elektronnaya-biblioteka/zakrytyi-razdel/rffi/informacionnye-tehnologii-i-vychislitelnye-sistemy/bazi-dannih-05-inf.pdf/view (дата обращения 18.10.2009)

3. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования специальность 540200 *Физико-математическое образование* (профиль 540203 *Информатика*, квалификация – бакалавр). – М, 2005.

4. Самая большая база данных // Computerworld, 2002. URL: http://www.osp.ru/cw/2002/17/51968 (дата обращения 19.10.2009)

5. Шурупов Д. Самая большая база данных в мире – в Yahoo на базе PostgreSQL. URL: http://www.nixp.ru/news/9098 (дата обращения 17.10.2009)

УДК 51
ББК В 11

А.Э. Менчер, Т.Э. Носальская

Об одной задаче распределения активов

В статье представлена последовательная модель следующей игры: игроки заключают договор о разделе активов в некотором отношении, однако любой из них может впоследствии попытаться устранить конкурента. Если это не удаётся ни одному из них, соглашение остаётся в силе; если же удаётся кому-то из игроков – все активы переходят к нему. Рассмотрены выигрыши для различных вариантов хода игры, в зависимости от стратегий соперников: как одношаговых, так и двухшаговых. Проведены численное моделирование и анализ полученных результатов.

Ключевые слова: игра, выстрел, стратегия, пацифизм, агрессия.

A.E. Mencher, T.E. Nosalskaya

About Assets Distribution Problem

The article presents a model of the following game: players make an agreement about assets distribution and each of the players can try to eliminate the opponent. If one of the players managed to do it, the agreement remains valid, but if one of them is a success – all assets go to him. The authors distinguish the profits for different variants of moves in the game depending on the opponents' one or two moves strategy. Numerical modeling and the analysis of results were carried out.

Key words: game, shot, strategy, pacifism, aggression.

Пусть владельцы неких двух предприятий решили объединиться, сливая свои активы и заключая предварительное соглашение о распределении общей суммы активов, причём каждый из владельцев может попытаться отстранить партнёра и заполучить активы целиком. Если их попытки не увенчались успехом, то вступает в силу первоначальный договор о дележе.

В своей статье [1, с. 3–13] Стивен Брамс и Марк Килгор предложили следующую математическую модель описанной ситуации.

Два игрока, P и Q, (владельцы предприятий) заключают первоначальное соглашение о дележе общей суммы активов; игрок P получает a единиц, игрок Q – $1-a$ единиц, $0 < a < 1$. Далее, каждый из них имеет возможность отстранить партнёра от управления, заполучив тем самым все активы. Попытку отстранения игрока будем называть выстрелом. Пусть P поражает Q с вероятностью p, $0<p<1$, а Q поражает P с вероятностью q, $0<q<1$. Как только соглашение заключено, каждый игрок должен решить, выстрелит он в оппонента (С) или нет (Н). На каждом этапе игры такое решение принимается заново, т.е. в дискретные периоды времени – 1, 2, 3, … – каждый игрок стреляет либо не стреляет в противника. Помимо этого, на каждом этапе выигрыш дисконтируется в r раз, где $0<r<1$. Для определённости, установим строгую очерёдность: P делает ход (стреляет либо не стреляет) первым, а Q (если выстрел P не оказывается успешным) – вторым.

Если на каждом шаге игры оба игрока следуют договору, то ожидаемый суммарный выигрыш P составит:

$$F = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = \frac{a}{1-r}. \qquad (1)$$

В противоположной ситуации, если P стреляет в Q в каждом периоде, и Q отвечает, стреляя в P, то ожидаемый суммарный выигрыш P будет следующим:

$$F = p \cdot (1 + r + r^2 + r^3 + \ldots) + \\ + (1-p) \cdot q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot (a + r \cdot F) = \\ = \frac{p}{1-r} + (1-p)(1-q) \cdot (a + r \cdot F), \text{ откуда}$$

$$F = \frac{p + (1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}. \qquad (2)$$

Согласно представленным выше рассуждениям, имеем четыре возможных одношаговых стратегии (на примере первого раунда игры):

1. Н→Н, С→Н. Игрок Q отказывается от выстрела в противника, независимо от предпринятого им действия.
2. Н→Н, С→С. Игрок Q стреляет в оппонента только в том случае, если тот выстрелил.
3. Н→С, С→Н. Игрок Q стреляет в P только если противник отказался от выстрела.
4. Н→С, С→С. Игрок Q стреляет в оппонента, независимо от предпринятого им действия.

Будем рассматривать только две контрастирующие стратегии из представленных четырёх: первую назовём "пацифизм", а четвёртую – "агрессия". Проанализируем ход игры, в которой каждый игрок придерживается одной из этих одношаговых стратегий. Имеем четыре возможных ситуации:

1. Оба игрока используют стратегию "пацифизм".

А) Никто не стреляет на протяжении всей игры. Примем обозначение (НН). Суммарный выигрыш в первой игре описывается формулой (1).

В) Для второй игры – СН .(Н) (стреляет только первый игрок в первом раунде) – получаем следующий результат:

$$F = p\cdot 1 + (1-p)\cdot a + \frac{r\cdot[p\cdot 1 + (1-p)\cdot a]}{1-r} =$$
$$= p + (1-p)\cdot a + \frac{r\cdot(p\cdot 1 + (1-p)\cdot a)}{1-r} =$$
$$= \frac{(1-r)\cdot(p + (1-p)\cdot a) + r\cdot(p + (1-p)\cdot a)}{1-r} =$$
$$= \frac{p + (1-p)\cdot a}{1-r} \qquad (3)$$

Если предположить, что возможности начала "поединка" (выстрел или отказ от выстрела для первого игрока) равновероятны, запишем математическое ожидание выигрыша в этой игре:

$$EF_1^I = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{p + (1-p)\cdot a}{1-r}\right] =$$
$$= \frac{a + p + (1-p)\cdot a}{2\cdot(1-r)} = \frac{p + (2-p)\cdot a}{2\cdot(1-r)} \qquad (4)$$

Если же первый игрок делает первый шаг не наугад, то распределение вероятностей может быть иным. Ниже рассмотрим такой неравновероятный случай. Для этого достаточно сравнить выигрыши в первой и во второй ситуациях:

$$\frac{p + (1-p)\cdot a}{1-r} - \frac{a}{1-r} = \frac{p + a - ap - a}{2\cdot(1-r)} =$$
$$= \frac{p\cdot(1-a)}{2\cdot(1-r)} > 0$$

Следовательно, первому игроку заведомо более выгодно выстрелить на первом шаге, а значит математическое ожидание суммарного выигрыша для такой игры будет иметь вид:

$$EF_1^I = \frac{p + (1-p)\cdot a}{1-r}. \qquad (4')$$

2. Первый игрок – пацифист, а второй – агрессор.

А) (НС) В каждом раунде стреляет только второй игрок.

$$F = q\cdot 0 + (1-q)\cdot(a + r\cdot F) = (1-q)\cdot(a + r\cdot F),$$

отсюда

$$F = \frac{(1-q)\cdot a}{1-(1-q)\cdot r}. \qquad (5)$$

В) СС.(НС) В первом раунде стреляют оба, в последующих – только второй. Начиная со второго раунда, ожидаемый выигрыш будет рассчитываться по формуле:

$$\tilde{F} = q\cdot 0 + (1-q)\cdot\left(r\cdot[p + (1-p)(1-q)\cdot a] + r\cdot\tilde{F}\right) =$$
$$= r\cdot(1-q)\cdot\left(p + (1-p)(1-q)\cdot a + \tilde{F}\right),$$

отсюда

$$\tilde{F} = \frac{r\cdot(1-q)\cdot(p + (1-p)(1-q)\cdot a)}{1-(1-q)\cdot r}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре найдём следующим образом:

$$F = p + (1-p)(1-q)\cdot a +$$
$$+ \frac{r\cdot(1-q)\cdot(p + (1-p)(1-q)\cdot a)}{1-(1-q)\cdot r} =$$
$$= \frac{p + (1-p)(1-q)\cdot a}{1-(1-q)\cdot r}. \qquad (6)$$

Тогда можем записать математическое ожидание суммарного выигрыша в этой игре:

$$EF_2^I = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(1-q)\cdot a}{1-(1-q)\cdot r} + \frac{p + (1-p)(1-q)\cdot a}{1-(1-q)\cdot r}\right] =$$
$$= \frac{p + (2-p)(1-q)\cdot a}{2\cdot(1-(1-q)\cdot r)} \qquad (7)$$

Легко видеть, что первый игрок обязательно будет стрелять на первом шаге игры, а тогда математическое ожидание суммарного выигрыша выразится формулой:

$$EF_2^I = \frac{p + (1-p)(1-q)\cdot a}{1-(1-q)\cdot r}. \qquad (7')$$

3. Первый игрок – агрессор, а второй – пацифист.

А) НН.(СН) В первом раунде стрельбы нет, а в последующих стреляет только первый игрок. Начиная со второго раунда, Суммарный выигрыш будет следующим:

$$\tilde{F} = p \cdot (r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots) +$$

$$+ (1-p) \cdot \left(r \cdot a + r \cdot \tilde{F}\right) = \frac{pr}{1-r} + r \cdot (1-p) \cdot \left(a + \tilde{F}\right)$$

отсюда

$$\tilde{F} = \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p) \cdot r)}.$$

Находим ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре:

$$F = a + \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p) \cdot r)} = \frac{pr + (1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p) \cdot r)} \quad (8)$$

В) (СН) На каждом шаге игры стреляет только первый игрок

$$F = \frac{p}{1-r} + (1-p) \cdot (a + r \cdot F), \text{ откуда}$$

$$F = \frac{p + (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p) \cdot r)}. \quad (9)$$

Тогда математическое ожидание суммарного выигрыша в этой игре будет следующим:

$$EF_3^I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{pr + (1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p) \cdot r)} + \frac{p + (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p) \cdot r)} \right] =$$

$$= \frac{p \cdot (1+r) + (2-p)(1-r) \cdot a}{2 \cdot (1-r)(1-(1-p) \cdot r)}. \quad (10)$$

Сравнивая выигрыши, заключаем, что если первый игрок делает первый ход не наугад, то он будет стрелять на первом шаге игры, а математическое ожидание его суммарного выигрыша будет равно:

$$EF_3^I = \frac{p + (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p) \cdot r)}. \quad (10')$$

4. Оба игрока придерживаются стратегии "агрессия".

А) НС.(С) Первый игрок отказывается от выстрела в первом раунде, далее идёт поочерёдный обмен выстрелами. Запишем ожидаемый суммарный выигрыш, начиная со второго раунда:

$$\tilde{F} = \frac{pr}{1-r} + r \cdot (1-p)(1-q) \cdot \left((1-q) \cdot a + \tilde{F}\right),$$

отсюда

$$\tilde{F} = \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)^2(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

Тогда ожидаемый выигрыш во всей игре найдём следующим образом:

$$F = (1-q) \cdot a + \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)^2(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} \quad (11)$$

$$= \frac{pr + (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

В) (СС) Тривиальная игра, ожидаемый суммарный выигрыш описывается формулой (2).

Тогда математическое ожидание суммарного выигрыша выразится следующим образом:

$$EF_4^I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{pr + r \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} + \frac{p + (1-p)(1-q)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)} \right] =$$

$$= \frac{p \cdot (1+r) + (1-p)(2-q)(1-r) \cdot a}{2 \cdot (1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)}. \quad (12)$$

Рассмотрим разность выигрышей:

$$\frac{p + (1-p)(1-q)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)} - \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} =$$

$$= \frac{p \cdot (1-r) - q \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)} = \frac{(1-r) \cdot (p - q \cdot (1-p) \cdot a)}{(1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

Полученное выражение будет положительным, если выполнится неравенство $p > \frac{aq}{1+aq}$.

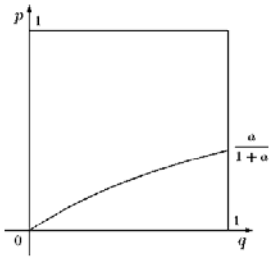


Рисунок 1

Здесь вероятность отказа от выстрела в первом раунде для первого игрока равна

$$\int_0^1 \frac{aq}{1+aq} = \frac{aq - \ln(1+aq)}{a}\Big|_0^1 = \frac{a - \ln(1+a)}{a}.$$

Тогда математическое ожидание суммарного выигрыша для первого игрока можно представить в виде:

$$EF_4^I = \frac{a - \ln(1+a)}{a} \cdot \frac{p + (1-p)(1-q)(1-r) \cdot a}{(1-r)(1-(1-p)(1-q) \cdot r)} +$$

$$+ \frac{\ln(1+a)}{a} \cdot \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}. \quad (12')$$

Для случая, когда варианты начала "поединка" равновероятны, получаем численно (табл.1):

игра	П-П	П-А	А-П	А-А	всего
p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,2	0,688	0,548	**0,714**	0,585	1,250
p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,8	2,750	1,278	**3,750**	2,582	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,5 r=0,8	3,375	0,589	**4,572**	3,499	5,000
p=0,1 q=0,9 a=0,5 r=0,8	2,625	0,106	**3,304**	0,752	5,000
p=0,9 q=0,1 a=0,5 r=0,8	3,625	2,491	**4,701**	4,415	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,1 r=0,8	2,075	0,486	**4,230**	3,415	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,9 r=0,8	4,675	0,691	**4,914**	3,584	5,000
p=0,1 q=0,9 a=0,1 r=0,8	0,725	0,065	**1,946**	0,538	5,000
p=0,9 q=0,1 a=0,9 r=0,8	4,725	3,198	**4,940**	4,456	5,000

Для случая, когда первый игрок обладает достаточной информацией для выбора заведомо наиболее выгодного первого хода (табл. 2):

игра	П-П	П-А	А-П	А-А	всего
p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,2	0,750	0,619	**0,774**	0,628	1,250
p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,8	3,000	1,444	**3,889**	2,658	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,5 r=0,8	4,250	0,980	**4,803**	3,699	5,000
p=0,1 q=0,9 a=0,5 r=0,8	2,750	0,158	**3,393**	0,649	5,000
p=0,9 q=0,1 a=0,5 r=0,8	4,750	3,375	**4,946**	4,715	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,1 r=0,8	3,650	0,933	**4,645**	3,747	5,000
p=0,7 q=0,7 a=0,9 r=0,8	4,850	1,028	**4,961**	3,701	5,000
p=0,1 q=0,9 a=0,1 r=0,8	0,950	0,118	**2,107**	0,547	5,000
p=0,9 q=0,1 a=0,9 r=0,8	4,950	3,504	**4,989**	4,661	5,000

Из представленных таблиц легко видеть, что первому игроку выгоднее придерживаться стратегии "агрессия", в то время как противник – пацифист. Аналогичное правило действует и для второго игрока.

Перейдём к двухшаговому случаю: пусть теперь каждый игрок имеет некоторую стратегию ответа, основанную на двух предыдущих шагах соперника (а не одном, как рассматривалось выше). Первые три хода выбираются случайно (первый ход первого игрока, первый ход второго игрока и второй ход первого игрока), отсюда восемь возможных вариантов начала "поединка". Рассмотрим две наиболее приближенных к реальности стратегии (на примере первых двух раундов игры), назовём их "пацифизм" и "агрессия", соответственно:

1. НН→Н, НС→Н, СН→Н, СС→С. Игрок *Q* во втором раунде стреляет в P только если тот выстрелил в двух раундах подряд.

2. НН→Н, НС→С, СН→С, СС→С. Игрок *Q* во втором раунде воздерживается от выстрела в *P* только если тот не стреляет в него в первых двух раундах.

Далее, исключаем тривиальные "поединки", начинающиеся последовательностями "ННН" и "ССС", поскольку при заданных стратегиях они стационарны, а суммарные выигрыши описываются формулами (1) и (2), соответственно. Каждые шесть игр, соответствующие выбранной паре двухшаговых стратегий, будем представлять таблицей 6×10, что позволит проследить сведение последовательности к стационарной через некоторое число шагов. Имеем четыре возможных ситуации:

1. Оба игрока используют стратегию "пацифизм".

2. Первый игрок – пацифист, а второй – агрессор.

3. Первый игрок – агрессор, а второй – пацифист.

4. Оба игрока придерживаются стратегии "агрессия".

Получаем следующие результаты:

1. **П-П**: НН.СН.(Н), НС.(Н), НС.СН.(Н), СН.(Н), СН.СС.(Н), СС.(Н).

2. **П-А**: НН.СС.НС.(С), НС.(Н), НС.(С), СН.НС.(Н), СН.СС.НС.(С), СС.НС.(С).

3. **А-П**: НН.СН.(Н), НС.НН.СН.(Н), НС.СН.(С), СН.(Н), СН.(С), С.НН.СН.(Н).

4. **А-А**: НН.(С), НС.НН.(С), НС.(С), СН.НС.(С), СН.(С), СС.НС.(С).

Таким образом, получаем два типа игр: игры с прекращающейся стрельбой и игры с переходом к поочерёдной стрельбе.

Игры с прекращающейся стрельбой

1. СН.(Н), т.е. первый стреляет в первом раунде, затем никто не пытается выстрелить. Для этого случая справедлива формула (3).

2. НС.(Н) Стреляет только второй игрок на первом шаге игры.

$$F = (1-q)\cdot a + \frac{r\cdot\left[(1-q)\cdot a\right]}{1-r} = \frac{(1-q)\cdot a}{1-r}. \qquad (13)$$

3. СС.(Н) Оба игрока по очереди стреляют в первом раунде.

$$F = p + (1-p)(1-q)\cdot a + \\ + \frac{r\cdot\left[p + (1-p)(1-q)\cdot a\right]}{1-r} = \\ = \frac{p + (1-p)(1-q)\cdot a}{1-r}. \qquad (14)$$

4. НН.СН.(Н) Стреляет только первый игрок во втором раунде.

$$F = a + \frac{p \cdot r + (1-p) \cdot r \cdot a}{1-r} = \\ = a + \frac{r \cdot [p + (1-p) \cdot a]}{1-r} = \\ = \frac{a \cdot (1-r) + r \cdot p \cdot (1-a) + r \cdot a}{1-r} = \\ = \frac{a + pr \cdot (1-a)}{1-r} \quad (15)$$

5. НС.СН.(Н) Второй игрок стреляет в первом раунде, первый – во втором.

$$F = (1-q) \cdot a + \frac{r \cdot [p + (1-p) \cdot a]}{1-r}. \quad (16)$$

6. СН.СС.(Н) В первом раунде стреляет только первый, во втором – оба.

$$F = p + (1-p) \cdot a + \frac{r \cdot [p + (1-p)(1-q) \cdot a]}{1-r} \quad (17)$$

.

7. СН.НС.(Н) Первый стреляет в первом раунде, второй – во втором.

$$F = p + (1-p) \cdot a + \frac{r \cdot [(1-q) \cdot a]}{1-r} = \\ = p + (1-p) \cdot a + \frac{a \cdot (1-q) \cdot r}{1-r} \quad (18)$$

8. НС.НН.СН.(Н) Второй стреляет в первом раунде, первый – в третьем.

$$F = (1-q) \cdot a + r \cdot a + \frac{r^2 \cdot [p + (1-p) \cdot a]}{1-r}. \quad (19)$$

9. СС.НН.СН.(Н) В первом раунде стреляют оба, в третьем – только первый.

$$F = p + (1-p)(1-q) \cdot a + r \cdot a + \\ + \frac{r^2 \cdot [p + (1-p) \cdot a]}{1-r} \quad (20)$$

Игры с переходом к поочерёдной стрельбе

1. НС.(С) В первом раунде стреляет только второй, после чего противники обмениваются выстрелами. Начиная со второго раунда, ожидаемый суммарный выигрыш будет рассчитываться по формуле:

$$\tilde{F} = p \cdot \left(r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\right) + (1-p) \cdot q \cdot 0 + \\ + (1-p)(1-q) \cdot \left(r \cdot [(1-q) \cdot a] + r \cdot \tilde{F}\right) = \\ = \frac{pr}{1-r} + r \cdot (1-p)(1-q) \cdot \left((1-q) \cdot a + \tilde{F}\right)$$

отсюда

$$\tilde{F} = \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)^2 (1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре найдём следующим образом:

$$F = (1-q) \cdot a + \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)^2 (1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} = \\ = \frac{pr + (1-q)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}. \quad (21)$$

2. НН.(С) Игроки начинают по очереди стрелять друг в друга, начиная со второго раунда. Суммарный выигрыш, начиная со второго раунда, выражается следующим образом:

$$\tilde{F} = p \cdot \left(r + r^2 + r^3 + r^4 + \ldots\right) + \\ + (1-p)(1-q) \cdot \left(r \cdot a + r \cdot \tilde{F}\right) = \\ = \frac{pr}{1-r} + r \cdot (1-p)(1-q) \cdot \left(a + \tilde{F}\right),$$

отсюда

$$\tilde{F} = \frac{pr + (1-p)(1-q)(1-r) \cdot ar}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

Тогда суммарный выигрыш во всей игре равен

$$F = a + \frac{pr + (1-p)(1-q)(1-r) \cdot ar}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} = \\ = \frac{pr + (1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} \quad (22)$$

3. СН.(С) В первом раунде стреляет только первый, далее – обмен выстрелами. Начиная со второго раунда, формула для вычисления суммарного выигрыша будет следующей:

$$\tilde{F} = \frac{pr}{1-r} + (1-p)(1-q) \cdot \left(r \cdot [p + (1-p) \cdot a] + r \cdot \tilde{F}\right),$$

откуда

$$\tilde{F} = \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)(1-r)(p + (1-p) \cdot a)}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}.$$

Тогда суммарный выигрыш во всей игре составит

$$F = p + (1-p) \cdot a + \\ + \frac{pr + r \cdot (1-p)(1-q)(1-r)(p + (1-p) \cdot a)}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} = \\ = \frac{pr + (1-r)(p + (1-p) \cdot a)}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} = \\ = \frac{p + (1-p)(1-r) \cdot a}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)} \quad (23)$$

4. СС.НС.(С) В первом раунде стреляют оба, во втором – только второй, затем – обмен выстрелами. Начиная с третьего раунда, ожидаемый суммарный выигрыш будет описываться формулой:

$$\tilde{F} = \frac{pr^2}{1-r} + (1-p)(1-q) \cdot \\ \cdot \left(r \cdot [p + (1-p)(1-q) \cdot a + r \cdot (1-q) \cdot a] + r \cdot \tilde{F}\right),$$

откуда

$$\tilde{F} = \frac{pr^2 + r \cdot (1-p)(1-q)(1-r) \cdot (p + (1-p)(1-q) \cdot a + r \cdot (1-q) \cdot a)}{(1-r) \cdot (1-(1-p)(1-q) \cdot r)}$$

Тогда суммарный выигрыш во всей игре будет следующим:

$$F = p + (1-p)(1-q) \cdot a + r \cdot (1-q) \cdot a +$$

$$+\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}$$
$$=\frac{pr^2+(1-r)\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}$$
$$=\frac{pr^2+(1-r)\cdot(p+(1-p+r)\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}. \quad (24)$$

5. СН.НС.(С) В первом раунде стреляет только первый, во втором – только второй, далее противники обмениваются выстрелами. Начиная с третьего раунда, суммарный выигрыш можно представить формулой:

$$\tilde{F}=\frac{pr^2}{1-r}+(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\left(r\cdot\left[p+(1-p)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a\right]+r\cdot\tilde{F}\right),$$

отсюда

$$\tilde{F}=\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot(p+(1-p)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}.$$

Значит, ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре равен

$$F=p+(1-p)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a+$$
$$+\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot(p+(1-p)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}=$$
$$=\frac{pr^2+(1-r)\cdot(p+(1-p)\cdot a+r\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} \quad (25)$$

6. НС.НН.(С) В первом раунде стреляет только второй, во втором стрельбы нет, а в последующих идёт обмен выстрелами. Начиная с третьего раунда, суммарный выигрыш имеет вид:

$$\tilde{F}=\frac{pr^2}{1-r}+(1-p)(1-q)\cdot\left(r\cdot\left[(1-q)\cdot a+r\cdot a\right]+r\cdot\tilde{F}\right),$$

отсюда

$$\tilde{F}=\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре будет следующим:

$$F=(1-q)\cdot a+r\cdot a+$$
$$+\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}=$$
$$=\frac{pr^2+(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}=\frac{pr^2+(1-r)\cdot((1-q+r)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} \quad (26)$$

7. НС.СН.(С) В первом раунде стреляет только второй, во втором – только первый, затем оппоненты обмениваются выстрелами. Начиная с третьего раунда, суммарный выигрыш можно выразить формулой:

$$\tilde{F}=\frac{pr^2}{1-r}+(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\left(r\cdot\left[(1-q)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)\cdot a)\right]+r\cdot\tilde{F}\right),$$

откуда

$$\tilde{F}=\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)\cdot a))}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш для этой игры равен

$$F=(1-q)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)\cdot a)+$$
$$+\frac{pr^2+r\cdot(1-p)(1-q)(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)\cdot a))}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}=$$
$$=\frac{pr^2+(1-r)\cdot((1-q)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)\cdot a))}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}=$$
$$=\frac{pr+(1-r)\cdot(1-q+(1-r)\cdot r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}. \quad (27)$$

8. НН.СС.НС.(С) Во втором раунде стреляют оба, в третьем – только второй, затем идёт перестрелка. Начиная с четвёртого раунда, суммарный выигрыш можно записать в виде:

$$\tilde{F}=\frac{pr^3}{1-r}+(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\left(r\cdot\left[a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a\right]+r\cdot\tilde{F}\right)$$

откуда

$$\tilde{F}=\frac{pr^3}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}+r\cdot(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\frac{a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре будет равен

$$F=a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+$$
$$+r^2\cdot(1-q)\cdot a+\frac{pr^3}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}+$$
$$+r\cdot(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\frac{a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r}=$$
$$=\frac{pr^3+(1-r)\cdot(a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} \quad (28)$$

9. СН.СС.НС.(С) В первом раунде стреляет только первый, во втором – оба, в третьем – только второй, затем снова идёт перестрелка. Начиная с четвёртого раунда, суммарный выигрыш можно записать следующим образом:

$$\tilde{F}=\frac{pr^3}{1-r}+(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\left(r\cdot\left[p+(1-p)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a\right]+r\cdot\tilde{F}\right)$$

отсюда

$$\tilde{F}=\frac{pr^3}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}+r\cdot(1-p)(1-q)\cdot$$
$$\cdot\frac{p+(1-p)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r}.$$

Тогда ожидаемый суммарный выигрыш во всей игре можно представить формулой:

$$F = p + (1-p)\cdot a + r\cdot(p + (1-p)(1-q)\cdot a) + r^2\cdot(1-q)\cdot a + \frac{pr^3}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + r\cdot(1-p)(1-q)\cdot \frac{p+(1-p)\cdot a + r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a) + r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r} =$$
$$= \frac{pr^3}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(1-p)\cdot a + r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a) + r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r} \quad (29)$$

Итак, для первой игры в двухшаговых стратегиях математическое ожидание суммарного выигрыша, с предположительно равновероятным распределением вариантов начала "поединка", будет следующим:

$$EF_1^I = \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{a+pr\cdot(1-a)}{1-r} + \frac{(1-q)\cdot a}{1-r} + \left((1-q)\cdot a + \frac{r\cdot(p+(1-p)\cdot a)}{1-r}\right) + \frac{p+(1-p)\cdot a}{1-r} + \left(p+(1-p)\cdot a + \frac{r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)}{1-r}\right) + \frac{p+(1-p)(1-q)\cdot a}{1-r} + \frac{p+(1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left[p+(2-p-q)\cdot a + \frac{2a+pr\cdot(1-a)+(1-q)\cdot a}{1-r} + \frac{(1+r)\cdot(2p+(1-p)(2-q)\cdot a)}{1-r} + \frac{p+(1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] \quad (30)$$

Для второй игры:

$$EF_2^{II} = \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{pr^3+(1-r)\cdot(a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{(1-q)\cdot a}{1-r} + \frac{pr+(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \left(p+(1-p)\cdot a + \frac{r\cdot(1-q)\cdot a}{1-r}\right) + \frac{pr^3+(1-r)\cdot(p+(1-p)\cdot a+r\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+r^2\cdot(1-q)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr^2+(1-r)\cdot(p+(1-p+r)\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left[p+(1-p)\cdot a + \frac{p\cdot(1+r)+(2-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr^2\cdot(1+2r)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(2-p)\cdot a+(1+2r)\cdot(p+(1-p)(1-q)\cdot a)+2r^2\cdot(1-q)\cdot a}{1-(1-p)(1-q)\cdot r}\right] \quad (31)$$

Для третьей игры:

$$EF_3^{II} = \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{a+pr\cdot(1-a)}{1-r} + \left((1-q)\cdot a + r\cdot a + \frac{r^2\cdot(p+(1-p)\cdot a)}{1-r}\right) + \frac{pr+(1-r)\cdot(1-q+(1-r)\cdot r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(1-p)\cdot a}{1-r} + \frac{p+(1-p)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \left(p+(1-p)(1-q)\cdot a + r\cdot a + \frac{r^2\cdot(p+(1-p)\cdot a)}{1-r}\right) + \frac{p+(1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left[p+(2-p)(1-q)\cdot a + 2ar + \frac{2a+pr\cdot(1-a)}{1-r} + \frac{(1+2r^2)\cdot(p+(1-p)\cdot a)}{1-r} + \frac{2p+(1-p)(2-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr+(1-r)\cdot(1-q+(1-r)\cdot r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] \quad (32)$$

Для четвёртой игры:

$$EF_4^{II} = \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{pr+(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr^2+(1-r)\cdot(1-q+r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr+(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr^2+(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(1-p)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr^2+(1-r)\cdot(p+(1-p+r)\cdot(1-q)\cdot a)}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{p+(1-p)(1-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left[\frac{a}{1-r} + \frac{2p+(1-p)(2-q)(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr\cdot(1+r)+2(1-q)(1-r)\cdot a+r\cdot(1-r)\cdot a}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)} + \frac{pr\cdot(1+r)+(1-r)\cdot(a+2p+(1-p)(2-q)\cdot a+2r\cdot(1-q)\cdot}{(1-r)\cdot(1-(1-p)(1-q)\cdot r)}\right] \quad (33)$$

Получаем следующие численные результаты (табл. 3):

игра	p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,2	p=0,2 q=0,2 a=0,5 r=0,8	p=0,7 q=0,7 a=0,5 r=0,8	p=0,1 q=0,9 a=0,5 r=0,8	p=0,9 q=0,1 a=0,5 r=0,8	p=0,7 q=0,7 a=0,1 r=0,8	p=0,7 q=0,7 a=0,9 r=0,8	p=0,1 q=0,9 a=0,1 r=0,8	p=0,9 q=0,1 a=0,9 r=0,8
П-П	0,639	2,648	3,291	1,612	4,050	2,645	3,936	0,606	4,736
П-А	0,654	**3,651**	2,812	0,846	**4,484**	2,241	3,383	0,400	**5,681**
А-П	0,651	2,769	**3,600**	**1,831**	4,260	**2,924**	**4,277**	**0,681**	4,833
А-А	**0,656**	2,797	3,350	0,990	4,266	2,903	3,797	0,517	4,808
всего	1,250	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000	5,000

Итак, если игрок *Q* – пацифист, то игроку *P* выгоднее быть агрессором. Если же игрок *Q* – агрессор, то игроку *P* в большинстве случаев выгодно быть также агрессором, за исключением тех ситуаций, когда он имеет большое преимущество в "меткости", либо когда "меткость" игроков одинаково низкая, а значение *r* (показателя обесценивания) велико.

.

Список литературы

1. Steven J. Brams. Negotiation Games: Applying Game Theory to Bargaining and Arbitration. – New York and London: Routledge, 1990. – 302 p.
2. Steven J. Brams, Marc D. Kilgour The Instability of Power Sharing. – New York: New York University, Ontario: Wilfrid Laurier University, 2005. – 24 p.

УДК 539.22
ББК В 251

С.А. Немов, Л.Д. Иванова, Ю.В. Гранаткина

Анизотропия рассеяния в слоистых материалах на основе $a_2^{v}b_3^{vi}$

Исследована анизотропия рассеяния носителей тока в слоистых материалах на основе $A_2^{V}B_3^{VI}$ · Рассматривается влияние точечных дефектов кристаллической решетки на рассеяние носителей заряда.

Ключевые слова: анизотропия, механизмы рассеяния, дефекты кристаллической решетки, твердые растворы.

S.A. Nemov, L.D. Ivanova, Yu.V. Granatkina

Scattering Anisotropy in Laminar Solids on the Basis of $a_2^{v}b_3^{vi}$

Anisotropy of amperage-carrier scattering in laminar solids on the basis of $A_2^{V}B_3^{VI}$ is investigated in the article. The influence of crystal latitude point defects on the carrier scattering is regarded in the article.

Key words: anisotropy, scattering mechanisms, crystal latitude defects, laminar solids.

$A_2^{V}B_3^{VI}$ относятся к слоистым полупроводникам с резко выраженной анизотропией кристаллической решетки, химической связи и физических свойств. Кристаллы имеют ромбоэдрическую симметрию, точечная группа включает тригональную ось c_3. Химическая связь внутри квинтетов в значительной степени ковалентная, в то время как вдоль тригональной оси превалирует связь Ван–дер–Вальса. Тензоры второго ранга T_{ik}, описывающие физические свойства подобных кристаллов, имеют две независимых компоненты: T_l вдоль оси c_3 и T_t в плоскости скола. Поэтому естественно ожидать, что в подобных кристаллах и рассеяние носителей тока будет носить анизотропный характер и будет описываться тензором времени релаксации носителей заряда с двумя независимыми компонентами τ_l и τ_t. Экспериментальному изучению анизотропии рассеяния в Sb_2Te_3 посвящена настоящая работа.

Теллурид сурьмы является одной из наиболее востребованных компонент, используемых в настоящее время в термоэлектрических материалах, работающих вблизи комнатной температуры. Монокристаллы Sb_2Te_3 относятся к классу слоистых соединений со сложными кристаллическими решетками и имеют ромбоэдрическую симметрию [3, 2].

На настоящий момент механизмы рассеяния носителей заряда в Sb_2Te_3 изучены недостаточно, что связано с большим количеством точечных дефектов акцепторного типа [1]. Точечные дефекты электрически активны, что предопределяет концентрацию дырок в валентной зоне теллурида сурьмы на уровне $p = \left(eR_{123}\right)^{-1} \sqsubset_{\times} 1,04 \cdot 10^{20} cm^{-3}$. Более того, легирование Sb_2Te_3 различными примесями изменяют концентрацию дырок в узком диапазоне и незначительно сдвигают уровень Ферми ε_F, что вкупе с высокими концентрациями носителей заряда и обуславливает немногочисленные исследования в области механизмов рассеяния дырок в Sb_2Te_3.

Были исследованы девять основных кинетических коэффициентов: σ_{11}, σ_{33}, α_{11}, α_{33}, R_{123}, R_{321}, Q_{123}, Q_{132}, Q_{321} в диапазоне температур 85 – 450 K.

Обсуждение результатов начнем с эффекта Нернста-Эттингсгаузена, поскольку коэффициент Q наиболее чувствителен к виду энергетической зависимости времени релаксации $\tau(\varepsilon)$. В случае сильного вырождения газа сво-