НАС.// Детали машин; Сб. Научн. Тр. – Киев: Техника, 1992 - вып. 54 - С. 61-64.
3. Крагельский И. В. Трение и износ. – М.,: Машиностроение, 1986. – 480 с.
4. Усов А. В., Дубров А. Н., Дмитришин Д. В. Моделирование систем с распределенными параметрами. – Одесса: Астропринт, 2002. – 664 с.

Одержано 14.06.07

Використовуючи математичне моделювання стійкості контактної взаємодії абразивної частинки, показано, що інтенсивність зношування визначається умовами мікрорізання або тертя абразивного зерна з парою тертя з полімерним покриттям.

Using the mathematical model of abrasive particle contact co-operation stability, it was shown that intensity of wear is determined by terms of microcutting or friction of abrasive corn with the friction pair with polymeric coverage.

УДК 621.9

Д-р техн. наук Ю. Н. Внуков, М. А. Шамровский

Национальный технический университет, г. Запорожье

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОФИЛЯ КУЛАЧКА ПО МЕЖОСЕВОМУ РАССТОЯНИЮ ДО КРУГЛОГО ТОЛКАТЕЛЯ

В статье показан вывод формул, устанавливающих математическую связь между профилем кулачка, представленным в полярных координатах, и законом возвратно-поступательного движения круглого толкателя. Выведенные зависимости являются основой для написания управляющих программ для станков с ЧПУ при высокоточном шлифовании профилей кулачков.

Введение

В практике при изготовлении и контроле профиля различных кулачков необходимо иметь точную математическую связь между профилем кулачка, заданного в полярных координатах, и расстояниях X_C между осями вращения кулачка и круглого толкателя (рис. 1) при условии их касания.

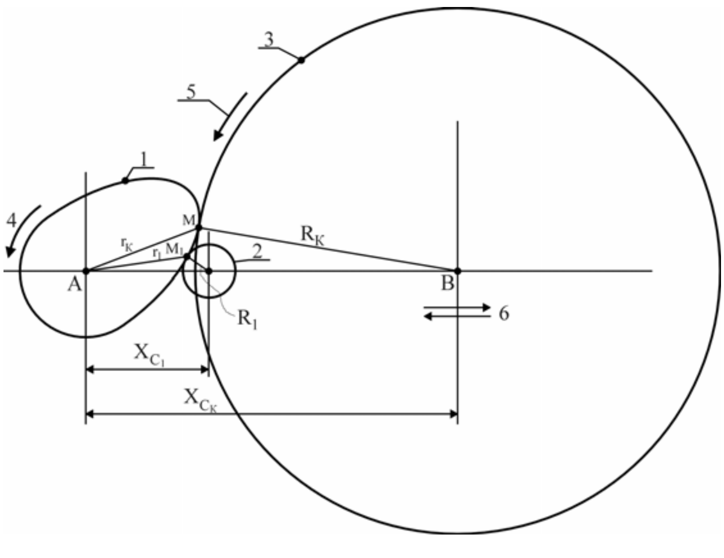

Рис. 1. Схема контактирования кулачка с круглым толкателем:

1 – контактная поверхность кулачка; 2 – контактная поверхность измерительного прибора; 3 – контактная поверхность шлифовального круга (ШК); 4 – вращение кулачка; 5 – вращение ШК; 6 – возвратно-поступательное движение оси ШК

На рис. 1. показано, что в качестве круглого толкателя может быть контактная поверхность щупа измерительного прибора – 2 для контроля профиля кулачка, а также рабочая поверхность шлифовального круга (ШК) –3 при абразивном профилировании кулачка.

При шлифовании кулачков на станках с ЧПУ необходимо знать закон возвратно-поступательного движения шлифовальной бабки в зависимости от угла поворота кулачка. Более того, после правки ШК его радиус R уменьшается, изменяется место расположения точки касания ШК с кулачком M, что ведет к необходимости введения коррекции в массив данных, для сохранения высокой точности профиля кулачка при его шлифовании.

Основная часть

Рассмотрим кулачок произвольной формы (рис. 2). Будем задавать контур кулачка в полярных координатах по формуле

$$r = r(\varphi) \qquad (1)$$

Ось x проходит вдоль оси симметрии кулачка. При вращении кулачка относительно точки O вместе с ним вращаются и оси координат X и Y.

Введем в рассмотрение неподвижные оси координат X и Y. Взаимное расположение подвижных и неподвижных осей при повороте кулачка на некоторый заданный угол q изображено на рис. 2.

Угол поворота кулачка θ положителен при повороте кулачка по часовой стрелке. Угол φ определяется алгебраически. Тригонометрические функции остаются стандартными, следовательно, для уравнений, использующих тригонометрические функции от θ, необходимо сделать соответствующие математические преобразования для изменения знака.

Пусть теперь кулачок контактирует в точке M с ШК (рис. 3).

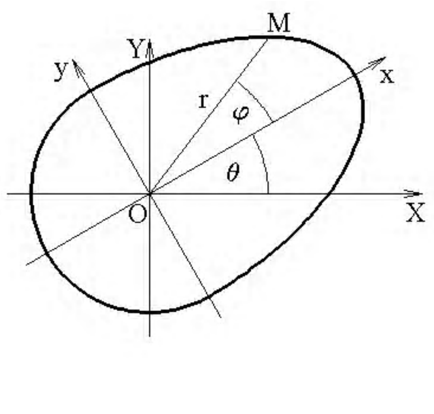

Рис. 2. Профиль кулачка в полярных координатах при вращении: r – радиус кулачка; x, y – подвижные оси координат; X, Y – неподвижные оси координат; θ – угол поворота кулачка

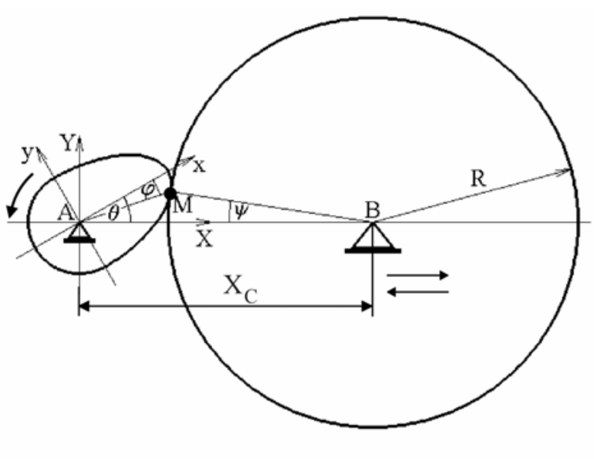

Рис. 3. Кулачок в контакте с ШК: x, y – подвижные оси координат; X, Y – неподвижные оси координат; θ – угол поворота кулачка; φ – угол точки контакта кулачка с ШК в подвижных осях; ψ – угол точки контакта кулачка с ШК в неподвижной системе координат; X_C – межосевое расстояние от оси вращения кулачка до оси вращения ШК; AM – радиус кулачка в полярных координатах; $BM = R$ – радиус ШК

В подвижной системе координат связь между полярными r, φ и декартовыми x, y координатами произвольной точки M выражается формулами:

$$x = r(\varphi)\cos(\varphi);\ y = r(\varphi)\sin(\varphi). \qquad (2)$$

Для неподвижной системы координат XY координаты той же точки M будут:

$$X = r(\varphi)\cos(\theta - \varphi);\ Y = -r(\varphi)\sin(\theta - \varphi). \qquad (3)$$

Заметим, что при указанном на рис. 3 взаимном расположении кулачка и ШК угол φ будет отрицательным, однако расчеты будем и далее вести для алгебраического значения φ, но так как угол θ является отрицательным, то знак перед углом φ будет минус.

Итак, для заданного угла поворота кулачка θ требуется найти расстояние $|AB| = X_C$ между осями кулачка вращения и круга, а также углы φ и ψ, задающие положение точки контакта M по отношению к кулачку и кругу соответственно. Точка A – ось вращения кулачка, является неподвижной точкой начала отсчета при определении расстояния X_C.

Координаты точки M как точки кулачка выражаются формулами (3). Вычислим координаты этой же точки M для ШК:

$$X = X_C - R\cos\psi;\ Y = R\sin\psi. \qquad (4)$$

Приравнивая значения координат из (3) и (4), получаем:

$$
\begin{array}{l} r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)=X_C-R\cos\psi \\ -r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)=R\sin\psi \end{array}. \quad (5)
$$

Два уравнения (5) содержат три неизвестные величины: X_C, φ и ψ.

Для решения данной задачи необходимо составить третье уравнение с теми же неизвестными. Примем во внимание условие, что касательные в точке М для кулачка и ШК должны быть одинаковыми.

Для кулачка касательная в точке М будет:

$$
k=\frac{dY}{dX}=\frac{dY/d\varphi}{dX/d\varphi}=-\frac{(dr/d\varphi)\sin(\theta-\varphi)-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{(dr/d\varphi)\cos(\theta-\varphi)+r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)}\cdot (6)
$$

Для ШК касательная перпендикулярна радиусу, следовательно,

$$
k=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\mathrm{ctg}\psi\,. \quad (7)
$$

Отсюда получаем третье уравнение, дополняющее два уравнения (5):

$$
-\frac{(dr/d\varphi)\sin(\theta-\varphi)-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{(dr/d\varphi)\cos(\theta-\varphi)+r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)}=\mathrm{ctg}\psi. \quad (8)
$$

Рассмотрим решение построенных уравнений. Преобразуем (5) к виду:

$$
\begin{array}{l} R\cos\psi=X_C-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi) \\ R\sin\psi=-r(\varphi)\sin(\theta-\varphi) \end{array}. \quad (9)
$$

Отсюда:

$$
\begin{array}{l} R^2=\left[X_C-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]^2+\left[-r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)\right]^2 \\ -ctg\psi=\dfrac{X_C-r(\varphi)\cos(\theta+\varphi)}{r(\varphi)\sin(\theta+\varphi)} \end{array}. \quad (10)
$$

Подставляя второе из соотношений (10) в (8) и преобразуя первое из этих соотношений, окончательно получаем систему из двух уравнений:

$$
\begin{array}{l} F(s,\theta,r,\varphi)=\left[X_C-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]^2+ \\ +\left[r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)\right]^2-R^2=0 \\ G(s,\theta,r,\varphi)=\left[\dfrac{dr}{d\varphi}\sin(\theta-\varphi)-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]\times \\ \times r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)-\left[\dfrac{dr}{d\varphi}\cos(\theta-\varphi)+r(\varphi)\sin(\theta-\varphi)\right]\times \\ \times\left[X_C-r(\varphi)\cos(\theta-\varphi)\right]=0. \end{array} \quad (11)
$$

Эта система решается численно при заданном q из диапазона $0\le\theta<2\pi$ и заданном соотношении $r=r(\varphi)$. В результате получается искомое соотношение $X_C=X_C(\theta)$. Таким образом, используя систему уравнений (11), можно решить прямую задачу – определить профиль кулачка $r=r(\varphi)$, зная закон движения шлифовальной бабки $X_C=X_C(\theta)$ от угла поворота кулачка, и обратную задачу – определить закон движения шлифовальной бабки $X_C=X_C(\theta)$ от угла поворота кулачка θ, зная профиль кулачка .

Покажем решение прямой задачи.

Пусть задана функция $X_C=X_C(\theta)$. Данная функция является формулой профиля кулачка, заданного в расстоянии от его оси вращения до оси ШК в зависимости от угла поворота кулачка θ. Для поиска функции, указывающей профиль кулачка в полярных координатах $r=r(\varphi)$, вычислим полную производную по θ от функции F из системы (11):

$$
\frac{dF}{d\theta}=\frac{\partial F}{\partial X_C}\frac{dX_C}{d\theta}+\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta}=0\,. \quad (12)
$$

Здесь:

$$
\frac{\partial F}{\partial X_C}=2\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right],
$$

$$
\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial\theta}=2\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right]r\sin(\theta-\varphi)+ \\ +2r^2\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi), \\ \dfrac{\partial F}{\partial\varphi}=-2\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right]r\sin(\theta-\varphi)- \\ -2r^2\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi), \\ \dfrac{\partial F}{\partial r}=-2\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right]\cos(\theta-\varphi)+ \\ +2r\sin^2(\theta-\varphi). \end{array} \quad (13)
$$

Преобразуем последние два слагаемых из (12) к виду:

$$
\frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\theta}=\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{d\varphi}+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\frac{d\varphi}{d\theta}. \quad (14)
$$

Найдем $dr/d\varphi$ из второго уравнения (1):

$$
\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right]r\sin(\theta-\varphi)+r^2\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{-\left[X_C-r\cos(\theta-\varphi)\right]\cos(\theta-\varphi)+r\sin^2(\theta-\varphi)}\cdot (15)
$$

С учетом выражений для $\partial F/\partial\varphi$ и $\partial F/\partial r$ (13) получаем, что сумма (14) равна нулю. В итоге из (12), с учетом (13), имеем:

$$\left[X_C - r\cos(\theta-\varphi)\right]\frac{dX_C}{d\theta} + \left[X_C - r\cos(\theta-\varphi)\right]\times$$
$$\times r\sin(\theta-\varphi) + r^2\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi) = 0. \qquad (16)$$

Окончательно из (11) и (16) получаем два уравнения:

$$F(s,\theta,r,\varphi) = \left[X_C - r\cos(\theta-\varphi)\right]^2 + \left[r\sin(\theta-\varphi)\right]^2 = 0$$
$$H(s,\theta,r,\varphi) = \frac{dX_C}{d\theta} + r\sin(\theta-\varphi) +$$
$$+\frac{r^2\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)}{X_C - r\cos(\theta-\varphi)} = 0. \qquad (17)$$

Решение данной системы уравнений удобнее получать численным методом. При заданных θ и $X_C = X_C(\theta)$, $\frac{dX_C}{d\theta} = f(\theta)$ находим значения φ и r. Повторяя операцию для ряда значений θ из диапазона $0 \le \theta \le 2\pi$, получаем профиль кулачка $r=r(\varphi)$.

Приведем пример расчета профиля кулачка заданного в расстоянии X_C от оси вращения ШК к его профилю, заданному в полярных координатах, и, наоборот, от полярных координат профиля кулачка к значениям $X_C = X_C(\theta)$ для круга с другим радиусом.

Для нахождения производных используются формулы интерполяции, разработанные одним из авторов и описанных в [2].

Проведем пересчет закона движения круглого толкателя радиусом 12,5 мм к закону движения ШК радиусом 250 мм.

Пересчет выполняется в 2 этапа:

на 1-м этапе по закону движения толкателя $X_C = X_C(\theta)$ с радиусом 12,5 мм определяется профиль кулачка в полярных координатах. Для решения этой задачи написана программа CTOFIST.

Для данной программы подготавливают файл, используя данные таблицы 1, указывая радиус круглого толкателя (12,5 мм) и два коэффициента сглаживания.

На рис. 4 приведено традиционное изображение профиля кулачка, полученного в полярных координатах.

На 2-м этапе, используя файл с профилем кулачка в полярных координатах по программе FISTTOCH, определяют закон движения шлифовальной бабки от угла поворота кулачка θ с ШК радиусом 250 мм.

Движение шлифовальной бабки в зоне круглой части кулачка (затылок) не показано.

Используя данные, полученные при приведенных выше пересчетах, строятся управляющие программы для шлифования кулачков на станках с ЧПУ.

Таблица 1

θ	X_C	θ	X_C	θ	X_C	θ	X_C	θ	X_C
-84.00	31.200	-50.00	32.701	-16.00	38.433	18.00	38.060	52.00	32.512
-82.00	31.201	-48.00	33.016	-14.00	38.571	20.00	37.864	54.00	32.239
-80.00	31.206	-46.00	33.367	-12.00	38.681	22.00	37.647	56.00	32.004
-78.00	31.217	-44.00	33.755	-10.00	38.763	24.00	37.408	58.00	31.808
-76.00	31.236	-42.00	34.177	-8.00	38.816	26.00	37.147	60.00	31.650
-74.00	31.264	-40.00	34.623	-6.00	38.841	28.00	36.865	62.00	31.530
-72.00	31.300	-38.00	35.071	-4.00	38.843	30.00	36.560	64.00	31.446
-70.00	31.344	-36.00	35.506	-2.00	38.843	32.00	36.233	66.00	31.393
-68.00	31.396	-34.00	35.919	0.00	38.843	34.00	35.885	68.00	31.356
-66.00	31.452	-32.00	36.308	2.00	38.840	36.00	35.514	70.00	31.320
-64.00	31.510	-30.00	36.672	4.00	38.819	38.00	35.127	72.00	31.286
-62.00	31.578	-28.00	37.008	6.00	38.775	40.00	34.733	74.00	31.254
-60.00	31.674	-26.00	37.316	8.00	38.710	42.00	34.338	76.00	31.227
-58.00	31.806	-24.00	37.596	10.00	38.623	44.00	33.941	78.00	31.207
-56.00	31.974	-22.00	37.848	12.00	38.515	46.00	33.546	80.00	31.200
-54.00	32.180	-20.00	38.071	14.00	38.385	48.00	33.168		
-52.00	32.422	-18.00	38.266	16.00	38.233	50.00	32.822		

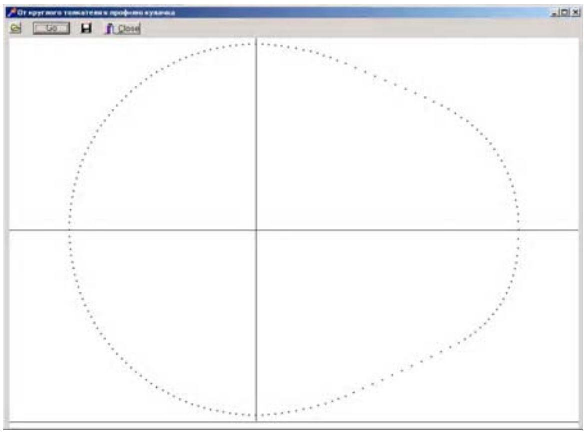

Рис. 4. Профиль кулачка рассчитанный по программе CTOFIST с исходными данными, заданными в таблице 1

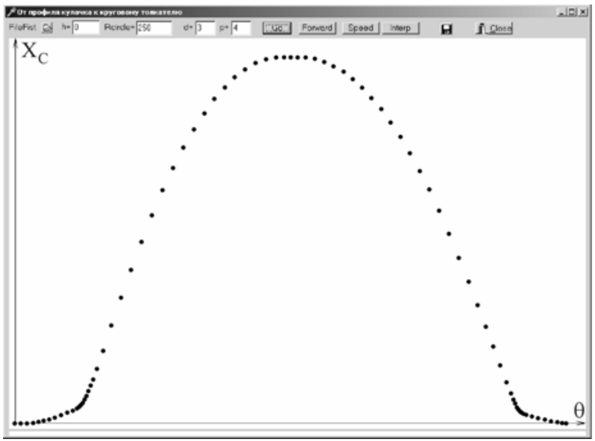

Рис. 5. Графическое изображение закона движения шлифовальной бабки от угла поворота кулачка θ, рассчитанного по программе FISTTOCH для ШК радиусом 250 мм

Вывод

В статье установлена математическая связь, позволяющая решать прямую задачу при определении профиля кулачка в полярных координатах по известному закону движения круглого толкателя. Эта задача может быть реализована для определения профиля кулачка по закону движения толкателя клапана двигателя внутреннего сгорания. Решение обратной задачи, в которой определяется закон возвратно-поступательного движения круглого толкателя разного диаметра по известному профилю кулачка в полярных координатах, может быть успешно реализовано при создании управляющих программ для станков с ЧПУ при шлифовании профиля кулачка.

Перечень ссылок

1. Ю. Н. Внуков, М. А. Шамровский, Пути повышения точности и качества шлифования изделий с криволинейным профилем в поперечном сечении // Процеси механічної обробки в машинобудуванні: Праці Житомирського державного технологічного університету. – Вип. 3 – Житомир: ЖДТУ 2006. – С. 13-19.
2. Яхненко В. М., Шамровский М. А., Интерполяция независимыми отрезками // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 4 Том 15 – Мелітополь ТДАТА 2002. – С. 85-89.

Одержано 15.05.2007

У статті отримано виведення формули, що встановлюють математичний зв'язок між профілем кулачка, який представлено в полярних координатах, і законом зворотно-поступального руху круглого штовхальника. Ці залежності є основою для створення програм для верстатів з ЧПУ при високоточному шліфуванні профілів кулачків.

Equation declaration which determine mathematical connection between cam profile had been presented by polar coordinates and principle of back-and-forth motion of round push bar has been shown. The derived dependencies are the base for writing of control programmes for CNC machines during high precision cam profile grinding.