

Разработка модельной реализации функций Бесселя из стандарта LSB

А. В. Пономаренко

Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, Московская область, Россия
E-mail: 375susanin@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается модельная реализация функций Бесселя, входящих в состав интерфейсов, описанных в стандарте Linux Standard Base (LSB) [1]. Функции Бесселя играют важную роль в решении задач математической физики и широко применяются в электротехнике и радиотехнике. Цель работы состоит в создании реализации функций Бесселя, позволяющей проверить все свойства данных функций: тщательно проанализировать точность возвращаемых значений, проконтролировать значения функций в особых точках и в их окрестностях, их поведение на участках монотонности и асимптотику. Существует большое число методов вычисления функций Бесселя, которые позволяют получать значения функций в различных областях значений аргументов. Однако ни один метод не даёт нужной для тестирования точности вычисления на всей области определения. В модельной реализации применяется комбинация из наиболее эффективных методов, которые строго проанализированы на точность и документированы. Разработанная библиотека производит вычисление указанных функций с помощью модельного типа чисел с плавающей точкой, задаваемых с произвольной точностью.

1. Введение

Главная цель данной работы заключается в создании модельной реализации функций Бесселя, описанных в стандарте Linux Standard Base (LSB) [1]. В работе рассматриваются наиболее эффективные из известных методов вычислений функций Бесселя первого и второго рода, $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ соответственно. Тщательно проанализирована точность самих методов, а также точность выполняемых в ходе вычислений арифметических операций. Также в работе исследованы свойства функций Бесселя и их поведение в особых точках, составлены требования к реализациям этих функций. Работа состоит из следующих частей. Сначала приведены основные свойства функций для ознакомления с ними. Затем приведён набор методов вычислений и исследование их точности. После этого проведён анализ ошибок арифметических операций, выполняемых при вычислениях по этим методам. Далее следует набор требований к реализациям функций, включающий в себя также анализ поведения в особых точках.

2. Функции Бесселя в стандарте LSB

math.bessel	функции Бесселя
math.bessel	j0 первого рода порядка 0
math.bessel	j1 первого рода порядка 1
math.bessel	jn первого рода порядка n
math.bessel	y0 второго рода порядка 0
math.bessel	y1 второго рода порядка 1
math.bessel	yn второго рода порядка n

Таблица 1. Список функций Бесселя, описанных в рамках LSB [1].

3. Основные понятия

Уравнение вида

$$x^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) \cdot y = 0$$

называется уравнением Бесселя индекса ν . Решение уравнения Бесселя, имеющее вид

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2k}$$

называют функцией Бесселя первого рода индекса ν . Здесь $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cdot e^{-x} dx$ — гамма-функция (для целых неотрицательных n $\Gamma(n) = (n - 1)!$). Решение вида

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cdot \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

называется функцией Бесселя второго рода индекса ν (а также функцией Неймана или функцией Вебера). В случае целых индексов $\nu = n \in \mathbb{Z}$ приведенное выражение для $Y_\nu(x)$ понимается как предел при $\nu \rightarrow n$.

В работе исследуются функции Бесселя первого и второго рода для целых индексов $\nu = n \in \mathbb{Z}$.

4. Графики функций

Графики функций $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$ изображены на Рис. 1, соответственно, сплошной, пунктирной и точечной линией.

Графики функций $Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x)$ изображены на Рис. 2, соответственно, сплошной, пунктирной и точечной линией.

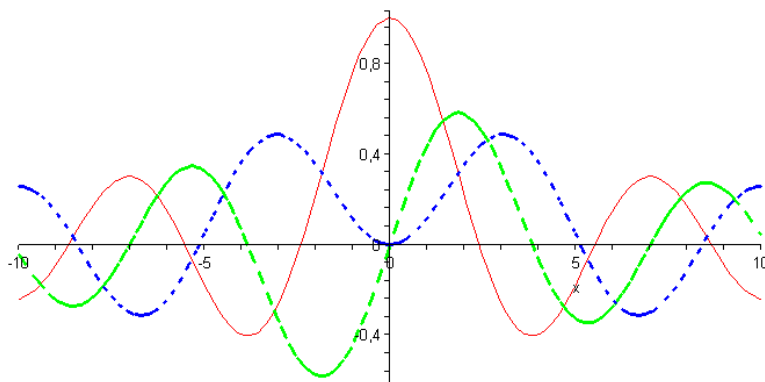


Рисунок 1. Графики функций $J_0(x), J_1(x), J_2(x)$.

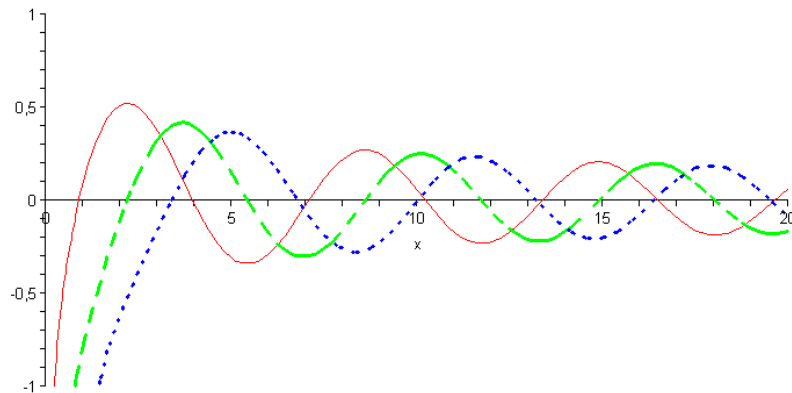


Рисунок 2. Графики функций $Y_0(x), Y_1(x), Y_2(x)$.

5. Асимптотики поведения функций Бесселя

Функции Бесселя имеют следующие асимптотики при различных условиях (см. [2,3]).

$$1. J_n(x) \rightarrow \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \rightarrow 0$$

$$2. Y_0(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right), x \rightarrow 0$$

$$3. Y_n(x) \rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^n, x \rightarrow 0, n \neq 0$$

$$4. J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), x > n^2$$

$$5. Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right), x > n^2$$

6. Вычисление факториала

Во многих формулах для вычисления функций Бесселя присутствует факториал индекса $n!$. Индекс есть переменная типа int, которая может принимать максимальное значение 2147483647. Факториал этого числа огромен. В работе используется формула Стирлинга для представления $n!$ в удобной для вычислений форме:

$$n! = \sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{S(n)},$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}},$$

где B_{2k} есть числа Бернулли, определяемые по формулам

$$B_0 = 1,$$

$$(m+1) \cdot B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} C_{m+1}^k \cdot B_k.$$

Например, в первом разложении Мейсселя (см. ниже), в формуле для вычисления функции Бесселя первого рода есть множитель $\frac{e^n}{n! \cdot n^n}$, который приводится с помощью формулы Стирлинга к удобному для вычислений виду $e^{-S(n)}$.

Первые 10 чисел Бернулли с четными номерами имеют следующие значения:

$$B_0 = 1, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{18} = \frac{43867}{798}, \quad B_{20} = -\frac{174611}{330}$$

Поскольку, начиная с некоторого момента, числа Бернулли с номерами, делящимися на 4, отрицательны, а с номерами, не делящимися на 4, — положительны, ряд $S(n)$ знакопеременный. Возьмём первые 10 его членов. Величина остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Пренебрежение остатком ряда приводит к следующей относительной ошибке применения формулы Стирлинга.

$$\sigma \approx \frac{B_{22}}{22 \cdot 21 \cdot n^{21}} \approx \frac{10}{n^{21}}$$

В алгоритмах вычислений формула Стирлинга будет применяться для $n \geq 100$. При таких условиях имеем следующую оценку относительной погрешности.

$$\sigma \leq 10^{-41}$$

Этого вполне достаточно, так как везде далее будем добиваться гораздо большей относительной ошибки 10^{-20} .

7. Методы вычисления функций

Поскольку различные методы вычисления функций Бесселя имеют разные характеристики сходимости в разных областях, для вычисления значений этих функций на всех значениях аргументов была выбрана следующая комбинация методов.

- Представление рядом Тейлора в окрестности нуля ($x \leq \sqrt{n}$).
- Асимптотические разложения Ганкеля ($x \geq n^2$).
- Метод Стида ($x \cong n$).
- Первое разложение Мейсселя ($x < n, n \geq 100$).
- Второе разложение Мейсселя ($x > n, n \geq 100$).

Везде далее целое число P означает выбираемое заранее количество хранимых значимых цифр в числах, с которыми оперируют вычислительные алгоритмы вычисления.

7.1. Представление $J_n(x)$ в виде степенного ряда

Согласно [2,3] $J_n(x)$ имеет следующее разложение в ряд Тейлора в окрестности 0.

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

Для вычислений удобно считать $(N-1)$ -ю частичную сумму ряда путём сведения к $(N-1)$ произведениям для уменьшения промежуточных ошибок.

$$J_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 1 \cdot (n+1)} \left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 2 \cdot (n+2)} \left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 3 \cdot (n+3)} \left(1 - \dots \frac{x^2}{4 \cdot (N-1) \cdot (n+N-1)} \right) \dots \right) \right) \right)$$

Величина остатка этого ряда меньше его N -го члена. Таким образом, ошибка метода есть величина N -го члена ряда. Из-за медленной сходимости и нарастания ошибки этот метод применяется для значений аргументов $x \leq \sqrt{n}$. Для значений аргумента $x > \sqrt{n}$ он становится неустойчивым по отношению к промежуточным ошибкам, связанным с арифметическими действиями, выполняемыми в процессе вычисления.

Вычисление функции отрицательного индекса сводится к вычислению функции положительного индекса с помощью формулы: $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$

7.1.1. Ошибка вычисления

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \cdot n!} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x)$$

$$A_k(n, x) = \frac{(-1)^k}{k!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$\frac{A_{k+1}(n, x)}{A_k(n, x)} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(k+1)(n+k+1)}$$

Следовательно, $A_k(n, x)$ при возрастании k сначала возрастают, а затем убывают.

Исследуем ошибки для значений аргумента $x \leq \sqrt{n}$.

$$R(N, x, n) = A_N(n, x) = \frac{1}{N!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+N)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2N} \text{ есть относительная ошибка,}$$

так как $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x)$ есть величина порядка единицы.

$R(N, x, n)$ уменьшается при уменьшении x , рассмотрим максимум:

$$R(N, \sqrt{n}, n) = \frac{\left(\frac{n}{4}\right)^N}{N!(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (n+N)!}$$

$$\frac{R_N}{R_{N-1}} = \frac{\frac{n}{4}}{N \cdot (n+N)} \leq \frac{1}{4N}$$

$$R_N \leq \frac{1}{4^N \cdot N!}$$

Чтобы добиться относительной ошибки 10^{-20} нужно выбрать N , такое что

$$\frac{1}{4^N \cdot N!} \leq 10^{-20},$$

$$4^N \cdot N! \geq 10^{20},$$

$$N \geq 18$$

Попробуем расширить интервал, в котором можно достичь нужной относительной погрешности.

Зафиксируем $n = 100$, $x = 100$, $N = 100$, для R получим

$$R(n=100, x=100, N=100) = \frac{50^{200}}{200!} \approx 7.89 \cdot 10^{-36}$$

Далее заметим, что $R(n, x, N)$ убывает при дальнейшем увеличении N .

$$R(n=100, x=100, N=101) = \frac{50^{202}}{101 \cdot 201!} \approx 9.71 \cdot 10^{-37}$$

Величину суммы ряда оценим на компьютере: $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(n, x) \approx 1.14 \cdot 10^{-13}$.

Таким образом, величина относительной ошибки равна $7.89 \cdot 10^{-36} / 1.14 \cdot 10^{-13} \approx 6.92 \cdot 10^{-23}$.

Функция $R(n, x, N)$ убывает при уменьшении n , следовательно, имеем следующие интервалы, на которых достигается относительная ошибка 10^{-23} при выборе $N = 100$.

$$n \leq 100, x \leq n$$

Помимо ошибки, присущей самому методу, возникает ещё дополнительная ошибка, связанная с неточностью выполнения операций сложения, вычитания, умножения, деления. Ее влияние может быть исключено путём увеличения количества значимых цифр P , хранимых при вычислениях (ошибка проанализирована в одном из последних разделов).

7.2. Представление $Y_n(x)$ в виде степенного ряда

Используем следующее представление функций Бесселя второго рода [2,3].

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot (m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\}$$

В этой формуле при $n = 0$ второй член (сумма по m от 0 до $n-1$) считается равным 0.

С помощью этого представления значение $Y_n(x)$ вычисляется для положительных индексов. Вычисление функции отрицательного индекса сводится к вычислению функции положительного индекса с помощью формулы: $Y_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Y_n(x)$.

7.2.1. Ошибка вычисления

Исследуем ошибки для значений аргумента $x \leq \sqrt{n}$. Для этого введём следующие обозначения.

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m},$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot (m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\},$$

$$Y_n(x) = I_1 - I_2 - I_3.$$

Проанализируем составляющие $Y_n(x)$. Для I_3 выполнено

$$I_3 = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot (m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right\} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-1)! \cdot (m+n)!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m},$$

т.е. этот член имеет порядок равный порядку $J_n(x)$. Таким образом,

$I_1 = \frac{2}{\pi} \cdot J_n(x) \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right)$ по порядку величины всегда больше I_2 . Если $n > 0$, $x \leq \sqrt{n}$ то I_2 по порядку величины больше I_1 , так как I_2 содержит как отрицательные степени x , так и положительные (при $n \geq 2$).

Отсюда можно заключить, что при вычислении $J_n(x)$ и I_3 с некоторой относительной ошибкой σ , у $Y_n(x)$ относительная ошибка будет меньше σ . Число членов в I_3 для получения относительной ошибки 10^{-20} можно получить из неравенства, аналогичного выведенному при анализе $J_n(x)$.

$$4^N \cdot (N-1)! \geq 10^{20}$$

$$N \geq 20$$

Можно расширить интервал, на котором возможно вычислить функцию $Y_n(x)$ с относительной погрешностью 10^{-20} , взяв $N = 100$ (см. вычисление ошибок $J_n(x)$).

$$n \leq 100, x \leq n$$

7.3. Асимптотические разложения Ганкеля (Hankel's expansion)

$$J_n(x), Y_n(x)$$

Используются асимптотические разложения Ганкеля [2] для функций Бесселя при $x \rightarrow +\infty$ и ограниченном n .

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} - \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}} \right\}$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} + \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}} \right\}$$

$$(n, m) = \frac{\{4n^2 - 1\} \cdot \{4n^2 - 3\} \cdot \dots \cdot \{4n^2 - (2m-1)^2\}}{2^{2m} \cdot m!}$$

Ряды, которые содержат данные формулы, расходятся. В связи с этим знак бесконечности у суммы нужно понимать как суммирование до тех пор, пока члены ряда уменьшаются.

7.3.1. Ошибка вычисления

Исследуем ошибки для значений аргумента $x \geq n^2$.

Введём следующие обозначения.

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot x}} \cdot \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_1 - \sin\left(x - \frac{\pi \cdot n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot I_2 \right\}$$

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m)}{(2 \cdot x)^{2m}} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(n, x)$$

$$I_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot (n, 2m+1)}{(2 \cdot x)^{2m+1}}$$

Рассмотрим, как ведут себя $A_m(n, x)$.

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m}$$

$A_m(n, x)$ начнут увеличиваться, когда

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m} = 1$$

$$m \cong x \geq n^2$$

Заметим, что A_N есть относительная ошибка вычисления, так как I_1 есть величина порядка единицы. Теперь найдём, каким нужно выбирать количество членов ряда для получения нужной относительной ошибки.

$$\frac{A_m}{A_{m-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4m-3)^2) \cdot (4n^2 - (4m-1)^2)}{128 \cdot (2m-1) \cdot m} \leq \frac{n^4}{16x^2m^2} \leq \frac{1}{16m^2}$$

$$A_N \leq \frac{1}{16^N \cdot (N!)^2} \leq \sigma = 10^{-20}$$

$$N \geq 9$$

Для любого значения σ можно подобрать свою величину N .

При значениях аргумента $x < n^2$ необходимое значение N сильно увеличивается, и в добавление к этому метод становится неустойчивым по отношению к ошибкам выполняемых арифметических действий. Однако для небольших значений индекса попробуем расширить область применимости метода.

Исследуем при A_N $n \leq 100, x \geq n$.

$$\frac{A_N}{A_{N-1}} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{(4n^2 - (4N-3)^2) \cdot (4n^2 - (4N-1)^2)}{128 \cdot (2N-1) \cdot N} \leq \frac{n^4}{16x^2N^2} \leq \frac{n^2}{16N^2}$$

$$A_N \leq \frac{n^{2N}}{16^N \cdot (N!)^2} \leq \frac{100^{2N}}{16^N \cdot (N!)^2} \leq 10^{-20}$$

$$N = 90$$

Оценку I_1 сделаем на компьютере: $I_1 \approx 2.32 \sim 1$. Следовательно, A_N есть относительная ошибка.

При уменьшении n , или увеличении x , при выборе $N = 90$, относительная ошибка будет уменьшаться (при этом $I_1 \sim 1$). Алгоритм вычисляет последовательно A_m и сравнивает с нужной ошибкой, при этом N определяется автоматически.

Теперь рассмотрим I_2 . Заметим, что I_2 по порядку величины есть

$$I_2 \sim I_1 \cdot \frac{4n^2 - 1}{8x},$$

$$I_2 < I_1$$

Вынесением множителя $\frac{4n^2 - 1}{8x}$ из I_2 можно повторить все рассуждения применённые к I_1 .

Таким образом, выбрав то же число членов ряда в I_2 , мы не увеличим относительной ошибки вычисления функции.

7.4. Метод Стида (Steed's method) вычисления $J_n(x)$, $Y_n(x)$

Рассматриваемый в этом разделе метод вычисления функций Бесселя описан в [4,5]. Он применяется для вычислений значений этих функций на аргументах, близких к их индексам.

Решается система из 4-х уравнений относительно $J_n(x)$, $Y_n(x)$ и их производных.

$$W \equiv J_n(x) \cdot Y_n'(x) - Y_n(x) \cdot J_n'(x) = \frac{2}{\pi \cdot x},$$

$$f_n \equiv \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} - \frac{J_{n+1}(x)}{J_n(x)} = \frac{n}{x} - \left(\frac{1}{\frac{2(n+1)}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+2)}{x} - \frac{1}{\frac{2(n+3)}{x} - \dots}}} \right),$$

$$p + iq = \frac{J_n'(x) + iY_n'(x)}{J_n(x) + iY_n(x)} = -\frac{1}{2 \cdot x} + i + \frac{i}{x} \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+i) + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+2 \cdot i) + \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - n^2}{2(x+3 \cdot i) + \dots}}} \right),$$

$$\gamma \equiv \frac{p - f_n}{q};$$

$$J_n(x) = \pm \left(\frac{W}{q + \gamma(p - f_n)} \right),$$

$$Y_n(x) = \gamma \cdot J_n(x).$$

Первая непрерывная дробь считается до N_1 -го уровня, вторая до N_2 -го уровня. Первая непрерывная дробь сходится быстро для $x \leq n$, вторая для $x \geq n$. Чем больше отклонение аргумента от значения $x_0 = n$ в ту или иную сторону, тем большими нужно выбирать числа N_1 и N_2 , чтобы обеспечить нужную точность вычислений.

Знак $J_n(x)$ берётся равным знаку непрерывной дроби f_n во втором уравнении. Этот метод позволяет находить значения функций Бесселя $J_n(x)$, $Y_n(x)$ для значений аргумента $x \cong n$.

7.4.1 Ошибка вычисления $J_n(x)$ и $Y_n(x)$

Поскольку оценка погрешностей усложнена из-за наличия ошибки непрерывной дроби, оценить которую очень сложно, то применяется следующий алгоритм проверки ошибок. Известно, что функции Бесселя удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x} \right) \cdot J_n(x),$$

$$Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x} \right) \cdot Y_n(x).$$

Пусть нам нужно оценить точность вычисления функции $J_n(x)$, тогда вычисляем заодно функции $J_{n-1}(x)$ и $J_{n+1}(x)$ по тому же алгоритму. Подставляем в рекуррентное соотношение. Если оно выполняется с некоторой ошибкой, то это и есть ошибка вычисления функции. Таким способом можно получить следующие интервалы, в которых данный алгоритм даёт относительную ошибку вычисления 10^{-20} при выборе числа итераций дробей равным 500:

- 1) $10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$
- 2) $10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$
- 3) $10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$

Данные интервалы можно расширить более мелким разбиением значений индекса n .

7.5. Первое разложение Мейсселя (Meissel's first expansion)

Рассматриваемый в этом разделе метод приведен в [6].

Перепишем уравнение Бесселя в следующем виде, сделав замену переменных.

$$z^2 \frac{d^2 J_n(nz)}{dz^2} + z \frac{dJ_n(nz)}{dz} + n^2(1-z^2)J_n(nz) = 0$$

Решение его ищем в виде

$$J_n(nz) = \frac{n^n}{n!} \exp\left\{\int_z u(z) dz\right\}$$

$$u(z) = n \cdot u_0 + u_1 + \frac{u_2}{n} + \frac{u_3}{n^2} + \frac{u_4}{n^3} + \frac{u_5}{n^4} + \frac{u_6}{n^5} + \frac{u_7}{n^6} + \frac{u_8}{n^7} + \frac{u_9}{n^8} + \dots$$

находим функции $u_0, u_1, u_2, \dots$ с помощью подстановки выражения для $J_n(nz)$ в уравнение Бесселя.

$$u_0 = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}, u_1 = \frac{z}{2(1-z^2)}, u_2 = -\frac{4z+z^2}{8(1-z^2)^{5/2}}, u_3 = \frac{4z+10z^3+z^5}{8(1-z^2)^4},$$

$$u_4 = -\frac{64z+560z^3+456z^5+25z^7}{128(1-z^2)^{11/2}}, u_5 = \frac{16z+368z^3+924z^5+347z^7+13z^9}{32(1-z^2)^7}, \dots$$

Интегрируем $u(z)$ и получаем выражение для функции Бесселя первого рода.

$$J_n(nz) = \frac{(nz)^n \cdot \exp(n\sqrt{1-z^2}) \cdot \exp(-V_n)}{e^n \cdot n! (1-z^2)^{1/4} \cdot [1+\sqrt{1-z^2}]^n},$$

$$V_n = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + \dots,$$

$$V_1 = \frac{1}{24n} \left(\frac{2+3z^2}{(1-z^2)^{3/2}} - 2 \right), \quad V_2 = -\frac{4z^2+z^4}{16n^2(1-z^2)^3},$$

$$V_3 = -\frac{1}{5760 \cdot n^3} \left(\frac{16-1512z^2-3654z^4-375z^6}{(1-z^2)^{9/2}} - 16 \right),$$

$$V_4 = -\frac{32z^2+288z^4+232z^6+13z^8}{128 \cdot n^4(1-z^2)^6},$$

$$V_5 = \frac{1}{322560 \cdot n^5(1-z^2)^{15/2}} (67599 \cdot z^{10} + 1914210 \cdot z^8 + 4744640 \cdot z^6 + 1891200 \cdot z^4 + 78720 \cdot z^2 + 256) - \frac{1}{1260 \cdot n^5},$$

$$V_6 = -\frac{z^2}{192 \cdot n^6(1-z^2)^9} (48 + 2580 \cdot z^2 + 14884 \cdot z^4 + 17493 \cdot z^6 + 4242 \cdot z^8 + 103 \cdot z^{10}),$$

$$V_7 = \frac{1}{3440640 \cdot n^7(1-z^2)^{21/2}} (881664 \cdot z^2 + 99783936 \cdot z^4 + 1135145088 \cdot z^6 + 2884531440 \cdot z^8 + 1965889800 \cdot z^{10} + 318291750 \cdot z^{12} + 5635995 \cdot z^{14} - 2048) + \frac{1}{1680 \cdot n^7},$$

$$V_8 = -\frac{z^2}{4096 \cdot n^8(1-z^2)^{12}} (1024 + 248320 \cdot z^2 + 5095936 \cdot z^4 + 24059968 \cdot z^6 + 34280896 \cdot z^8 + 15252048 \cdot z^{10} + 1765936 \cdot z^{12} + 23797 \cdot z^{14}), \dots$$

Аналогично для функции Бесселя второго рода получаем

$$Y_n(nz) = \frac{e^n \cdot (n-1)! [1+\sqrt{1-z^2}]^n \cdot \exp(V_n)}{\pi \cdot (nz)^n \cdot (1-z^2)^{1/4} \cdot \exp(n\sqrt{1-z^2})},$$

$$V_n = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + V_5 - V_6 + V_7 - V_8 + \dots$$

7.5.1. Ошибка вычисления $J_n(x)$ и $Y_n(x)$

Оценим ошибку применённых формул.

$$z = \frac{x}{n},$$

$$V_9 \cong \frac{1}{10^7 \cdot n^9 \cdot (1-z^2)^{27/2}} \cdot (10^6 \cdot z^2 + 10^8 z^4 + 10^{10} z^6 + 10^{12} \cdot (z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{10} z^{14} + 10^8 z^{16} + 10^6 z^{18})$$

Это и есть нужная относительная ошибка вычисления, обозначим её за $f(z)$.

Потребуем, чтобы величина ошибки не превосходила $\sigma = 10^{-20}$.

$$f(z) = \frac{1}{10^7 \cdot n^9 \cdot (1-z^2)^{27/2}} \cdot (10^6 \cdot z^2 + 10^8 z^4 + 10^{10} z^6 + 10^{12} \cdot (z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{10} z^{14} + 10^8 z^{16} + 10^6 z^{18}) \leq 10^{-20}$$

Построим график функции $f(z)$ для различных значений индекса n . См. Рис.3-6.

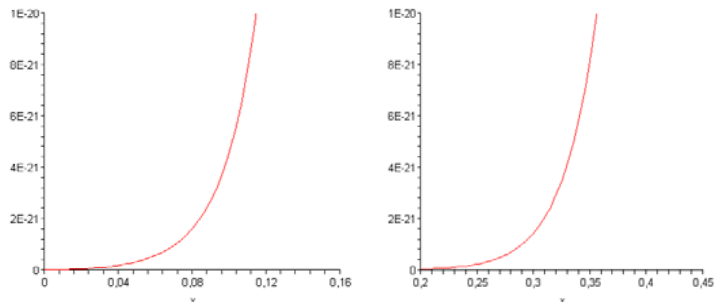


Рисунок 3. Графики $f(z)$ для $n = 100$ и $n = 300$.

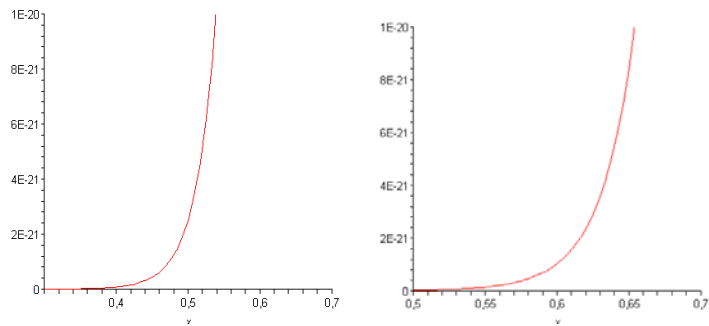


Рисунок 4. Графики $f(z)$ для $n = 600$ и $n = 1000$.

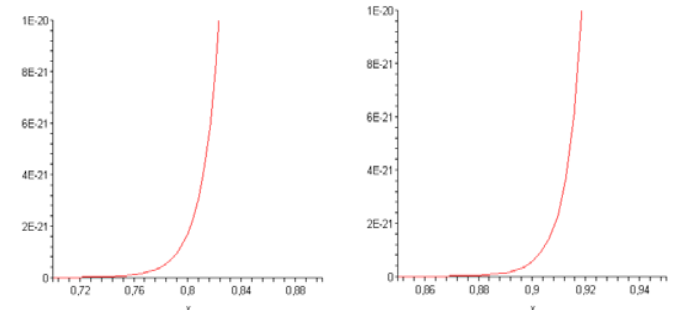


Рисунок 5. Графики $f(z)$ для $n = 3000$ и $n = 10^4$.

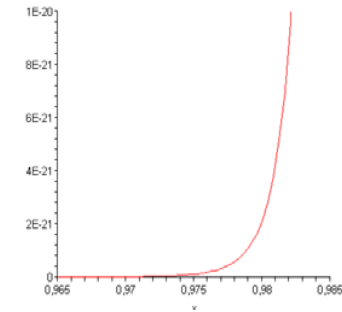


Рисунок 6. График $f(z)$ для $n = 10^5$.

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для n и x , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее 10^{-20} .

- 1) $100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$
- 2) $300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$
- 3) $600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$
- 4) $1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$
- 5) $3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$
- 6) $10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$
- 7) $10^5 \leq n \leq \infty, x \leq 0.98 \cdot n$

Данной относительной погрешности достаточно для тестирования функций на переменных типа long double, а следовательно и double и float. Для тестирования функций на переменных типа double требуется меньшая относительная погрешность, а для тестирования float ещё меньшая.

7.6. Второе разложение Мейсселя (Meissel's Second expansion)

Приведенное здесь разложение также взято из [6].

$$J_n(n \cdot \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{n\pi}} \cdot \exp\{-P_n\} \cdot \cos\left(Q_n - \frac{1}{4}\pi\right),$$

$$Y_n(n \cdot \sec \beta) = \sqrt{\frac{2 \cot \beta}{n\pi}} \cdot \exp\{-P_n\} \cdot \sin\left(Q_n - \frac{1}{4}\pi\right).$$

$$\sec \beta = \frac{1}{\cos \beta} = \frac{x}{n}, \quad \cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 \beta - 1}}$$

$$P_n = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$$

$$P_1 = \frac{\cot^6 \beta}{16 \cdot n^2} (4 \sec^2 \beta + \sec^4 \beta),$$

$$P_2 = -\frac{\cot^{12} \beta}{128 \cdot n^4} (32 \sec^2 \beta + 288 \sec^4 \beta + 232 \sec^6 \beta + 13 \sec^8 \beta),$$

$$P_3 = \frac{\cot^{18} \beta}{192 \cdot n^6} (48 \sec^2 \beta + 2580 \sec^4 \beta + 14884 \sec^6 \beta + 17493 \sec^8 \beta + 4242 \sec^{10} \beta + 103 \sec^{12} \beta),$$

$$P_4 = -\frac{\cot^{24} \beta \sec^2 \beta}{4096 \cdot n^8} (1024 + 248320 \cdot \sec^2 \beta + 5095936 \cdot \sec^4 \beta + 24059968 \cdot \sec^6 \beta + 34280896 \cdot \sec^8 \beta + 15252048 \cdot \sec^{10} \beta + 1765936 \cdot \sec^{12} \beta + 23797 \cdot \sec^{14} \beta), \dots$$

$$Q_n = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots$$

$$Q_1 = n(\tan \beta - \beta) - \frac{\cot^3 \beta}{24n} (2 + 3 \sec^2 \beta),$$

$$Q_2 = -\frac{\cot^9 \beta}{5760n^3} (16 - 1512 \cdot \sec^2 \beta - 3654 \cdot \sec^4 \beta - 375 \cdot \sec^6 \beta),$$

$$Q_3 = -\frac{\cot^{15} \beta}{322560 \cdot n^5} (256 + 78720 \cdot \sec^2 \beta + 1891200 \cdot \sec^4 \beta + 4744640 \cdot \sec^6 \beta + 1914210 \cdot \sec^8 \beta + 67599 \cdot \sec^{10} \beta),$$

$$Q_4 = \frac{\cot^{21} \beta}{3440640 \cdot n^7} (881664 \cdot \sec^2 \beta + 99783936 \cdot \sec^4 \beta + 1135145088 \cdot \sec^6 \beta + 2884531440 \cdot \sec^8 \beta + 1965889800 \cdot \sec^{10} \beta + 318291750 \cdot \sec^{12} \beta + 5635995 \cdot \sec^{14} \beta - 2048), \dots$$

7.6.1. Ошибка вычисления $J_n(x)$

$$P_5 \sim \frac{\cot^{30} \beta}{10^3 n^{10}} (10^3 z^2 + 10^7 z^4 + 10^9 (z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12} + z^{14}) + 10^8 z^{16} + 10^5 z^{18}),$$

$$Q_5 \sim \frac{\cot^{27} \beta}{10^7 \cdot n^9} (10^6 z^2 + 10^8 z^4 + 10^{12} (z^6 + z^8 + z^{10} + z^{12}) + 10^{11} z^{16} + 10^8 \cdot z^{18}),$$

$$\cot \beta = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad z = \frac{x}{n}$$

Относительная ошибка вычисления есть

$$\sigma = |P_5| + \left| Q_5 \cdot \operatorname{tg}(Q_n - \frac{\pi}{4}) \right|$$

$$Q_n \approx Q_1 = n(\tan \beta - \beta) - \frac{\cot^3 \beta}{24n} (2 + 3 \sec^2 \beta) = n \left(\sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1} - \arccos\left(\frac{n}{x}\right) \right) - \frac{1}{24n \cdot \left(\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1\right)^{3/2}} \cdot \left(2 + 3 \left(\frac{x}{n}\right)^2 \right)$$

Учитывая, что $z = \frac{x}{n}$, перепишем последнее соотношение.

$$Q_n \approx n \left(\sqrt{z^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{z}\right) \right) - \frac{1}{24n \cdot (z^2 - 1)^{3/2}} \cdot (2 + 3z^2)$$

Построим графики функции $f(z, n) = |P_5(z, n)| + \left| Q_5(z, n) \cdot \operatorname{tg}(Q_n(z, n) - \frac{\pi}{4}) \right|$ как функции

от z для различных значений индекса n . См. Рис. 7, 8.

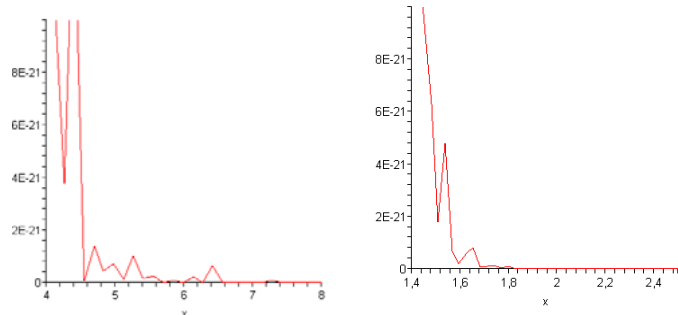


Рисунок 7. Графики $f(z)$ для $n = 100$ и $n = 1000$.

Из первого графика видно, что при $z \geq 5$ относительная ошибка меньше 10^{-20} .

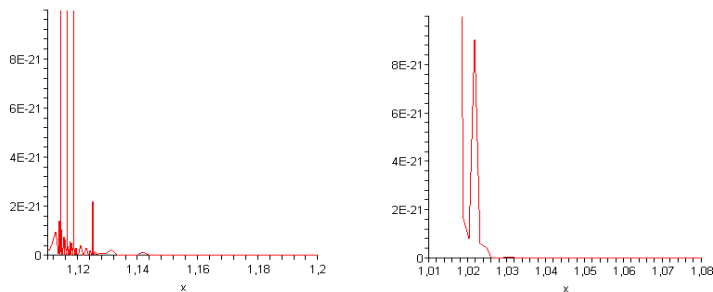


Рисунок 8. Графики $f(z)$ для $n = 10^4$ и $n = 10^5$.

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для n и x , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее 10^{-20} .

- 1) $100 \leq n \leq 1000, x \geq 5 \cdot n$
- 2) $1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.6 \cdot n$
- 3) $10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.14 \cdot n$
- 4) $10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$

Для другой относительной погрешности можно подобрать свои интервалы.

7.6.2 Ошибка вычисления $Y_n(x)$

Относительная ошибка вычисления есть

$$\sigma = |P_5| + \left| Q_5 \cdot \cot(Q_n - \frac{\pi}{4}) \right|$$

Построим графики функции $f(z, n) = |P_5(z, n)| + \left| Q_5(z, n) \cdot \cot(Q_n(z, n) - \frac{\pi}{4}) \right|$ как функции

от z для различных значений индекса n . См. Рис. 9, 10.

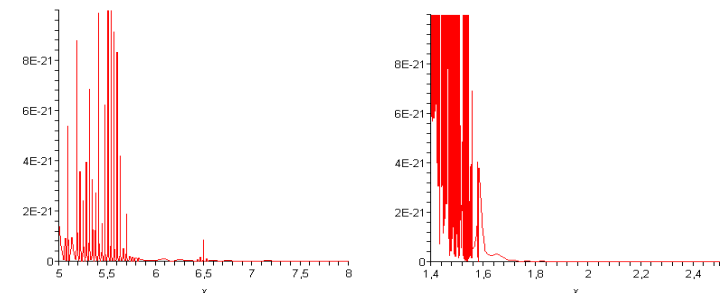


Рисунок 9. Графики $f(z)$ для $n = 100$ и $n = 1000$.

Из первого графика видно, что при $z \geq 6$ относительная ошибка меньше 10^{-20} .

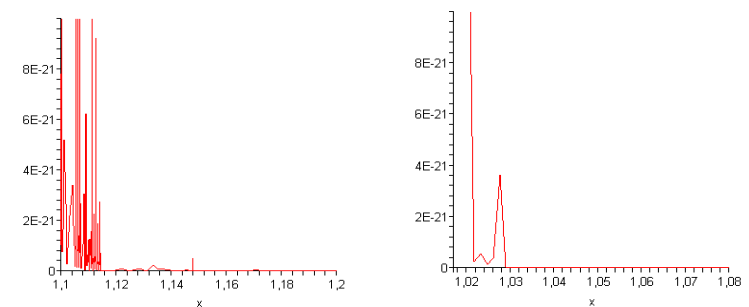


Рисунок 10. Графики $f(z)$ для $n = 10^4$ и $n = 10^5$.

Анализируя графики, можно выбрать следующие интервалы для n и x , на которых данный метод приближает функции Бесселя с относительной погрешностью менее 10^{-20} :

- 1) $100 \leq n \leq 1000, x \geq 6 \cdot n$
- 2) $1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.7 \cdot n$
- 3) $10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.12 \cdot n$
- 4) $10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$

Для другой относительной погрешности можно подобрать свои интервалы.

8. Требования к реализациям функций Бесселя

8.1. Область определения функций

1. $J_n(x)$ определена для всех значениях аргумента x .
2. $Y_n(x)$ определена для значений аргумента $x > 0$.

8.2. Точки выхода за интервал представимых чисел

1. Если значение одной из функций $J_n(x), n \neq 0$ при данном значении аргумента $x \rightarrow 0$ мало настолько, что выходит за пределы интервала чисел с плавающей точкой, то данная функция должна возвращать 0. Обозначим за ε минимальное представимое положительное число. Из асимптотики $J_n(x) \rightarrow \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \rightarrow 0$

следует, что для аргументов $|x| < 2 \cdot (\varepsilon \cdot n!)^{\frac{1}{n}}$ функция должна возвращать 0.

Таким образом, от функции $J_n(x)$ нужно требовать: $J_n(x) = 0, |x| < 2 \cdot (\varepsilon \cdot n!)^{\frac{1}{n}}$.

2. Функция $J_0(x)$ имеет в точке $x = 0$ экстремум ($J_0(x) \leq 1$). Следовательно, нужно требовать, чтобы в некоторой окрестности нуля определяемой неравенством $1 - J_0(x) < \varepsilon$ функция возвращала единицу. Возьмём в разложении Тейлора функции $J_0(x)$ первые два члена: $J_0(x) \approx 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2, x \rightarrow 0$. Из неравенства $1 - J_0(x) < \varepsilon$ получим следующий интервал для аргумента $1 - J_0(x) \approx 1 - \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq \varepsilon \Rightarrow |x| \leq 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, от функции $J_0(x)$ нужно требовать: $J_0(x) = 1, |x| \leq 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}$.

3. Если значение одной из функций $Y_n(x)$ при данном значении аргумента $x \rightarrow +0$ велико настолько, что выходит за пределы интервала чисел с плавающей точкой, то данная функция должна возвращать $-\infty$. Обозначим за M максимальное представимое число. Из асимптотики поведения функции $Y_0(x)$ в

нуле следует, что для аргументов $0 < x < 2 \cdot \exp\left\{-\gamma - \frac{\pi \cdot M}{2}\right\}$ (здесь γ —

постоянная Эйлера) функция должна возвращать $-\infty$. Заметим, что, например, для чисел типа float, double, long double верна следующая оценка:

$2 \cdot \exp\left\{-\gamma - \frac{\pi \cdot M}{2}\right\} \leq \varepsilon$, а значит для всех представимых аргументов $x > 0$

выполнено $|Y_0(x)| \leq M$. Для функции $Y_1(x)$ должно выполняться:

$Y_1(x) = -\infty, 0 < x < \frac{2}{\pi \cdot M}$. От функции $Y_n(x)$ нужно требовать:

$$Y_n(x) = -\infty, 0 < x < 2 \cdot \left(\frac{(n-1)!}{\pi \cdot M}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

8.3. Область значений функций

Из всех функций только для одной можно дать точную оценку для области значений, причём это всего лишь оценка сверху.

$$J_0(x) \leq 1$$

Это свойство должно быть выполнено для всех значений аргумента.

8.4. Некоторые соотношения

1. $J_0(-x) = J_0(x), J_1(-x) = -J_1(x), J_n(-x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$
2. $J_{-n}(x) = (-1)^n \cdot J_n(x)$
3. $Y_{-n}(x) = (-1)^n \cdot Y_n(x)$

4. Рекуррентные соотношения:

$$4.1. J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot J_n(x)$$

$$4.2. Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \left(\frac{2n}{x}\right) \cdot Y_n(x)$$

8.5. Сохранение знака

Знак значения реализации функции для всех аргументов должен совпадать со знаком значения самой функции, кроме тех значений аргумента, у которых единица последнего разряда становится больше величины интервала смены знака.

8.6. Значения на особых числах с плавающей точкой

x	NaN	+0	-0	$+\infty$	$-\infty$
$J_0(x)$	NaN	1	1	0	0
$J_1(x)$	NaN	+0	-0	0	0
$J_n(x), n \geq 2$	NaN	+0	$+0, n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ $-0, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$	0	0
$J_n(x), n \leq -1$	NaN	$+0, n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ $-0, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$	+0	0	0
$Y_0(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN
$Y_1(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN
$Y_n(x)$	NaN	$-\infty$	NaN	0	NaN

Таблица 2. Значения функций Бесселя для особых чисел с плавающей точкой.

9. Ошибки выполнения арифметических операций

Во время всех вычислений одновременно вычисляется оценка ошибки, связанной с ограниченностью количества хранимых значимых цифр P в числах, с которыми оперируют используемые алгоритмы. Обозначим основание системы счисления за $base$. Оценка ошибка хранится в виде целого числа R и вычисляется по следующей формуле.

$$error = \frac{R}{base^P}$$

Пусть производится некоторая операция с числами X и Y . Обозначим как e_1 порядок числа X , как e_2 обозначим порядок числа Y , как f_1 обозначим первую значащую цифру числа X , а как f_2 — первую значащую цифру числа Y . Пусть ошибка X равна $error_1$, ошибка Y равна $error_2$.

Далее приводятся алгоритмы вычисления ошибок, которые позволяют оценить порядок возникающих ошибок операций. Сначала ошибки всех чисел инициализируются единицей, так как за некоторое число операций в результате округления у чисел появится погрешность не превосходящая 10^{-P} .

9.1. Ошибка сложения чисел X и Y

Если порядок X больше порядка Y , то

$$error = error_1 + \frac{1}{base^{e_1 - e_2}} \cdot error_2.$$

Если порядок Y больше порядка X , то

$$error = error_2 + \frac{1}{base^{e_2 - e_1}} \cdot error_1.$$

Если порядки равны, то

$$error = error_1 + error_2.$$

Если в результате сложения порядок результирующего числа больше порядка слагаемых, то ошибку нужно разделить на $base$.

9.2. Ошибка вычитания чисел X и Y

Если порядок X больше порядка Y , то

$$error = error_1 + \frac{1}{base^{e_1 - e_2}} \cdot error_2.$$

Если $e_1 - e_2 > P - 1$, то ошибка увеличивается на единицу.

Если порядок Y больше порядка X , то

$$error = error_2 + \frac{1}{base^{e_2 - e_1}} \cdot error_1.$$

Если $e_2 - e_1 > P - 1$, то ошибка увеличивается на единицу.

Если порядки равны, то

$$error = error_1 + error_2.$$

9.3. Ошибка умножения чисел X и Y

$$error = \frac{error_1 \cdot (1 + f_1)}{base} + \frac{error_2 \cdot (1 + f_2)}{base}$$

9.4. Ошибка деления чисел X и Y

$$error = \frac{error_1 \cdot base}{f_1} + \frac{error_2 \cdot base \cdot f_1}{(f_2)^2}$$

Если $f_1 / f_2 > 1$, то ошибку нужно разделить на $base$.

9.5. Статистика ошибок вычисления $J_n(x)$

Далее в Табл. 3 приведены оценки ошибки используемых методов в виде значений R для различных интервалов, на которых вычисляются функции.

Метод	Интервал	R
Представление в виде степенного ряда	$n \leq 100, x \leq n$	10^8
	$n \geq 100, x \leq \sqrt{n}$	10^2
Асимптотическое разложение Ганкеля	$n \leq 100, x \geq n$	10^6
	$n \geq 100, x \geq n^2$	10^3
Метод Стида	$10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$	10^9
	$10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$	10^9
	$10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$	10^9
Первое разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$	10^4
	$300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$	10^3
	$600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$	10^3
	$1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$	10^3
	$3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$	10^3
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$	10^4
Второе разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 1000, x \geq 5 \cdot n$	10^4
	$1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.6 \cdot n$	10^5
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.14 \cdot n$	10^6
	$10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$	10^6

Таблица 3. Значения оценок ошибок арифметических действий при вычислении $J_n(x)$.

9.6. Статистика ошибок вычисления $Y_n(x)$

Далее в Табл. 4 приведены оценки ошибки используемых методов в виде значений R для различных интервалов, на которых вычисляются функции.

Метод	Интервал	R
Представление в виде степенного ряда	$n \leq 100, x \leq n$	10^8
	$n \geq 100, x \leq \sqrt{n}$	10^2
Асимптотическое разложение Ганкеля	$n \leq 100, x \geq n$	10^6
	$n \geq 100, x \geq n^2$	10^3
Метод Стида	$10^2 \leq n \leq 10^3, n-10 \leq x \leq n+400$	10^9
	$10^3 \leq n \leq 10^4, n-10 \leq x \leq n+100$	10^9
	$10^4 \leq n \leq 10^5, n-10 \leq x \leq n+10$	10^9

Первое разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 300, x \leq 0.1 \cdot n$	10^4
	$300 \leq n \leq 600, x \leq 0.3 \cdot n$	10^3
	$600 \leq n \leq 1000, x \leq 0.5 \cdot n$	10^3
	$1000 \leq n \leq 3000, x \leq 0.6 \cdot n$	10^3
	$3000 \leq n \leq 10^4, x \leq 0.8 \cdot n$	10^3
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \leq 0.9 \cdot n$	10^4
Второе разложение Мейсселя	$100 \leq n \leq 1000, x \geq 6 \cdot n$	10^4
	$1000 \leq n \leq 10^4, x \geq 1.7 \cdot n$	10^5
	$10^4 \leq n \leq 10^5, x \geq 1.12 \cdot n$	10^6
	$10^5 \leq n < \infty, x \geq 1.03 \cdot n$	10^6

Таблица 4. Значения оценок ошибок арифметических действий при вычислении $Y_n(x)$.

10. Структура разработанной реализации

В результате проведенной работы была разработана реализация функций Бесселя первого и второго рода на языке C. Реализация выполнена в виде набора функций, работающих с данными типа `unifloat` (числа с плавающей точкой произвольной точности) и размещенных в файле `bessel.c`. Разработанные функции перечислены в Табл. 5.

Декларация функции	Пояснение
<code>unifloat bessell_j0(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса 0
<code>unifloat bessell_j1(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса 1
<code>unifloat bessell_y0(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса 0
<code>unifloat bessell_y1(unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса 1
<code>unifloat bessell_jn(int n, unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя первого рода индекса n
<code>unifloat bessell_yn(int n, unifloat x, int method)</code>	Функция Бесселя второго рода индекса n
Вспомогательные функции	
<code>unifloat powerseries_jn(int n, unifloat x)</code>	Реализация ряда Тейлора для $J_n(x)$
<code>unifloat powerseries_yn(int n, unifloat x)</code>	Реализация ряда Тейлора для $Y_n(x)$

unifloat Hankel_jn(int n, unifloat x)	Реализация разложения Ганкеля для $J_n(x)$
unifloat Hankel_yn(int n, unifloat x)	Реализация разложения Ганкеля для $Y_n(x)$
unifloat Steed_jn(int n, unifloat x)	Реализация метода Стида для $J_n(x)$
unifloat Steed_yn(int n, unifloat x)	Реализация метода Стида для $Y_n(x)$
unifloat MeisselFirst_jn(int n, unifloat x)	Реализация первого разложения Мейсселя для $J_n(x)$
unifloat MeisselFirst_yn(int n, unifloat x)	Реализация первого разложения Мейсселя для $Y_n(x)$
unifloat MeisselSecond_jn(int n, unifloat x)	Реализация второго разложения Мейсселя для $J_n(x)$
unifloat MeisselSecond_yn(int n, unifloat x)	Реализация второго разложения Мейсселя для $Y_n(x)$
unifloat Stirling_series(int n)	Вспомогательная функция для вычисления факториала
unifloat UFsqrt(unifloat x)	Вспомогательная функция извлечения корня
unifloat UFpow(int n, unifloat x)	Вспомогательная функция возведения в степень
complexnum complex_add(complexnum x, complexnum y)	Сложение комплексных чисел
complexnum complex_sub(complexnum x, complexnum y)	Вычитание комплексных чисел
complexnum complex_mul(complexnum x, complexnum y)	Умножение комплексных чисел
complexnum complex_div(complexnum x, complexnum y)	Деление комплексных чисел

Таблица 5. Список функций, разработанных при реализации вычислений функций Бесселя.

11. Заключение

В результате данной работы исследованы и реализованы методы вычислений функций Бесселя, проанализирована их точность и приведена статистика арифметических операций. Составлены требования к реализациям функций.

Литература

[1] <http://www.linuxbase.org/spec>

- [2] У. Джоунс, В. Трон. *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения*. М: Мир, 1985.
- [3] Г. Н. Ватсон. Теория Бесселевых функций. М: ИЛ, 1949.
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [5] F. A. Chishtie, S. R. Valluri, K. M. Rao, D. Sikorski, and T. Williams. *The Analysis of Large Order Bessel Functions in Gravitational Wave Signals from Pulsars*. In Proc. Of the 19-th International Symposium on High Performance Computing Systems and Applications, 2005.
- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1965.