ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ РИЧАРДСОНА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Добровольский И.П.
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН
г. Москва, Россия

POLYNOMIAL RICHARSON'S EXTRAPOLATION AND ITS APPLICATION

Dobrovolsky I.
Institute of Physics of the Earth, RAS
Moscow, Russia

Аннотация

Введены величины, отражающие эффективность проведения полиномиальной экстраполяции Ричардсона, и описаны способы определения погрешности. На конкретном примере показано, что применение экстраполяции к решению интегральных уравнений с помощью квадратурной формулы трапеций даёт решение с высокой точностью.

Abstract

The quantities reflecting efficiency of carrying out polynomial extrapolation of Richardson are entered and the way of definition of an error is described. On concrete examples it is shown that application of Richardson's extrapolation to a solution of integral equations of II kind has appeared rather effective and gives a solution with a high exactitude.

Ключевые слова: формула трапеций, показатель экстраполяции.

Keywords the trapezoidal rule, the index of Richardson's extrapolation.

1. Введение.

Численные методы приближённого решения привлекательны своей универсальностью. В численных методах ставятся три задачи: получение достаточно точных решений, контроль точности и алгоритмическая простота процедур. Экстраполяция Ричардсона решает эти задачи. Первой работой на эту тему была [1]. С тех пор опубликовано много работ (например, [2]) и нет необходимости делать ещё один обзор. Однако до сих пор в литературе по интегральным уравнениям нет даже упоминания о возможности применении экстраполяции Ричардсона к квадратурным решениям интегральных уравнений, хотя эта возможность почти очевидна.

Цель статьи – построить процедуру экстраполяции Ричардсона с оценкой погрешности и применить эти результаты к численному решению интегральных уравнений.

2. О полиномиальной экстраполяции Ричардсона.

Кратко напомним суть экстраполяции Ричардсона. Существуют задачи, где разность между точным φ и приближённым ψ решениями, т. е. погрешность вычислений r, при достаточной гладкости функций задачи имеет разложение

$$r(h)=\varphi-\psi(h)=\sum_{n=1}^{k} v_n h^{sn}+o(h^{sk}) \qquad (2.1)$$

где h обычно является шагом сетки.

Исходное приближённое решение обозначается как

$$\psi(h_i)=\psi_i^{(0)} \qquad (2.2)$$

и называется *экстраполяцией нулевого порядка*.

Экстраполяция j-того порядка, убирающая первых j слагаемых в разложении (2.1), вычисляется по рекуррентной формуле

$$\psi_i^{(j)}=\frac{h_i^s\psi_{i+1}^{(j-1)}-h_{i+1}^s\psi_i^{(j-1)}}{h_i^s-h_{i+1}^s} \qquad (2.3)$$

где $h_{i+1}<h_i$.

В результате строится таблица экстраполяций

$$\begin{array}{llll}
\psi_1^{(0)} & \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} \cdots \psi_1^{(m)} & \\
\psi_2^{(0)} & \psi_2^{(1)} & \vdots & \\
\psi_3^{(0)} & \vdots & \psi_{m-2}^{(2)} & \\
\vdots & \psi_{m-1}^{(1)} & & \\
\psi_m^{(0)} & & &
\end{array} \qquad (2.4)$$

Одновременно с (2.3) мы получаем формулу для экстраполяции погрешностей

$$r_i^{(j)}=\frac{h_i^s r_{i+1}^{(j-1)}-h_{i+1}^s r_i^{(j-1)}}{h_i^s-h_{i+1}^s} \qquad (2.5)$$

которая может иметь значение для оценки погрешностей экстраполяции.

3. Анализ таблицы экстраполяций в частном случае.

Практическое значение имеет случай, когда величины h образуют геометрическую прогрессию

$$h_i=\frac{h_1}{q^{i-1}}. \qquad (3.1)$$

Тогда (2.3) получает вид

$$\psi_i^{(j+1)}=\frac{q^{s(j+1)}\psi_{i+1}^{(j)}-\psi_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}-1}. \qquad (3.2)$$

а (2.5)

$$r_i^{(j+1)} = \frac{q^{s(j+1)} r_{i+1}^{(j)} - r_i^{(j)}}{q^{s(j+1)} - 1} \qquad (3.3)$$

Из (3.2) и (2.1) имеем

$$r_i^{(j)} = \varphi - \psi_i^{(j)} = \sum_{n=j+1} a_{jn} q^{-sn(i-1)} \qquad (3.4)$$

где отсутствие верхнего предела у знака суммы означает, что остаточный член включён в эту сумму.

Составим разность

$$\Delta_i^{(j)} = \psi_i^{(j)} - \psi_{i+1}^{(j)} = -\sum_{n=j+1} a_{jn} B_n q^{-sn(i-1)} \qquad (3.5)$$

где $B_n = 1 - q^{-sn}$.

Поскольку $B_n \approx 1$, то, сравнивая (3.4) и (3.5), имеем очевидное соотношение

$$r_i^{(j)} \approx -\Delta_i^{(j)} \qquad (3.6)$$

Исходя из формулы (3.5), можно построить таблицу $\Delta_i^{(j)}$.

Очевидно, при уменьшении *h* наступает такой момент, когда слагаемые в разложении (3.4) начинают монотонно убывать. Назовём этот режим *регулярным*. Если экстраполяция вышла на регулярный режим, то в разложении (3.5) вносит основной вклад первый член. Тогда должно соблюдаться отношение

$$\delta_i^{(j)} = \frac{\Delta_i^{(j)}}{\Delta_{i+1}^{(j)}} \approx q^{s(j+1)} \qquad (3.7)$$

И наоборот: если соотношение (3.7) соблюдается, то мы имеем регулярный режим. Очевидно, $\delta_i^{(j)} \to q^{s(j+1)}$ при $h \to 0$. По формуле (3.7) строится таблица $\delta_i^{(j)}$.

Формулу (3.7) можно переписать в виде

$$r_{i+1}^{(j)} \approx -\frac{\Delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}} \qquad (3.8)$$

Если соотношение (3.7) соблюдается в *j*-том столбце экстраполяционной таблицы, то по формуле (3.8) можно получить оценку погрешности наиболее точного значения этого столбца.

Назовём *показателем экстраполяции* $R_i^{(j)}$ отношение

$$R_i^{(j)} = \frac{r_i^{(j+1)}}{r_{i+1}^{(j)}} \qquad (3.9)$$

Экстраполяция уменьшает погрешность $\psi_i^{(j+1)}$ по сравнению с $\psi_{i+1}^{(j)}$, когда $\left|R_i^{(j)}\right| < 1$. Между (3.8) и (3.9) имеется важное отличие: выражение (3.8) даёт оценку погрешности в столбце, тогда как (3.9) отражает отношение погрешностей значений в смежных столбцах. Существенно, что (3.9), в частности, является отношением погрешностей наиболее точных значений в смежных столбцах.

Введём величину

$$\gamma_i^{(j)} = 1 - \frac{\delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)}} = 1 - \frac{\Delta_i^{(j)}}{q^{s(j+1)} \Delta_{i+1}^{(j)}} \qquad (3.10)$$

Исходя из (3.5), можно установить, что для $\gamma_i^{(j)}$ имеется разложение

$$\gamma_i^{(j)} = \frac{a_{j,j+2} B_{j+2} (1 - q^s)}{a_{j,j+1} B_{j+1}} q^{-si} + \frac{\left(a_{j,j+1} a_{j,j+3} B_{j+1} B_{j+3} - a_{j,j+2}^2 B_{j+2}^2\right)\left(1 - q^s\right)}{a_{j,j+1}^2 B_{j+1}^2} q^{-2si} + \ldots \qquad (3.11)$$

где первое слагаемое в регулярном режиме является по величине определяющим.

Тогда из (3.11) следует

$$\frac{\gamma_i^{(j)}}{\gamma_{i+1}^{(j)}} \to q^s \quad \textit{при} \quad i \to \infty \qquad (3.12)$$

по всей таблице.

Определим смысл величины $\gamma_i^{(j)}$. Из (3.10) следует

$$\frac{\Delta_i^{(j)}}{\Delta_{i+1}^{(j)}} = q^{s(j+1)} (1 - \gamma_i^{(j)}) \qquad (3.13)$$

Тогда из (3.3) и (3.13) имеем

$$\frac{r_i^{(j+1)}}{r_{i+1}^{(j)}} = \frac{q^{s(j+1)} - \dfrac{r_i^{(j)}}{r_{i+1}^{(j)}}}{q^{s(j+1)} - 1} \approx \frac{q^{s(j+1)} - \dfrac{\Delta_i^{(j)}}{\Delta_{i+1}^{(j)}}}{q^{s(j+1)} - 1} = \frac{q^{s(j+1)} \gamma_i^{(j)}}{q^{s(j+1)} - 1} \qquad (3.14)$$

Следовательно

$$R_i^{(j)} \approx \frac{q^{s(j+1)}}{q^{s(j+1)} - 1} \gamma_i^{(j)} \qquad (3.15)$$

Таким образом, величина $\gamma_i^{(j)}$ является оценкой показателя экстраполяции. По формуле (3.10) можно построить таблицу $\gamma_i^{(j)}$.

Оценка погрешности $r_i^{(j+1)}$ по формулам (3.9), (3.15) определяется выражением

$$r_i^{(j+1)} = R_i^{(j)} r_{i+1}^{(j)} \approx -\frac{q^{s(j+1)} \Delta_{i+1}^{(j)} \gamma_i^{(j)}}{q^{s(j+1)} - 1} \qquad (3.16)$$

Однако эту формулу нельзя применить для оценки последнего значения в таблице экстраполяций, которое при эффективной экстраполяции является наиболее точным. В этом случае приходится делать дополнительные предположения. Если экстраполяция действительно эффективна, то из (3.8) имеем $q^{s(j+1)} \Delta_{i+1}^{(j)} \approx \Delta_i^{(j)}$. Кроме того, из таблицы для $\gamma_i^{(j)}$ видно, что допустимо предположение $\gamma_i^{(j)} = \gamma_i^{(j-1)}$. Тогда из (3.16) получаем

$$r_i^{(j+1)} \approx -\frac{\Delta_i^{(j)}\gamma_i^{(j-1)}}{q^{s(j+1)}-1} \quad (3.17)$$

4. Пример. Интегральное уравнение Вольтера II рода.

Рассмотрим уравнение

$$y(x) - \int_0^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad (4.1)$$

где $f(x) = (1-xe^{2x})\cos 1 - e^{2x}\sin 1$ и $K(x,t) = 1-(x-t)e^{2x}$.

Это уравнение имеет точное решение

$$y(x) = e^x \cos e^x - e^{2x}\sin e^x. \quad (4.2)$$

Исходные функции задачи – ядро интеграла и правая часть – являются целыми функциями и поэтому следует ожидать, что эффективной будет экстраполяция произвольного порядка.

При вычислении интегралов по формуле трапеций имеет место разложение (2.1) при $s = 2$. Примем для вычислений $q = 2$. Будем обозначать приближённое решение уравнения (4.1) при вычислении интегралов по формуле трапеций с экстраполяцией через $\overline{y}_i^{(j)}$. Тогда (3.4) записывается как

$$r_i^{(j)}(x) = y(x) - \overline{y}_i^{(j)}(x) = \sum_{n=j+1} 4^{-n(i-1)} a_{jn}(x) \quad (4.3)$$

и (3.2) получает вид

$$\overline{y}_i^{(j+1)} = \frac{4^{j+1}\overline{y}_{i+1}^{(j)} - \overline{y}_i^{(j)}}{4^{j+1}-1} \quad (4.4)$$

Иногда удобнее пользоваться «прямыми» формулами

$$\begin{aligned}
\overline{y}_i^{(1)} &= \frac{4\overline{y}_{i+1}^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)}}{3}\\
\overline{y}_i^{(2)} &= \frac{64\overline{y}_{i+2}^{(0)} - 20\overline{y}_{i+1}^{(0)} + \overline{y}_i^{(0)}}{45}\\
\overline{y}_i^{(3)} &= \frac{4096\overline{y}_{i+3}^{(0)} - 1344\overline{y}_{i+2}^{(0)} + 84\overline{y}_{i+1}^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)}}{2835}\\
\overline{y}_i^{(4)} &= \frac{1048576\overline{y}_{i+4}^{(0)} - 348160\overline{y}_{i+3}^{(0)} + 22848\overline{y}_{i+2}^{(0)} - 340\overline{y}_{i+1}^{(0)} + \overline{y}_i^{(0)}}{722925}
\end{aligned} \quad (4.5)$$

которые получаются последовательным применением формулы (4.4).

Рассмотрим (4.1) на отрезке $x = 0 \div 2.5$ с шагом $h_i = 2.5/N_i$. Ниже приводятся таблицы экстраполяций и других величин по формулам предыдущего раздела. Таблица $\Delta_i^{(j)}$ строится по формуле (3.5), таблица $\delta_i^{(j)}$ – по формуле (3.7), таблица $\gamma_i^{(j)}$ – по формуле (3.10). Все вычисления производились с 15-ю значащими цифрами, но для наглядности в приведённых таблицах числа округлены.

Таблица 1

Таблица экстраполяций $\overline{y}_i^{(j)}$ в точке $x = 2.5$. Жирным шрифтом показано точное значение.

N	i	j				
		0	1	2	3	4
25	1	28.916	69.23731	66.853608	66.87928471	66.879216248
50	2	59.157	67.00259	66.878883	66.87921652	
100	3	65.041	66.88662	66.879211		
200	4	66.425	66.87967			
400	5	66.766				**66.879216290**

Таблица 2

Таблица $\Delta_i^{(j)}$.

i	j			
	0	1	2	3
1	-30.24	2.2347	–0.025275	0.0000682
2	-5.884	0.1160	–0.000328	
3	-1.384	0.0069		
4	-0.341			

Таблица 3

Таблица $\delta_i^{(j)}$.

i	j		
	0	1	2
1	5.139	19.27	77.11
2	4.251	16.71	
3	4.061		

Таблица 4

Таблица $\gamma_i^{(j)}$.

i	j		
	0	1	2
1	-0.2848	-0.2043	-0.2048
2	-0.0628	-0.0443	
3	-0.0153		

Из таблиц 1 и 2 следует, что $\overline{y}_1^{(4)}$ является наиболее точным значением. Из таблицы 3 видно, что соотношение (3.7) неплохо соблюдается. Из таблицы 4 следует, что $\gamma_i^{(j)}$ мало зависит от *j* при каждом *i*. Теперь можно сделать оценку погрешности $\overline{y}_i^{(4)}$ при $x = 2.5$. Из (3.17) имеем

$$r_1^{(4)} \approx -\frac{\Delta_1^{(3)}\gamma_1^{(2)}}{255} = 0.55\cdot 10^{-7} \qquad (4.6)$$

Истинная погрешность составила $0.42\cdot 10^{-7}$.

Этот пример не только иллюстрирует возможности экстраполяции Ричардсона, но имеет также особое отношение к линейным интегральным уравнениям. Начало применения различных квадратурных схем для приближённого решения линейных интегральных уравнений относится к середине прошлого столетия. Этот способ прост и эффективен, но для уравнений с переменным верхним пределом (уравнений Вольтерра) сразу же сформировалась особая ситуация: задача решалась при вычислении интегралов по формуле трапеций, но прямое применение квадратурных схем более высокого порядка точности оказалось невозможным (например, [3]). Как мы видим, экстраполяция Ричардсона решила эту проблему почти 70-летней давности.

5. Заключение.

Экстраполяция Ричардсона позволила решить задачу о применении квадратурных формул высокой степени точности к решению интегральных уравнений Вольтерра. Очевидно, эта схема также применима к квадратурному решению уравнений Фредгольма. В результате вопрос о применении квадратурных формул к решению линейных интегральных уравнений в случае достаточно гладких функций рассматривается более эффективно. Для негладких функций подход к приближённому решению обсуждался в работе [4]. Таким образом, настоящая статья и работа [4], по существу, исчерпывают проблему применения квадратурных схем к решению линейных интегральных уравнений. Кстати, если формально применить экстраполяцию Ричардсона к задаче с недостаточно негладкими функциями, то такая ситуация отразится на таблице экстраполяций и производных таблицах – экстраполяция на каком-то этапе не будет улучшать точность и не будут соблюдаться установленные закономерности. Получается, что эффективный порядок точности устанавливается автоматически.

Мы убедились, что, по крайней мере, в рассматриваемом случае множество приближённых решений образует систему, которая подчиняется некоторым приближённым закономерностям. Такую систему значений можно назвать *квазирегулярной*. Конкретный вид этих закономерностей предельного типа определяется видом разложения (2.1). Можно допустить, что высказанное правило относится, вообще, к большинству схем приближённого решения разнообразных задач. Требуется лишь для выбранного параметра улучшения погрешности определить разложение типа (2.1).

Список литературы

1. Richardson L. F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stress in a masonry dam. / Philos. Roy. Soc., London, 1910, Ser. A, v. 210, P. 307–357.

2. Stetter H. J. Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. (Springer Tracts, vol. 23). Berlin-Heidelberg-New York: Springer. 1973.

3. Полянин Ф. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 608 с.

4. Добровольский И. П. Квазиквадратурное решение линейных интегральных уравнений в классе интегрируемых функций/The scientific heritage. Budapest, Hungary: №55 (55). Vol. 2. (2020). P. 48-52.