинский в 1979 году попытались получить квантовые поправки к уравнению Гильберта-Эйнштейна [4]. В 1981 году Алан Гут [5] предположил, что в начальной стадии возникновения Вселенной она должна находиться в состоянии псевдовакуума симметричной фазы, из которого она в разных местах переходит в состояние истинного несимметричного вакуума. Пузыри такого вакуума создаются в процессе фазового перехода вакуума в несимметричное состояние. Однако его теория не решала известных космологических проблем, которые он собирался решить: однородности, изотопии, плоскостности. Первая реалистическая модель инфляции была предложена А.Д. Линде [6, 7]. В работе [1] получено решение системы космологических уравнений в основном приближении, состоящей из уравнений для космологического масштабного фактора и уравнения скалярного поля инфлатона, вызывающего ускоренное расширение Вселенной [2, 3, 8, 9]. В данной работе получены поправки к решению Линде с помощью метода теории возмущений [10]. При этом

выбран конкретный вид потенциальной энергии инфлатона (рис. 1), который наиболее просто объясняет наблюдаемую динамику Вселенной. Такое динамическое поведение Вселенной связывается с поведением скалярного поля φ -инфлатона, который сначала находится в окрестности точки φ_0 . При этом его потенциальная энергия максимальна и равна u_0 – Вселенная расширяется с большим ускорением. После того, как инфлатон «скатывается» в окрестность точки φ_1 , происходит взрыв, его потенциальная энергия уменьшается и становится меньше энергии темной материи – Вселенная начинает замедляться. Однако плотность энергии инфлатона u_1 постоянна, а плотность темной материи падает обратно пропорционально объему. Поэтому, начиная с некоторого момента замедления, плотность энергии инфлатона становится больше плотности темной материи, и Вселенная снова начинает ускоряться, хотя с меньшим ускорением, поскольку $u_1 = u(\varphi_1) < u_0 = u(\varphi_0)$. Это динамическое поведение Вселенной и изучается в данной работе, в которой система уравнений, описывающая динамику Вселенной, рассматривается для случаев, когда инфлатон находится в окрестности точек φ_0 и φ_1 .

Основная часть

В работе [11] были получены уравнения динамики для ускоренно расширяющейся Вселенной с метрикой

$$g = dt \otimes dt - a^2(t) \{ d\chi \otimes d\chi + \sin^2 \chi (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi) \}. \quad (1)$$

Космологические уравнения представляют собой уравнение Гильберта-Эйнштейна для R_{00} , $0,0$ – компоненты свернутого тензора кривизны пространства-времени, и уравнение динамики инфлатона, действительного скалярного поля, тензор энергии-импульса которого $T_{\alpha\beta}$ играет роль темной энергии:

$$\begin{cases} R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} = \chi \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} (x^\beta) T \right), \\ \partial^\alpha \partial_\alpha \varphi (x^\beta) + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi (x^\beta) + u'(\varphi(x^\beta)) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В математической модели инфлатона, предложенной Линде, рассматривается поле инфлатона, зависящее только от времени t , что приводит систему уравнений (2) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\chi}{3} \{ \dot{\phi}^2 - u(\phi) \}, \\ \ddot{\phi} + 3 \frac{\ddot{a}}{a} \dot{\phi} + u'(\phi) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $u(\varphi)$ – потенциальная энергия инфлатона.

Рассмотрим случай, когда $u(\varphi)$ имеет вид (рис. 1):

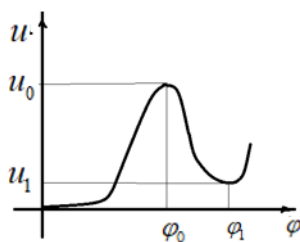


Рис. 1. Потенциальная энергия инфлатона $u(\varphi)$

То есть в точке φ_0 – максимум, а в точке φ_1 – минимум.

В данной работе предлагается приближенное интегрирование системы (3) в окрестности точки минимума и точки максимума. В окрестности точки φ_0 первые члены разложения

потенциальной энергии инфлатона $u(\varphi)$ в ряд Тейлора имеют вид:

$$u(\varphi) \approx u_0 - \frac{A}{2}(\varphi - \varphi_0)^2, \quad (4)$$

где $A = |u''(\varphi_0)|$.

Будем считать, что инфлатон, поднявшись на вершину $u(\varphi_0)$, потерял почти всю кинетическую энергию, следовательно, $\dot{\varphi} \ll 1$. Используя это и выражение (4), приведем систему (3) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} \approx -\frac{\chi}{3} \left(u_0 - \frac{A}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 \right), \\ \ddot{\varphi} + u'(\varphi) \approx 0. \end{cases} \quad (5)$$

Умножив второе уравнение системы (5) на $\dot{\varphi}$, получим:

$$\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}u'(\varphi) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + u(\varphi) \right) = 0. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + u(\varphi) = E,$$

что дает

$$\dot{\varphi} = \sqrt{2 \left[E - u_0 + \frac{A}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 \right]} = \sqrt{B + A\Psi^2} = \dot{\Psi}. \quad (7)$$

Здесь мы использовали разложение Тейлора (4) и ввели обозначения:

$$\begin{cases} 2(E - u_0) = B, \\ \varphi - \varphi_0 = \Psi. \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение (7) легко интегрируется:

$$\int_0^\Psi \frac{dy}{\sqrt{B + Ay^2}} = t = \frac{1}{\sqrt{B}} \int_0^\Psi \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{A}{B}y^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcsinh} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} \Psi \right). \quad (9)$$

Из (9) получаем:

$$\Psi = \sqrt{\frac{B}{A}} \operatorname{sh}(\sqrt{A}t) = \varphi - \varphi_0. \quad (10)$$

Таким образом, динамика инфлатона φ в окрестности точки φ_0 имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \sqrt{\frac{B}{A}} \operatorname{sh}(\sqrt{A}t). \quad (11)$$

Подставив (11) в первое уравнение системы (5), получим:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\chi}{3} \left(u_0 - \frac{B}{2} \operatorname{sh}^2(\sqrt{A}t) \right) = \frac{\chi}{3} \left(u_0 - (E - u_0) \operatorname{sh}^2(\sqrt{A}t) \right). \quad (12)$$

Введем обозначение $\frac{\chi}{3}(E - u_0) = S$ и решим уравнение (12) методом теории возмущений. Запишем (12) в следующем виде:

$$\ddot{a} = \frac{\chi}{3} u_0 a - Ssh^2(\sqrt{At})a. \quad (13)$$

Будем считать S величиной первого порядка малости и представим решение (13) в виде суммы нулевого и первого порядка малости:

$$a = a_0 + a_1. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим:

$$\ddot{a}_0 + \ddot{a}_1 = \frac{\chi}{3} u_0 (a_0 + a_1) - Ssh^2(\sqrt{At})a_0.$$

Отсюда получим систему уравнений для нахождения a_0 и a_1 :

$$\begin{cases} \ddot{a}_0 = \frac{\chi}{3} u_0 a_0, \\ \ddot{a}_1 = \frac{\chi}{3} u_0 a_1 - Ssh^2(\sqrt{At})a_0. \end{cases} \quad (15)$$

Подставив решение первого уравнения системы (15)

$$a_0(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t\right) a_0(0) \quad (16)$$

во второе уравнение системы (15), получим:

$$\ddot{a}_1 - \frac{\chi}{3} u_0 a_1 = -Ssh^2(\sqrt{At}) \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t\right) a_0(0). \quad (17)$$

Отсюда

$$a_1 = S \frac{3}{\chi u_0} \left(1 + \frac{3}{\chi u_0} \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{3}{\chi u_0} \right)^2 \frac{d^4}{dt^4} + \dots \right) sh^2(\sqrt{At}) \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t\right) a_0(0). \quad (18)$$

Если $u_0 \gg 1$ (как в случае нашей Вселенной), то

$$a_1 \approx S \frac{3}{\chi u_0} sh^2(\sqrt{At}) \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t\right) a_0(0). \quad (19)$$

Подставляя (16) и (19) в формулу (14), получим для $a(t)$, входящего в метрику (1), выражение:

$$a(t) \approx \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t\right) \left[1 + S \frac{3}{\chi u_0} sh^2(\sqrt{At}) \right] a(0). \quad (20)$$

Рассмотрим теперь окрестность точки φ_1 , в которую инфлатон попадает через время T с начала движения из точки φ_0 :

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcsch} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} (\varphi - \varphi_0) \right]. \quad (21)$$

Именно в ней и происходит Большой Взрыв, когда часть энергии инфлатона $u(\varphi_0) - u(\varphi_1)$ переходит в энергию-массу элементарных частиц.

Разложение в ряд Тейлора потенциальной энергии инфлатона в окрестности точки φ_1 имеет вид:

$$u \approx u(\varphi_1) + \frac{D}{2} (\varphi - \varphi_1)^2. \quad (22)$$

Подставим разложение (22) в систему (3). Учтем также факт, что перед Большим Взрывом произошло экспоненциальное расширение Вселенной, а, следовательно, $a \gg 1$ и $3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} \approx 0$, получим:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} \approx \frac{\chi}{3} \left[u(\varphi_1) + \frac{D}{2}(\varphi - \varphi_1)^2 \right] = \frac{\chi}{3} \left[u(\varphi_1) + \frac{D}{2}\eta^2 \right], \\ \dot{\varphi} \approx -u'(\varphi) = -D(\varphi - \varphi_1) = -D\eta, \end{cases} \quad (23)$$

где введено обозначение $\eta = (\varphi - \varphi_1)$.

Решение второго уравнения системы (23) хорошо известно:

$$0 = \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^2 + D \right] \eta = \left[\frac{d}{dt} + i\sqrt{D} \right] \left[\frac{d}{dt} - i\sqrt{D} \right] \eta.$$

Отсюда $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где

$$\frac{d\eta_1}{dt} = i\sqrt{D}\eta_1, \quad \frac{d\eta_2}{dt} = -i\sqrt{D}\eta_2,$$

тогда

$$\eta_1 = A \exp(i\sqrt{D}t), \quad \eta_2 = B \exp(-i\sqrt{D}t)$$

и

$$\eta = A \exp(i\sqrt{D}t) + B \exp(-i\sqrt{D}t) = C_1 \cos(\sqrt{D}t) + C_2 \sin(\sqrt{D}t) = K \cos(\sqrt{D}t + \nu).$$

Это определяет динамику инфлатона в виде:

$$\varphi = \varphi_1 + K \cos(\sqrt{D}t + \nu). \quad (24)$$

Подставляя решение (24) в первое уравнение системы (23), получим:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) + \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{D}t + \nu) \quad (25)$$

или

$$\ddot{a} = \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) a + \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{D}t + \nu) a. \quad (26)$$

Будем решать уравнение (26) методом теории возмущений, представив решение (26) в виде суммы нулевого и первого порядка малости:

$$a = a_0 + a_1. \quad (27)$$

Подставив (27) в (26), получим:

$$\ddot{a}_0 + \ddot{a}_1 = \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) (a_0 + a_1) + \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{D}t + \nu) a_0,$$

что дает

$$\begin{cases} \ddot{a}_0 = \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) a_0, \\ \ddot{a}_1 = \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) a_1 + \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{D}t + \nu) a_0. \end{cases} \quad (28)$$

Решение первого уравнения системы (28) имеет вид:

$$a_0(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)}(t - T)\right) a_0(T). \quad (29)$$

Подставляя (29) во второе уравнение (28), получим:

$$\left[\left(\frac{d}{dt} \right)^2 - \frac{\chi}{3} u(\varphi_1) \right] a_1 = \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_0(T). \quad (30)$$

Решение уравнения (30) имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\frac{\chi}{6} DK^2}{\left(\frac{d}{dt} \right)^2 - \frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_0(T) = \\ &= -\frac{3}{\chi u(\varphi_1)} \frac{\frac{\chi}{6} DK^2}{1 - \frac{3}{\chi u(\varphi_1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^2} \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_{0(T)} = \\ &= -\frac{3}{\chi u(\varphi_1)} \left(1 + \frac{3}{\chi u(\varphi_1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \dots \right) \frac{\chi}{6} DK^2 \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_0(T) \approx \\ &\approx -\frac{DK^2}{2u(\varphi_1)} \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_0(T). \end{aligned} \quad (31)$$

В (31) мы воспользовались тем, что $\frac{1}{u(\varphi_1)} \ll 1$, ранее мы предполагали это условие выполненным.

Складывая (31) и (29), получаем приближенное значение a :

$$a \approx \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u(\varphi_1)} (t - T) \right) a_0(T) \left(1 - \frac{DK^2}{2u(\varphi_1)} \cos^2(\sqrt{Dt} + \nu) \right). \quad (32)$$

Итак, мы получили приближенное решение космологических уравнений в окрестностях точек φ_0 и φ_1 , то есть при экспоненциальном расширении Мультиверса и при Большом Взрыве.

Заключение

В данной работе было изучено поведение динамической системы, состоящей из космологического масштабного фактора $a = a(t)$ и инфлатона $\varphi = \varphi(t)$, в приближении его независимости от пространственных координат. Динамика этой системы была изучена как в период инфляции, когда инфлатон находился в псевдовакуумном состоянии, на вершине своей потенциальной энергии, так и в окрестности точки φ_0 . Динамика инфлатона описывается формулой:

$$\varphi = \varphi_0 + \sqrt{\frac{B}{A}} sh(\sqrt{A}t),$$

то есть величина поля φ возрастает как гиперболический синус, при этом космологический масштабный фактор a экспоненциально растет:

$$a(t) \approx \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3} u_0} t \right) \left[1 + S \frac{3}{\chi u_0} sh^2(\sqrt{A}t) \right] a(0).$$

Так, в период большого Взрыва, когда инфлатон находится в окрестности точки φ_1 , в которую попадает за время

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arcsch} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} (\varphi - \varphi_0) \right],$$

он совершает гармонические колебания вблизи значения φ_1 с амплитудой K :

$$\varphi = \varphi_1 + K \cos(\sqrt{D}t + \nu).$$

Эти колебания затухают за счет излучения гравитационных волн. При этом ускорение Вселенной уменьшается:

$$a \approx \exp \left(\sqrt{\frac{\chi}{3}} u(\varphi_1) (t - T) \right) a_0(T) \left(1 - \frac{DK^2}{2u(\varphi_1)} \cos^2(\sqrt{D}t + \nu) \right).$$

Примечания:

1. Линде А.Д. Многоликая Вселенная: публичная лекция. Москва: ФИАН, 2007. URL: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/430484
2. Вайнберг С. Космология: монография: пер. с англ. / под ред. и с предисл. И.Я. Арефьевой, В.И. Саянжука. Москва: УРСС: ЛИБРОКОМ, 2013. 608 с.
3. Болотин Ю.Л., Ерохин Д.А., Лемец О.А. Расширяющаяся Вселенная: замедление или ускорение? // УФН. 2012. Т. 182, № 9. С. 941–986.
4. Гурович В.Ц., Старобинский А.А. Квантовые эффекты и регулярные космологические модели // ЖЭТФ. 1979. Т. 77 (5). С. 1683.
Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters. Section B. 1980. Vol. 91. P. 99.
5. Guth A.H. The Inflationary Universe: The Quest for a new theory of Cosmic Origins. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1997. 358 p.
6. Linde A.D. Eternally Existing Self-Reproducing Chaotic Inflationary // Physics Letters. Section B. 1986. Vol. 175, No. 4. P. 395–400.
7. Linde A.D. Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke // Physics Letters. Section B. 1990. Vol. 249, No. 1. P. 18–26. URL: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)90521-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90521-7)
8. Lombriser L. On the cosmological constant problem // Physics Letters. Section B. 2019. Vol. 797. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.134804>
9. Model of Evolution of the Universe with the Bianchi Type VIII Metric / V.F. Panov, O.V. Sandakova, D.M. Yanishevsky, M.R. Cheremnykh // Russian Physics Journal. 2019. Vol. 61, No. 9. P. 1629–1637.
10. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / пер. с англ. А.Г. Соколовского; под ред. А.П. Маркеева. Москва: Наука, 1979. 319 с.
11. Майорова А.Н., Мендыгулов Ю.Д., Мицай Ю.Н. Пятимерная геометрия Супермультиверса как результат синергетической самоорганизации стохастических флуктуаций в геометрии Минковского // Научные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Сер.: Физико-математические науки. 2013. Т. 26 (65), № 2. С. 95–108.

References:

1. Linde A.D. Multiverse: a public lecture. Moscow: FIAN, 2007. URL: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/430484
2. Weinberg S. Cosmology: a monograph: transl. from English / ed. and a foreword by I.Ya. Arefyeva, V.I. Sanyuk. Moscow: URSS: LIBROKOM, 2013. 608 p.
3. Bolotin Yu.L., Erokhin D.A., Lemets O.A. Expanding Universe: Slowdown or Speedup? // UFN. 2012. Vol. 182, No. 9. P. 941–986.
4. Gurovich V.Ts., Starobinsky A.A. Quantum effects and regular cosmological models // ZhETF. 1979. Vol. 77 (5). P. 1683.
Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Physics Letters. Section B. 1980. Vol. 91. P. 99.
5. Guth A.H. The Inflationary Universe: The Quest for a new theory of Cosmic Origins. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1997. 358 p.
6. Linde A.D. Eternally Existing Self-Reproducing Chaotic Inflationary // Physics Letters. Section B. 1986. Vol. 175, No. 4. P. 395–400.
7. Linde A.D. Eternal extended inflation and graceful exit from old inflation without Jordan-Brans-Dicke // Physics Letters. Section B. 1990. Vol. 249, No. 1. P. 18–26. URL: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(90\)90521-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(90)90521-7)
8. Lombriser L. On the cosmological constant problem // Physics Letters. Section B. 2019. Vol. 797. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.134804>
9. Model of Evolution of the Universe with the Bianchi Type VIII Metric / V.F. Panov, O.V. Sandakova, D.M. Yanishevsky, M.R. Cheremnykh // Russian Physics Journal. 2019. Vol. 61, No. 9. P. 1629–1637.
10. Dzhakalya G.E.O. Perturbation theory methods for nonlinear systems / transl. from English by A.G. Sokolovsky; ed. by A.P. Markeev. Moscow: Nauka, 1979. 319 p.
11. Mayorova A.N., Mendygulov Yu.D., Mitsay Yu.N. Five-Dimensional Geometry of Supermultivers as a Result of the Synergetic Self-Organization of Stochastic Fluctuations in the Minkowski Geometry // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. Ser.: Physics and Mathematics Sciences. 2013. Vol. 26 (65), No. 2. P. 95–108.