

УДК 539.42

Структурная целостность стыковых соединений

М.П. Внук

Университет Висконсин-Милуоки, Милуоки, WI 53201, США

Оценка адгезионной прочности стыкового соединения имеет первостепенную важность в авиационном машиностроении, а также в аэрокосмической технике. С математической точки зрения это нетривиальная задача, поскольку она касается механики разрушения не одного, а двух тел, имеющих различные модули и характеристики, такие как коэффициент Пуассона, модуль сдвига, собственная когезионная прочность. Для оценки адгезионной прочности использован энергетический подход, аналогичный подходу Гриффитса (1921 г.). Рассмотрены некоторые характерные примеры различных геометрических конфигураций и получены замкнутые решения.

Фундаментальной посылкой этой работы служит идея о том, что несмотря на возможную неточность энергетического подхода он дает глубокое физическое понимание и превосходное приближение к точному решению задач, которые, как правило, не допускают строгого математического решения.

Ключевые слова: энергия упругой деформации, потенциальная функция, энергетический критерий разрушения, адгезионная прочность, упругие модули, поверхностная энергия стыкового соединения, удельная адгезионная прочность, катастрофическое разрушение, критический размер трещины, критическое напряжение, критическое давление

Structural integrity of bonded joints

M.P. Wnuk

University of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee, WI 53201, USA

Evaluation of the adhesive strength of a bonded joint is of paramount importance in aeronautical engineering and also in the space applications in the rocket science area. From mathematical point of view it is not a simple problem, since it involves mechanics of fracture applied not to a single solid body, but to two bodies with dissimilar material moduli and other properties common in the theory of continua, such as Poisson ratio, shear modulus and the inherent cohesive strength. To address the task of evaluation of the adhesive strength an energy approach analogous to that of Griffith (1921) has been applied. Certain specific examples pertaining to various geometrical configurations have been considered and the closed form solutions have been found.

The fundamental assumption of this work is the idea that although the energy approach to fracture may not be exact, yet it provides a valuable physical insight and an excellent approximation for the exact solutions to problems, which are not usually susceptible to rigorous mathematical treatment.

Keywords: elastic strain energy, potential function, energy criterion for fracture, adhesive strength, elastic moduli, surface energy of bonded joint, adhesive specific strength, catastrophic fracture, critical crack size, critical stress, critical pressure

1. Введение

При рассмотрении структурной целостности стыковых соединений должны применяться иные подходы, по сравнению с теми, которые используются для описания сплошных однородных конструкций. В данной работе в качестве альтернативного способа предсказания начала разрушения представлен подход, основанный на анализе энергетического баланса, который был впервые предложен Гриффитсом в классической работе по хрупкому разрушению стекла [1]. Поскольку метод Гриффит-

са основан на анализе полной энергии, то аналогичный подход можно использовать и для гетерогенных структур, подобных соединениям различного типа.

2. Энергетический баланс в момент начала разрушения

При любом термодинамически возможном процессе должен выполняться закон сохранения энергии. Распространение трещины представляет собой процесс, в котором энергия упругой деформации преобразуется в

другую форму потенциальной энергии, связанную с образованием свободной поверхности. Поэтому при приращении длины трещины должно выполняться следующее соотношение:

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta U + \delta SE, \quad (1)$$

где δW_{ext} — работа внешних сил, совершаемая при переходе из состояния 1 в состояние 2 ($a \rightarrow a + \delta a$); δU и δSE — соответствующие приращения энергии деформации и поверхностной энергии системы в процессе этого перехода. Рассмотрим систему, состоящую из упругой среды, внешних сил и трещины длиной $2a$ в стадии зарождающегося (или предполагаемого) роста (рис. 1). Предполагается, что все величины, входящие в соотношение (1), являются функциями полудлины трещины a . Таким образом, оператор вариации δ означает:

$$\delta[\] = \left\{ \frac{\partial[\]}{\partial a} \right\} \delta a. \quad (2)$$

Энергия U вычисляется посредством громоздкого интегрирования точного выражения

$$U = \frac{1}{2} \int_D \int \left[\sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] dA, \quad (3)$$

где двумерная область интегрирования D определяется в данной задаче как площадь бесконечной пластины, содержащей так называемую «трещину Гриффитса» (рис. 1). Результат данных вычислений можно привести к неожиданно простому виду:

$$U = U_{\text{no crack}} + U_{\text{crack}} = U_{\text{no crack}} + \frac{\pi \sigma^2 a^2}{E'}. \quad (4)$$

Так как член $U_{\text{no crack}}$ относится к телу, не содержащему трещины, то он не зависит от a , и вариация выражения (4) дает $\delta U = \delta U_{\text{crack}} = (2\pi \sigma^2 a / E') \delta a$. В рассматриваемой системе распространение трещины может происходить при различных граничных условиях:

а) неподвижные захваты, когда смещение на внешней границе постоянно, $u = \text{const}$;

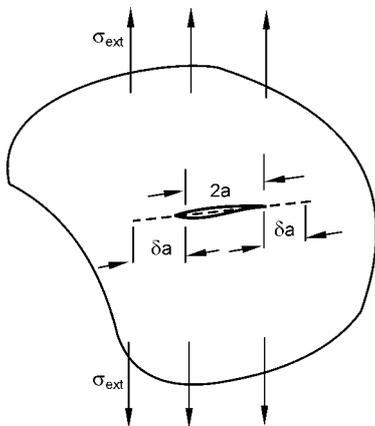


Рис. 1. Система, состоящая из трех компонентов: упругое тело, внешняя нагрузка σ_{ext} , трещина длиной $2a$

б) фиксированная нагрузка, когда постоянно напряжение на внешней границе, $\sigma = \text{const}$.

Поскольку в случае неподвижных захватов $\delta u = 0$, работа внешними силами не совершается, и внутренняя энергия деформации упругого тела уменьшается за счет релаксации напряжений, происходящей в процессе приращения длины трещины. Таким образом, уравнение энергетического баланса (1) в момент начала разрушения записывается как

$$0 = -\frac{2\pi \sigma^2 a}{E'} \delta a + \gamma(4\delta a). \quad (5)$$

После сокращения неизвестной δa получаем выражение

$$\sigma^2(\pi a) = 2E'\gamma, \quad (6)$$

которое представляет собой известный результат Гриффитса [1], описывающий остаточную прочность тела, содержащего трещину. Ключом к успеху теории Гриффитса была правильная интерпретация члена $\Delta SE = \gamma(\Delta A)$, где γ — поверхностная энергия, определяемая как работа, которую необходимо совершить для разрыва двух соседних атомных плоскостей, $\Delta A = \Delta A_{\text{bottom}} + \Delta A_{\text{top}} = 2\delta a B + 2\delta a B$ — полная площадь образовавшейся свободной поверхности (рис. 1). Поскольку толщина пластины B полагается равной 1, то $\Delta A = 4\delta a$, и данная величина входит в выражение (5).

Теперь рассмотрим второй случай, когда в процессе перехода ($a \rightarrow a + \delta a$) на границе тела, содержащего трещину, поддерживается постоянная нагрузка. В этом случае работа внешних сил не равна нулю:

$$\delta W_{\text{ext}} = (4\pi \sigma^2 a / E') \delta a \quad (7)$$

и уравнение энергетического баланса в момент начала разрушения записывается следующим образом:

$$(4\pi \sigma^2 a / E') \delta a = (2\pi \sigma^2 a / E') \delta a + (4\gamma) \delta a. \quad (8)$$

Упрощая выражение (8), снова получаем результат Гриффитса:

$$\sigma \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E'\gamma}, \quad (9)$$

который в сокращенном виде можно записать как

$$K_I(\sigma, a) = K_{Ic}. \quad (10)$$

Легко увидеть, что параметры системы σ и a сгруппированы в левой части равенства (9), в то время как параметры, описывающие свойства материала, находятся справа. Аналогичным образом записано и выражение (10). Отметим, что в современной терминологии вместо 2γ используется величина G_f , которая представляет собой удельную работу разрушения.

Дж. Райс [2] обобщил теоретические основы энергетического критерия разрушения Гриффитса и показал, что всякое приращение длины трещины δl уменьшает потенциальную энергию системы Π на определенную величину $\delta \Pi$. Для идеально упругого тела скорость изменения потенциальной энергии $\delta \Pi / \delta l$ эквивалентна «трещиноподвижной силе» Ирвина, G . Аналогичную величину можно ввести и для нелинейно упругого тела.

Она обозначается как J и известна как не зависящий от пути интеграл Черепанова–Райса. Обобщим изложенные формулировки следующим образом:

$$-\frac{\delta \Pi}{\delta l} = -\frac{\partial}{\partial l} \left[\int_V U dV - \int_{S_r} T_i^n u_i dS - \int_V F_i u_i dV \right] = \begin{cases} G, \text{ линейно упругое тело,} \\ J, \text{ линейно неупругое тело.} \end{cases} \quad (11)$$

Большое число экспериментальных данных указывает на то, что концепция J -интеграла, первоначально развитая для нелинейно упругих твердых тел, также применима и к неупругим телам и может использоваться для описания пластичности материалов в процессе деформации, приводящей к их разрушению. Существующие стандарты ASTM (American Society for Testing and Materials) предусматривают экспериментальное определение как J -интеграла, так и его критического значения J_c (или J_{Ic}). Таким образом, наиболее общепринятым и современным способом представления критерия разрушения является его запись в виде J -интеграла:

$$J(\sigma, a, \text{ геометрия}) = J_{Ic}. \quad (12)$$

Параметры в левой части выражения (12) также определяются из анализа напряжений, а константа в его правой части находится из эксперимента.

Чтобы проиллюстрировать приложения энергетического подхода к прогнозированию разрушения, кратко опишем три важных эксперимента, в которых используются различные схемы нагружения, но которые имеют одну общую черту: применение критерия энергетического баланса к предсказанию разрушения. В эксперименте Дж. Обреимова [3] использовался образец кристалла слюды в виде двойной консольной балки (рис. 2) и измерялась энергия разрушения при скалывании тонких пластин слюды вдоль плоскостей с наименьшей когезионной прочностью, так называемых «плоскостей наименьшего сопротивления». Восстановим ход рассуждений Дж. Обреимова. Для каждой консольной балки, на которую действует сосредоточенная сила P , упругую энергию, накопленную в балке, можно найти с помощью известного выражения:

$$U = \int_0^a \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (13)$$

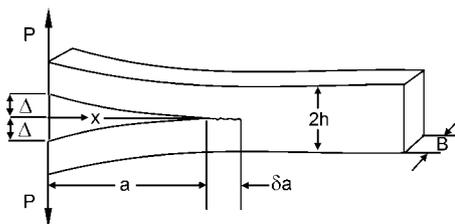


Рис. 2. Двойная балка, использовавшаяся в экспериментах Дж. Обреимова по расщеплению кристалла слюды

Здесь вторая производная от изгиба балки $y = y(x)$ представляет собой кривизну изогнутой балки. Ее можно оценить как отношение изгибающего момента $M(x)$, действующего вдоль балки, к ее изгибной жесткости EI :

$$y'' = M(x)/(EI). \quad (14)$$

Поскольку $M(x) = Px$, кривизна запишется в виде: $y'' = Px/(EI)$. Подставляя данное выражение в выражение (13), получаем, что энергия деформации при изгибе балки равна

$$U = \frac{P^2}{2EI} \int_0^a x^2 dx = \frac{P^2 a^3}{6EI}. \quad (15)$$

Чтобы вычислить изгиб Δ левого конца балки, применим принцип Кастильяно:

$$\Delta = \partial U / \partial P = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 a^3}{6EI} \right) = \frac{Pa^3}{3EI}. \quad (16)$$

Теперь можно оценить все три величины, входящие в критерий энергетического баланса (1), δW_{ext} , δU и δSE . Работа внешних сил равна произведению силы на смещение точки, к которой приложена эта сила. Поскольку в данной схеме нагружения используется двойная балка, то работа определяется как

$$W_{ext} = 2\Delta P = \frac{2P^2 a^3}{3EI}. \quad (17)$$

Следовательно, вариация работы равна

$$\delta W_{ext} = \left(\frac{2P^2 a^2}{EI} \right) \delta a. \quad (18)$$

Полную энергию деформации рассматриваемой системы получим, удвоив результат (15):

$$U_{syst} = \frac{P^2 a^3}{3EI}, \quad (19)$$

а значит, приращение энергии деформации запишется в виде:

$$\delta U_{syst} = \frac{P^2 a^2}{EI} \delta a. \quad (20)$$

Наконец, поверхностную энергию запишем как $\delta SE = G_f \delta a$ и, подставляя выражения для δW_{ext} , δU_{syst} и δSE в (1), получаем:

$$\left(\frac{2P^2 a^2}{EI} \right) \delta a = \left(\frac{P^2 a^2}{EI} \right) \delta a + G_f \delta a, \quad (21)$$

или

$$\frac{P^2 a^2}{EI} = G_f. \quad (22)$$

Дж. Обреимов использовал выражение (21) для определения энергии разрушения G_f . Для этого он измерял полудлину трещины a и величину силы P в момент начала разрушения, а модуль упругости E и момент инерции используемой балки $I = (1/12)Bh^3$ были известны.

Из соотношения (22) можно также выразить критическую нагрузку

$$P_{cr} = \frac{\sqrt{EIG_f}}{a}, \quad I = \frac{1}{12}Bh^3 \quad (23)$$

аналогично способу, который использовал Гриффитс. Чтобы проиллюстрировать выражение (22), используем следующие параметры:

$$B = 1.5'', \quad h = 0.75'', \quad a = 4'', \quad (24)$$

$$E = 3 \cdot 10^3 \text{ psi}, \quad G = 0.2 \text{ lb} \cdot \text{in}/\text{in}^2.$$

Оценив момент инерции $I = 1/2(1.5)(0.75)^3 = 0.05273 \text{ in}^4$ и подставив его в (23), получаем оценку критической нагрузки

$$P_{cr} = \frac{1}{4} [3 \cdot 10^3 (0.05273)(0.2)]^{1/2} = 1.41 \text{ lb}, \quad (25)$$

которая имеет тот же порядок величины, что и значение, полученное в вышеописанном эксперименте. Это особенно важно для понимания работы когезии и адгезии. Чтобы объяснить процесс образования связей, между двумя балками необходимо добавить слой жидкого масла, как показано на рис. 3. Этот эксперимент был задуман и осуществлен в работе [4]. Используя капиллярные свойства тонкой масляной пленки, помещенной между двумя стеклянными пластинами, эти пластины разводились на определенное расстояние $2y_0$ посредством внедрения между ними клина, при этом левая граница масляной пленки сдвигалась вправо на расстояние δl . Это эквивалентно распространению трещины, которая имела исходную длину l , на расстояние δl . Таким образом, схема данного эксперимента была очень похожа на эксперимент Обреимова, за исключением того что двойная балка, состоящая из двух стеклянных пластин, расщеплялась в данном случае посредством приложения фиксированного смещения $2y_0$, а не фиксированной силы P . Цель эксперимента состояла в том, чтобы подтвердить справедливость уравнения Гриффитса путем записи соответствующего критерия энергетического баланса и определения с его помощью момента начала отделения пластин друг от друга. Дополнительное преимущество данного эксперимента по сравнению с оригинальными экспериментами Гриффитса, в которых использовались находящиеся под давлением стеклянные цилиндры, состояло в том, что поверхностную энергию жидкости, такой как масло, можно легко измерить с высокой точностью. В экспериментах же Гриффитса требовалось расплавить стекло, измерить его поверхностное натяжение в жидком состоянии, а затем экстраполировать полученные данные до комнатной температуры. Так как в эксперименте [4] нагружение системы происходит в условиях «неподвижных захватов», т.е. смещение $y = y_0 = \text{const}$ для клина определенного размера, то из уравнения энергетического баланса следует, что приращение работы внешних сил равно нулю, а две другие входящие в него величины определяются следующим образом:

$$\delta U = \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{Et^3 y_0^2}{4l^3} \right] \delta l, \quad \delta SE = 2\gamma \delta l. \quad (26)$$

Если эти две величины равны друг другу, как того требует соотношение (1), т.е.

$$-\delta U = \delta SE, \quad (27)$$

то приращение длины δl сокращается и из получающегося в результате равенства можно найти поверхностное натяжение γ :

$$\gamma = 3Et^3 y_0^2 / 8l^4. \quad (28)$$

Формула (27) подразумевает, что изгиб y_0 каждой нагружаемой кромки стеклянной пластины при внедрении клина должен линейно зависеть от l^2 . Эксперименты подтвердили это заключение, график зависимости y_0 от l^2 представлял собой прямую линию. Согласно [4], угловой коэффициент этой прямой составлял

$$(1.12 \pm 0.05) \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}. \quad (29)$$

С учетом того что модуль Юнга стеклянных пластин $E = (7.2 \pm 0.1) \cdot 10^{10} \text{ Па}$, а их толщина $t = 0.215 \pm 0.002 \text{ см}$, поверхностное натяжение, определенное из уравнения (27), записанного в соответствии с уравнением энергетического баланса Гриффитса, было равно $\gamma = (34 \pm 4) \times 10^{-3} \text{ Н/м}$. Независимое измерение поверхностного натяжения масла, используемого в данном эксперименте, дало результат: $\gamma_{oil} = (31.3 \pm 1.4) \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$. Принимая во внимание, что в процессе измерений, проведенных в рамках эксперимента, было много неучтенных погрешностей, совпадение результатов очень хорошее. Поэтому данный эксперимент не только подтвердил концепцию критерия энергетического баланса Гриффитса как средства для прогнозирования начала разрушения, но и пролил свет на основы процесса образования связей при помещении тонкой жидкой пленки между двумя подложками.

Схема третьего эксперимента, полезного для изучения адгезии и образования связей на границе раздела, показана на рис. 4. Идея этого эксперимента была выдвинута Г.И. Баренблаттом [5] и была позднее реализована М. Внуком и С. Болином [6]. Гибкая мембрана (рассматриваемая как упругая пластина) закреплялась на толстой подложке посредством адгезива, при этом круговая область мембраны радиусом a оставалась не связанной с подложкой. В центре этой области в подложке

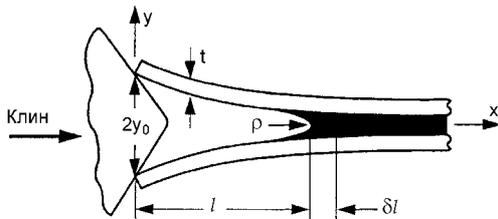


Рис. 3. Две стеклянные пластины с тонкой масляной пленкой, разделяемые внедрением клина, обеспечивающего открытие устья трещины на величину $2y_0$ [4]

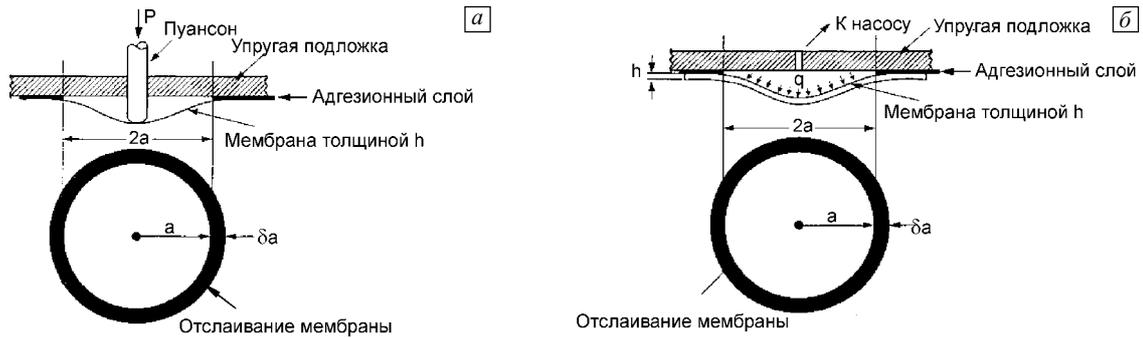


Рис. 4. Схема эксперимента для измерения удельной работы адгезии путем отслаивания тонкой мембраны от подложки (толстая пластина): отслаивание мембраны на величину δa под действием критического значения силы P (а); использование гидростатического давления q для более равномерного нагружения (б)

было проделано отверстие, сквозь которое был вставлен пуансон, оказывающий давление P на мембрану (рис. 4, а). При определенной приложенной осевой нагрузке P_{cr} происходило отслоение мембраны от подложки. Рассмотрим бесконечно малое увеличение радиуса области отслоения от a до $a + \delta a$ и найдем величины, входящие в критерий разрушения Гриффитса. В условиях контролируемой нагрузки работу внешних сил можно вычислить как произведение нагрузки на смещение в направлении действия нагрузки:

$$W_{ext} = P w_{max}, \quad (30)$$

а энергия деформации для упругой системы равна

$$U = 1/2 P w_{max}. \quad (31)$$

Согласно теории пластин и оболочек, изгиб центра круглой пластины с закрепленным краем, нагружаемой посредством вертикально приложенной силы, записывается как

$$w_{max} = \frac{P a^2}{16\pi D}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu)}. \quad (32)$$

Отметим, что жесткость пластины D зависит от ее толщины h и двух характеристик материала пластины: модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν . При отслоении мембраны радиус a служит мерой текущего размера круговой трещины и начало процесса отслоения можно предсказать посредством вычисления вариаций:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{P^2 a^2}{16\pi D} \right] \delta a, \\ \delta U &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{P^2 a^2}{32\pi D} \right] \delta a, \\ \delta SE &= 2\gamma(2\pi a \delta a). \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя данные величины в уравнение энергетического критерия разрушения, получаем:

$$\left(\frac{P^2 a}{16\pi D} \right) \delta a = (4\pi a \gamma) \delta a. \quad (34)$$

Следовательно, критическую нагрузку, необходимую для начала процесса отслоения, можно записать в сле-

дующем виде:

$$P_{cr} = \begin{cases} 8\pi\sqrt{D\gamma}, \text{ или} \\ 4\pi\sqrt{\frac{Eh^3\gamma}{1-\nu}}. \end{cases} \quad (35)$$

Также можно определить удельную энергию связи G_b . Напомним, что G_b — это критическая величина «трещинодвижущей силы» G , которая зависит от энергии деформации U и площади области разрушения следующим образом:

$$G = \frac{\delta U}{\delta A} = \frac{P^2 a \delta a / (16\pi D)}{2\pi a \delta a} = \frac{P^2}{32\pi^2 D}. \quad (36)$$

При $P \rightarrow P_{cr}$ величина G стремится к критическому значению G^{cr} , в данном случае интерпретируемому как удельная энергия связи. Таким образом, имеем:

$$G_b = \frac{P_{cr}^2}{32\pi^2 D} = \frac{3(1-\nu)P_{cr}^2}{8\pi^2 E h^3}. \quad (37)$$

Легко видеть, что размерность величины G_b составляет Дж/м² и формулу (37) можно получить из соотношения (34) путем замены 2γ на G_b .

Теперь с помощью приведенных выше соотношений вычислим величину G_b , которая характеризует прочность связи. Полимерная пленка, использовавшаяся в качестве мембраны в данном эксперименте, имела следующие параметры:

$$\begin{aligned} a &= 0.1 \text{ м}, \quad h = 0.01 \text{ м}, \\ E &= 10 \text{ ГПа}, \quad \nu = 1/3. \end{aligned} \quad (38)$$

При этом критическая нагрузка, измеренная в момент начала отслоения, составляла 18.8 кН. Используя (32), находим жесткость мембраны

$$D = \frac{(10 \cdot 10^9)(0.01)^3}{12(1-1/3)} = 1.250 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (39)$$

Подставляя это значение в (37), получаем

$$G_b = \frac{(18.8 \cdot 10^3 \text{ Н})^2}{(32\pi^2)(1.250 \text{ Н} \cdot \text{м})} = 900 \text{ Дж/м}^2. \quad (40)$$

Половина этой величины равна поверхностному натяжению связующей пленки, т.е. $\gamma = 450$ Дж/м². Теперь мы можем оценить вязкость разрушения адгезивной пленки. Учитывая, что

$$K_{Ic} = \sqrt{\frac{EG_b}{1-\nu^2}}, \quad (41)$$

находим величину

$$K_{Ic}^a = \left[\frac{(10 \cdot 10^9)(900)}{1-(1/3)^2} \right]^{1/2} = 3.18 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, \quad (42)$$

которая эквивалентна вязкости разрушения.

Весьма близкий результат был получен в похожем эксперименте, где при нагружении вместо пуансона, использовалось гидростатическое давление. Данная схема эксперимента, изображенная на рис. 4, б, была предложена в работе [6]. Для записи критерия энергетического баланса использовалось вертикальное смещение $w(r)$ круглой пластины с закрепленной кромкой, которая подвергалась однородному давлению q , действующему нормально к ее поверхности (ср. с [7]):

$$w(r) = \frac{a^2 q}{16D} \left[\frac{5+3\nu}{2(1+\nu)} (a^2 - r^2) + (a^2 + 2r^2) \ln\left(\frac{r}{a}\right) \right]. \quad (43)$$

Работа, совершенная силой q по всей площади пластины, определяется интегралом

$$W_{\text{ext}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a q w(r) r dr = \frac{5-\nu}{1+\nu} \frac{\pi a^6 q^2}{128D}. \quad (44)$$

Поскольку для упругой системы энергия деформации равна $U = 1/2 W_{\text{ext}}$, условие $\delta U = \delta SE$, которое определяет момент начала разрушения, запишется в виде:

$$\delta \left[\frac{5-\nu}{1+\nu} \frac{\pi a^6 q^2}{256D} \right] = (4\pi a \gamma) \delta a. \quad (45)$$

Из (45) находим поверхностное натяжение

$$\gamma = \frac{3}{4} \frac{5-\nu}{1+\nu} \left[\frac{a^4 q^2}{128D} \right]_{q=q_{\text{cr}}}. \quad (46)$$

С учетом среднего значения критического давления в данном эксперименте 530 кПа и параметров мембраны, аналогичных предыдущему эксперименту (см. (38)), получаем $\gamma \cong 461$ Дж/м². Удвоив данную величину, находим, что удельная энергия разрушения по границе раздела «адгезивная пленка – мембрана» составляет $G_b = 922$ Дж/м².

Это значение примерно на 2.4 % отличается от результата, полученного в описанном выше эксперименте с пуансоном. Результат эксперимента с использованием гидростатического давления представляется более достоверным, чем величина, полученная с применением силы, приложенной в центре мембраны.

3. Когезионные модели квазистатической трещины

Когезионная модель трещины была предложена как способ решения проблемы сингулярного и осциллирую-

щего характера полей напряжений вблизи вершины трещины, которая возникает при расчетах в рамках линейной механики разрушения в случае неупругих материалов, а особенно при разрушении по границе раздела. Этот подход был предложен Д. Дагдейлом [8] и независимо от него Г.И. Баренблаттом [9], а также Б. Билби, А. Котреллом и К. Свинденом [10]. Важная особенность данных моделей состоит в том, что в них силы когезии в явном виде включаются в число внешних сил, приложенных к поверхности трещины. Чтобы аккомодировать эти силы, трещина удлиняется на определенную длину, скажем, R , с обоих концов (рис. 5). Внешняя нагрузка, действующая на продолженную трещину и выраженная в виде давления $p(x)$, определяется следующим образом:

1) $p(x) = \sigma$ в пределах физически наблюдаемой трещины, $|x| \leq c$,

2) $p(x) = \sigma - S(x)$ в области, ограниченной размерами нелинейной зоны в вершинах продолженной трещины, $c < x < a$, где параметр a равен сумме длины исходной трещины c и длины зоны когезии R ($a = c + R$). При добавлении к данному распределению $p(x)$ постоянного растягивающего напряжения $p(x) = -\sigma$ имеем свободную от напряжений трещину и пластическую зону, в которой действуют неоднородные напряжения $S(x)$, обусловленные собственно когезией.

Длина нелинейной зоны выбирается таким образом, что в конце зоны когезии, $x = a$, исчезает сингулярность напряжений и напряжение раскрытия трещины становится конечным, $S(a) = \sigma_0$, где постоянная σ_0 — это начальное напряжение. Наиболее простой вид распределения напряжений в нелинейной зоне был предложен Д. Дагдейлом, который полагал, что напряжение $S(x)$ постоянно во всей зоне когезии (рис. 6, а). В модели Кнаусса [11] напряжение S линейно уменьшается от σ_0 до нуля на отрезке длиной R (рис. 6, б). Наконец,

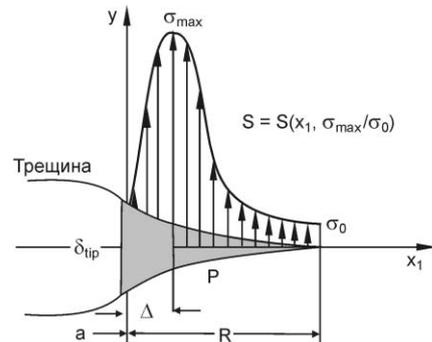


Рис. 5. Когезионная модель с учетом релаксации когезионного напряжения от σ_{max} до нуля. Отметим, что пик S -распределения примерно совпадает с внешним краем зоны процесса P , т.е. $x_1 = \Delta$, а граница всей зоны когезии определяется как $x_1 = R$. Величина R выбирается таким образом, чтобы поле напряжений для продолженной трещины, имеющей полудлину $a + R$ не имело сингулярности. Два соседних состояния соответствуют длинам трещины a и $a + \delta a$ соответственно

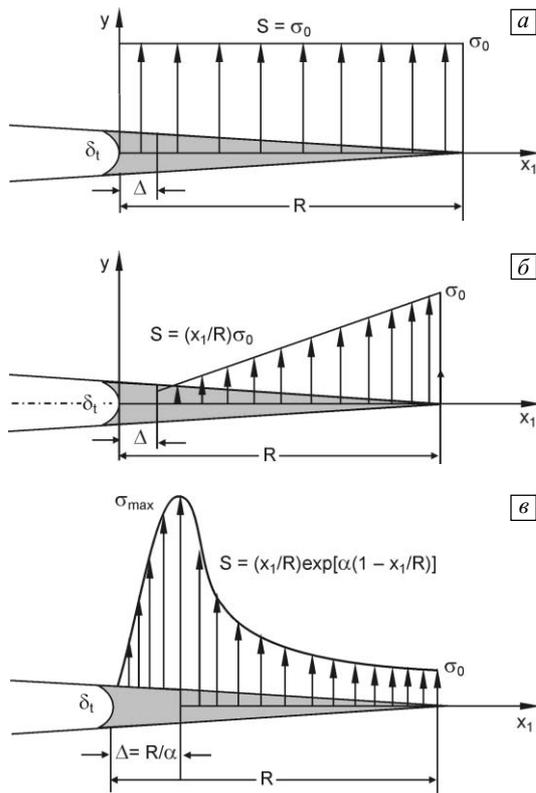


Рис. 6. Распределение напряжений в зоне разделения в различных когезионных моделях трещины: *a* — модель Дагдейла; *b* — модель Кнаусса; *c* — модель Внука. Символ Δ используется для обозначения зоны процесса

М. Внук [12] предложил распределение напряжения S в виде произведения линейной и экспоненциальной функций (рис. 6, *c*):

$$S(x_1) = \sigma_0 \frac{x_1}{R} \exp\left[\alpha \left(1 - \frac{x_1}{R}\right)\right]. \quad (47)$$

Здесь σ_0 и α — прочностные характеристики зоны когезии, символ x_1 используется для обозначения расстояния от любой точки на поверхности продолженной трещины до вершины физической трещины, так что $x_1 = x - c$ (рис. 5). Легко видеть, что при $\alpha = 0$ функция распределения S -напряжения в модели Внука сводится к функции Кнаусса

$$S(x_1) = \frac{x_1}{R} \sigma_0, \quad (48)$$

в то же время, как будет показано далее, при $\alpha = 2.007$ модель Внука дает результаты, согласующиеся с оценкой Дагдейла при условии, что R является функцией σ .

Чтобы установить связь между R и σ , нужно выразить параметр K_I из исходного уравнения, а затем приравнять его к нулю. Эта процедура позволит исключить сингулярный член из поля напряжений вблизи вершины трещины. Используя p -распределение для продолженной трещины

$$p(x) = \begin{cases} \sigma, & 0 < x < c, \\ \sigma - S(x), & c < x < a, \end{cases} \quad (49)$$

записываем интеграл из исходного уравнения для параметра K_I в следующем виде:

$$\int_0^c \frac{\sigma dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \int_c^a \frac{\sigma - S(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 0. \quad (50)$$

Выражение (50) также известно как условие конечности, обычно оно записывается как

$$\left[\int_0^c + \int_c^a \right] \frac{\sigma dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_c^a \frac{S(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (51)$$

Левая часть равенства (51) упрощается до $\pi\sigma/2$, а результат вычисления интеграла в правой части данного выражения зависит от конкретного вида распределения напряжений, которое в нашем случае для $c \leq x \leq a$ запишем как $S(x) = \sigma_0 G(x)$. Оставляя пока неопределенной функцию $G(x)$, переписываем соотношение (51) в следующем виде:

$$Q = \int_c^a \frac{G(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad Q = \frac{\pi\sigma}{2\sigma_0}. \quad (52)$$

После замены переменной x на $x_1 = x - c$ получаем

$$Q = \int_0^R \frac{G(x_1) dx_1}{\sqrt{a^2 - (x_1 + c)^2}}. \quad (53)$$

Следующим шагом сделаем переменную x_1 безразмерной, поделив ее на длину $R = a - c$. Введем новую переменную $\lambda = x_1/R$ и обозначение $m = c/a$. С учетом этого переписываем выражение (53) в виде [12]:

$$Q = \int_0^1 \frac{G(\lambda)(1-m)d\lambda}{\sqrt{1 - [(1-m)\lambda + m]^2}}. \quad (54)$$

В некоторых случаях этот интеграл сводится к элементарным функциям. Так, для моделей Дагдейла и Кнаусса, приняв функцию $G(\lambda)$ равной

$$G(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{модель Дагдейла,} \\ \lambda, & \text{модель Кнаусса,} \end{cases} \quad (55)$$

получаем из (54)

$$Q_D = \cos^{-1} m, \quad Q_K = \frac{\sqrt{1-m^2} - m \cos^{-1} m}{1-m} \quad (56)$$

соответственно. Две кривые, построенные в соответствии с уравнениями (56), приведены на рис. 7. Нижняя кривая представляет собой график известной «формулы секущей» Дагдейла.

Для модели Внука имеем

$$Q(m, \alpha) = \int_0^1 \frac{\lambda \exp[\alpha(1-\lambda)](1-m)d\lambda}{\sqrt{1 - [(1-m)\lambda + m]^2}}. \quad (57)$$

Это выражение имеет слишком сложный вид, чтобы вычислить его аналитически. Однако для случая, когда размер зоны когезии мал по сравнению с длиной трещины

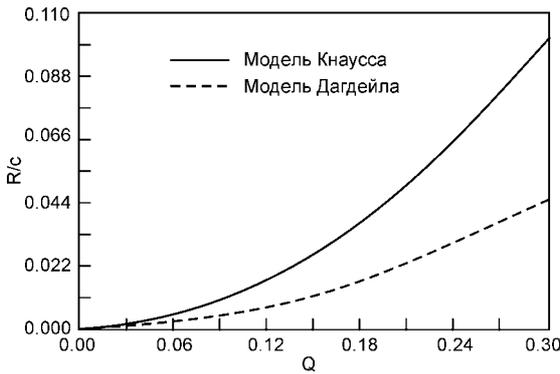


Рис. 7. Зависимость нормированной длины зоны когезии от безразмерной нагрузки в области маломасштабной текучести

ны, т.е. при $R/c \ll 1$, его можно упростить. С материаловедческой точки зрения данный случай является наиболее важным, иногда его называют условием «маломасштабной текучести», и в дальнейшем мы сосредоточим внимание на этом предельном случае, когда $R/c \rightarrow 0$, или, что эквивалентно, $m \rightarrow 1$.

Все три приведенных выше выражения, описывающие зависимость Q от m (и от α в последнем случае), можно существенно упростить. Если обозначить $1 - m$ как ϵ и разложить выражения (56) и (57) в ряд при $\epsilon \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} Q_D &= \sqrt{2}\sqrt{1-m} + \dots = \sqrt{2R/c} + \dots, \\ Q_K &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-m} + \dots = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{R/c} + \dots, \\ Q(m, \alpha) &= \sqrt{\frac{1-m}{2}} \int_0^1 \frac{\lambda \exp[\alpha(1-\lambda)]}{\sqrt{1-\lambda}} d\lambda = \\ &= \frac{F(\alpha)}{\sqrt{2}}\sqrt{R/c} + \dots \end{aligned} \tag{58}$$

В последнем выражении введена вспомогательная функция

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\lambda \exp[\alpha(1-\lambda)]}{\sqrt{1-\lambda}} d\lambda. \tag{59}$$

Интеграл (59) имеет аналитическое решение, которое записывается в виде довольно громоздкой формулы

$$F(\alpha) = \frac{-2\sqrt{\alpha} \exp \alpha + \sqrt{\pi}(1+2\alpha)\operatorname{erfi}[\sqrt{\alpha}]}{2\alpha^{3/2}}. \tag{60}$$

В выражении (60) $\operatorname{erfi}()$ обозначает функцию мнимой ошибки, определение которой можно найти в таблицах неэлементарных функций, например в [13]. Для того чтобы определить значение функции $F(\alpha)$ для конкретного значения α , нужно либо выполнить численное интегрирование выражения (59), либо подставить α в соотношение (60). График функции $F(\alpha)$ показан на рис. 8.

Теперь все три выражения (58) можно привести к общему виду:

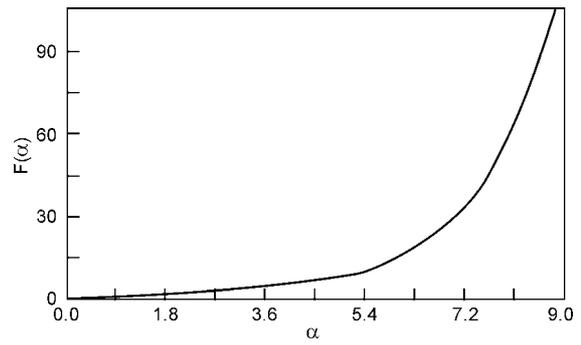


Рис. 8. Вид вспомогательной функции $F(\alpha)$, входящей в уравнение (58), связывающее длину пластической зоны R с параметром нагружения Q . С физической точки зрения функция $F(\alpha)$ обеспечивает теоретическую оценку вязкости разрушения материала

$$R = \beta(\alpha)(K_I/\sigma_0)^2, \tag{61}$$

где

$$\beta(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{модель Ирвина,} \\ \frac{\pi}{8}, & \text{модель Дагдейла,} \\ 9\pi/32, & \text{модель Кнаусса,} \\ \frac{\pi}{2F^2(\alpha)}, & \text{модель Внука.} \end{cases} \tag{62}$$

Для сравнения в (62) включен классический результат Ирвина [14] $R = 1/\pi(K_I/\sigma_0)^2$, который справедлив в области маломасштабной текучести и получен в рамках линейной механики разрушения. Общий вид функции $\beta(\alpha)$, определяемой последним выражением в (62), показан на рис. 9, а на рис. 10 представлены три разных распределения когезионных напряжений, которые получены при использовании модели Внука с тремя различными значениями коэффициента α . Очевидно, что все предыдущие когезионные модели являются частными случаями модели Внука, которая в то же время обеспечивает основу для будущих исследований в области разрушения неупругих твердых тел. Для того чтобы

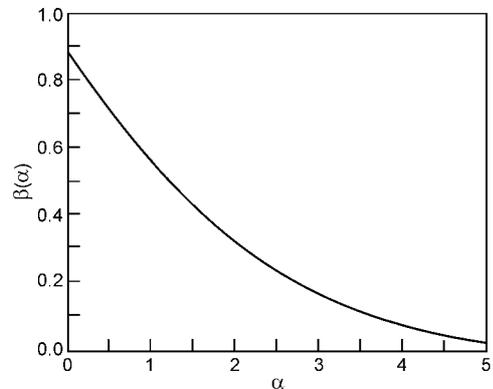


Рис. 9. Коэффициент формы $\beta(\alpha)$, связывающий характерную длину R_c и постоянную материала $(K_{Ic}/\sigma_y)^2$

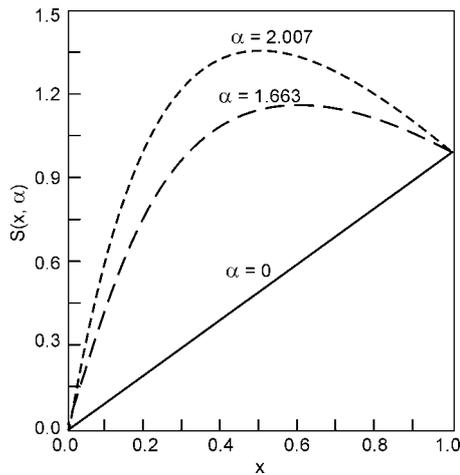


Рис. 10. Распределение когезионных напряжений в соответствии с моделью Внука для трех различных значений α : $\alpha = 0$ (модель Кнаусса), $\alpha = 1.663$ (модель Ирвина) и $\alpha = 2.007$ (модель Дагдейла)

найти значения функции $\beta(\alpha)$, соответствующие моделям Ирвина, Дагдейла и Кнаусса, которые приведены в выражении (62), нужно подобрать правильные значения показателя пластичности α , который входит в уравнение (59):

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \text{модель Кнаусса,} \\ 1.663, & \text{модель Ирвина,} \\ 2.007, & \text{модель Дагдейла.} \end{cases} \quad (63)$$

Теперь рассмотрим ранние стадии разрушения: 1) начало разрушения и 2) квазистатический рост субкритической трещины. Чтобы предсказать начало разрушения, можно использовать любой из полевых параметров, полученных в результате анализа поля напряжений в непосредственной близости от вершины трещины. В нашем распоряжении имеются следующие основные параметры: коэффициент интенсивности напряжений K_I , который также известен как амплитуда поля напряжений вблизи вершины трещины; скорость высвобождения энергии $G_I = \partial U / \partial A$ (A — площадь поверхности разрушения), введенная Ирвином; длина зоны когезии R .

Соотношение, связывающее между собой два первых параметра, хорошо известно, и его можно использовать для записи критерия страгивания трещины в следующем виде:

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} = G_f, \quad (64)$$

$$E' = \begin{cases} E, & \text{плосконапряженное состояние,} \\ E/(1-\nu^2), & \text{плоскодеформированное состояние.} \end{cases}$$

Подставляя энергию разрушения в следующем виде:

$$G_f = \begin{cases} K_c^2/E, \\ (1-\nu^2)K_{Ic}^2/E, \end{cases} \quad (65)$$

получаем, что начало разрушения определяется равенством

$$K_I = \begin{cases} K_c, & \text{плосконапряженное состояние,} \\ K_{Ic}, & \text{плоскодеформированное состояние.} \end{cases} \quad (66)$$

В некоторых случаях можно оценить начало разрушения, приравняв длину зоны когезии R к ее критическому значению R_{\max} , которое равно R_c для плосконапряженного состояния и R_{Ic} для плоскодеформированного состояния. Критическое значение параметра R соответствует полной кривой распределения когезионного напряжения $S_{\max}(x_1)$, которая определяется соотношением (47), и поэтому оно является характеристикой материала, известной как характерная длина микроструктуры

$$R_{\max} = \begin{cases} \beta(\alpha) \frac{EG_f}{\sigma_0^2} = R_c, & \text{плосконапряженное состояние,} \\ \beta(\alpha) \frac{EG_f}{(1-\nu^2)\sigma_0^2} = R_{Ic}, & \text{плоскодеформированное состояние.} \end{cases} \quad (67)$$

Обобщая вышеизложенное, следует сказать, что мы можем использовать любой из трех параметров поля, которые обсуждались в данном параграфе ($K_I(\sigma, c)$, $G_f(\sigma, c)$, $R(\sigma, c)$), если известна какая-либо из следующих величин, характеризующих сопротивление материала разрушению: вязкость разрушения K_c или K_{Ic} , удельная энергия разрушения G_f или критическая длина зоны когезии R_{\max} .

Чтобы проиллюстрировать применение приведенных выше соотношений, оценим с их помощью сопротивление разрушению двух типов полимерных адгезивов Metlbond 1113 и Metlbond 1113-2, изготовленных из эпоксидной смолы в виде твердой пленки, используя экспериментальные результаты, полученные в работе [15]. Модуль Юнга данных адгезивов составляет $E = 1500$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.374$, основное напряжение течения $\sigma_y = 61$ МПа.

В качестве образцов для испытаний авторы [15] использовали пластины с единичным боковым надрезом толщиной $B = 10.16$ мм, которые удовлетворяли критерию ASTM для плоской деформации K_{Ic} ($B \geq 2.5 \times (K_{Ic}/\sigma_0)^2$). Эксперимент на растяжение пластины с единичным надрезом, отношением сторон a/W и предварительной трещиной проведен в соответствии со стандартом ASTM [16] на гидравлической испытательной машине с регистрацией нагрузки и коэффициента раскрытия устья трещины. После подстановки величины критической нагрузки в известное выражение для параметра K_{Ic} , соответствующее конфигурации трещины в пластине с единичным боковым надрезом, было получено следующее соотношение:

$$K_{Ic} = \frac{P_c \sqrt{a}}{BW} \left[1.99 - 0.41 \left(\frac{a}{W} \right) + 18.7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 - \right]$$

$$-38.48 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 53.85 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \Big]. \quad (68)$$

Осреднение по результатам ряда испытаний адгезива Metlbond 1113 при оптимальных значениях температуры и времени отверждения дает

$$K_{Ic} = 3.5 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, \quad (69)$$

что соответствует эквивалентной удельной энергии разрушения

$$G_f = \frac{K_{Ic}^2 (1 - \nu^2)}{E} \cong 7 \text{ кДж/м}^2. \quad (70)$$

Для оценки размера зоны когезии использовалась модель Ирвина. Поскольку выполнялось условие плоской деформации, то начальное напряжение σ_0 было равно произведению коэффициента стеснения $\sqrt{3}$ на одноосное напряжение течения σ_y , т.е.

$$R_{\max} = (1/6\pi)(K_{Ic}/\sigma_y)^2. \quad (71)$$

После подстановки значений K_{Ic} и σ_y в (71) получаем $R_{\max} = 0.175$ мм. Отметим, что оптимальная величина вязкости разрушения адгезива в приклеенном состоянии была очень близка к объемному значению K_{Ic} . Эта оптимальная величина наблюдалась у слоя адгезива толщиной около 0.2 мм, что приблизительно равно R_{\max} . Таким образом, параметр длины c является ключевой характеристикой для технологий соединения материалов.

Чтобы количественно описать субкритический рост начальной трещины, необходимо исследовать движение квазистатической трещины и связанное с этим явление перераспределения напряжений, а также временную эволюцию профиля трещины в пределах R -зоны (если используется когезионная модель) [17]. Вычисление интеграла Снеддона, описывающего раскрытие трещины в плоскости $y = 0$:

$$\left[u_y(x, y) \right]_{y=0} = \frac{4a}{\pi E'} \int_x^1 \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \int_0^t \frac{p(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}} \quad (72)^1$$

и использование внешней нагрузки в виде (49) приводит к следующим выражениям, описывающим профиль трещины:

$$u_y^D(x, 0) = \frac{4\sigma_0 R_D}{\pi E'} \left\{ \sqrt{1-\lambda} - \frac{\lambda}{2} \ln \left[\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{1-\sqrt{1-\lambda}} \right] \right\},$$

$$u_y^K(x, 0) = \frac{4\sigma_0 R_K}{\pi E'} \times$$

$$\times \left\{ \sqrt{1-s} \left(1 - \frac{s}{2} \right) - \frac{s^2}{4} \ln \left[\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}} \right] \right\}. \quad (73)$$

Здесь R_D и R_K — длины зоны когезии при маломасштабной текучести в модели Дагдейла и Кнауэса соот-

ветственно. Безразмерные переменные λ и s определяются следующим образом:

$$\lambda = x_1/R_D, \quad s = x_1/R_K. \quad (74)$$

В работе [18] модель Дагдейла адаптирована для решения задачи о движущейся трещине. Записав критерий конечного растяжения для продолжающегося роста трещины в виде:

$$\left[\delta u_y \right]_{a \rightarrow a+\delta a} = \left[u_y^{(2)} - u_y^{(1)} \right]_P = \hat{\delta}/2, \quad (75)$$

получено основное уравнение для квазистатической трещины, в котором c и R являются функциями времени. Перемещения $u_y^{(2)}$ и $u_y^{(1)}$ вычисляются на внешнем крае зоны процесса, $x_1 = \Delta$, для двух последовательных стадий движения трещины (рис. 5). Величина $\hat{\delta}$ в правой части равенства (75) представляет собой итоговое растяжение, константу материала, которую можно связать с так называемым «модулем раскрытия» M , используемым для количественного описания стадии субкритического роста трещины. Комбинируя соотношения (73) и (75), получим дифференциальное уравнение, определяющее зависимость длины нелинейной зоны от времени $R = R(c)$, т.е.

$$\frac{dR}{dc} = M - \frac{R}{\Delta} + \sqrt{\frac{R}{\Delta} \left(\frac{R}{\Delta} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\frac{R}{\Delta}} - \sqrt{\frac{R}{\Delta} - 1}}{\sqrt{\frac{R}{\Delta}} + \sqrt{\frac{R}{\Delta} - 1}}. \quad (76)$$

В упрощенной форме, справедливой при $R/\Delta \gg 1$, это уравнение сводится к известному уравнению Внука–Райса–Соренсена, описывающему универсальную зависимость R от c (так называемую R -кривую):

$$\frac{dR}{dc} = M - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4R}{\Delta} \right). \quad (77)$$

На рис. 11 приведены два профиля, определяемые уравнениями (73). График, представленный на рис. 11, б построен в нормированных координатах $x = x_1/R_D$ для нижней кривой и $x = x_1/R_K$ для верхней кривой. По оси ординат отложены безразмерные функции, входящие в уравнения (73). Для того чтобы имел место субкритический рост трещины, постоянная M , которая является характеристикой материала, должна удовлетворять следующему соотношению:

$$M > 1/2 (1 + \ln(4R_{ini}/\Delta)). \quad (78)$$

Только при выполнении данного условия R -кривая будет изначально иметь положительный наклон $((dR/dc)_{ini} > 0$, рис. 12) и трещина начнет распространяться при определенном значении параметра микроструктуры R_{ini} , которое меньше критической величины R_{\max} . Поэтому такой рост трещины и называется субкритическим.

Для каждой универсальной R -кривой, рассматриваемой здесь как характерный признак материала и охватывающей диапазон от момента инициирования трещины

¹ Все входящие в интегралы (72) переменные, за исключением p , являются безразмерными и нормированными на длину a .

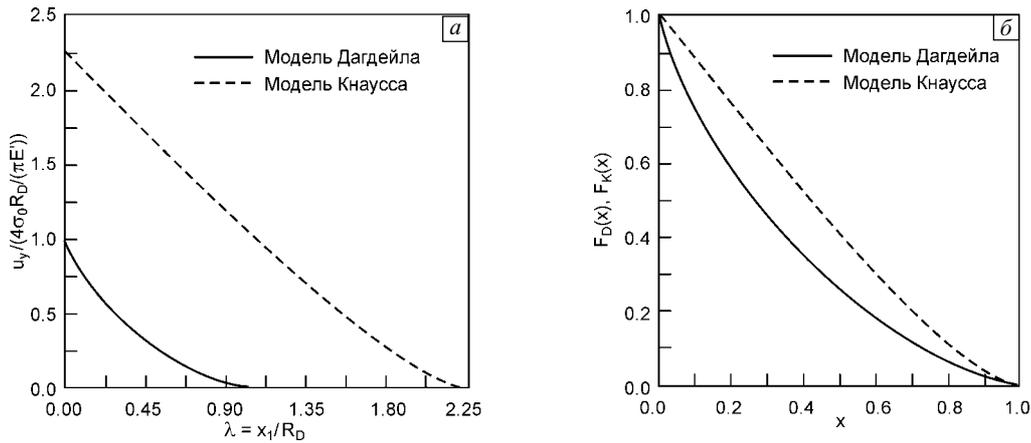


Рис. 11. Сравнение двух профилей, определяемых соотношениями (73): профили продолженной трещины в пределах зоны когезии (а); профили зон когезии, рассчитанные в соответствии с моделями Дагдейла и Кнаусса (б)

R_{ini} до стадии ее устойчивого роста R_{ss} , существует кратное число Q -кривых, каждая из которых зависит от геометрии и начальных условий. Типичная Q -кривая показана на рис. 13. Эта кривая подтверждает, что между точками Q_{ini} и Q_f внешняя нагрузка и длина трещины остаются в равновесии. Однако со временем равновесие нарушается и в точке максимальной нагрузки $c = c_f$ ($Q = Q_f$) имеет место итоговая неустойчивость. Достижение точки (a_f, Q_f) равносильно исчерпанию всех защитных механизмов, которые способны активировать неупругое твердое тело в процессе деформации, предшествующем разрушению и связанном с диссипацией существенного количества энергии в зонах когезии. В момент прекращения устойчивого роста трещины начинается необратимое катастрофическое разрушение материала, которое является хрупким по своей природе.

Начальную точку Q -кривой Q_{ini} можно легко найти для трещины любой заданной конфигурации, если известны пороговое значение R_{ini} и начальная длина тре-

щины c_0 . Для трещины Гриффитса имеем

$$Q_{ini} = \sqrt{\frac{2R_{ini}}{c_0}}. \tag{79}$$

Эта формула справедлива для широкой пластины, содержащей малую начальную трещину, в условиях нагружения по типу нормального отрыва. Напомним, что размер R -зоны всегда меньше, чем размер трещины, т.е. $R/c_0 \ll 1$. Конечную точку Q_f и соответствующее значение c_f , при котором прекращается устойчивый рост трещины, определяемый Q -кривыми, найти не так легко. Для его определения нужно использовать численные методы, которые позволяют установить местоположение начальной и конечной точек для семейства Q -кривых, соединяющих нижнее и верхнее геометрические места точек зависимости нагрузки от критической длины трещины (одно геометрическое место точек для начала разрушения, а другое — для итоговой неустойчивости). В работе [18] предложен тщательно разработанный метод количественной оценки неустойчивостей,

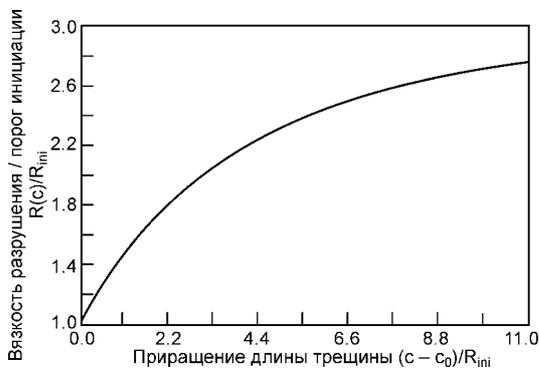


Рис. 12. Универсальная R -кривая, которая количественно описывающая медленный устойчивый рост трещины в условиях маломасштабной текучести. Коэффициент $R_{max}/R_{ini} = 3$

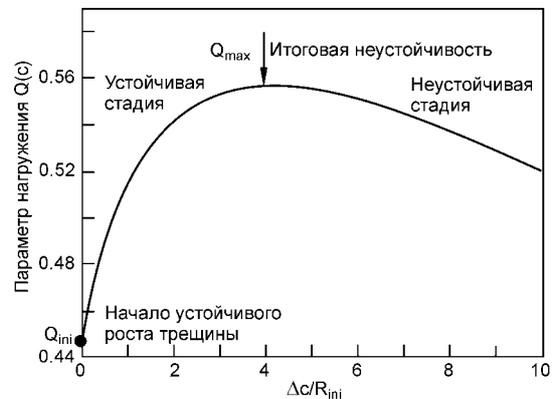


Рис. 13. Q -кривая для $R_{max}/R_{ini} = 3, c_0 = 10R_{ini}, K_I = (\pi c)^{1/2} \sigma$

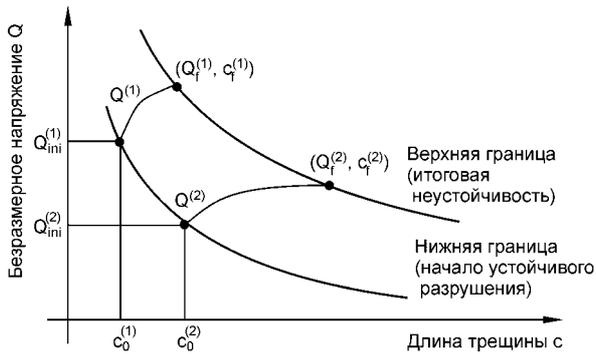


Рис. 14. Q -кривые, построенные для трещин различной начальной длины. Видно, что период устойчивого роста $c_f - c_0$ больше для более длинной трещины

возникающих на завершающем этапе процесса роста квазистатической трещины. Во всех случаях, когда катастрофическому разрушению предшествует стадия медленного субкритического роста трещины, для корректного вычисления параметров, соответствующих итоговой неустойчивости, необходима методология, развитая в рамках данной модели.

Как видно из рис. 14, две типичных кривых $Q(c)$, построенные для двух трещин различной начальной длины, расположены между нижней и верхней границами, которые определяются графиками зависимости критического напряжения от критической длины трещины. Нижняя граница, обозначающая начало разрушения, представляет собой геометрическое место точек, полученное с помощью модели Гриффитса, в которой вместо энергии разрушения $2\gamma = G_f$ используется энергия страгивания трещины G_{ini} (ее величина несколько меньше, чем G_f), которая связана с R_{ini} следующим образом:

$$G_{ini} = \frac{8}{\pi} R_{ini} \left(\frac{\sigma_0^2}{E'} \right). \quad (80)$$

Таким образом, нижняя граница в точности похожа на одну из кривых Гриффитса, описывающих зависимость критического напряжения от критической длины трещины. Определение верхней границы производится с помощью интегрирования основных дифференциальных уравнений, которые определяют вид R - и Q -кривых. Примеры таких численных методов, применимых для различных конфигураций трещин и схем нагружения, приведены в работе [18]. Физические основы явления перехода от устойчивого роста трещины к неустойчивому достаточно подробно рассмотрены в работах [19, 20].

Замечательный обзор литературы по данной теме можно найти в книге К. Броберга [21] и в работах признанных специалистов в этой области, таких как Дж. Ноулз и Э. Стернберг [22], М. Вильямс [23], А. Инглэнд [24], Дж. Райс и Дж. Си [25], М. Комниноу [26, 27], Ф. Вон и Р. Шилд [28], В.М. Малышев и Р.Л. Салганик [29]. Более

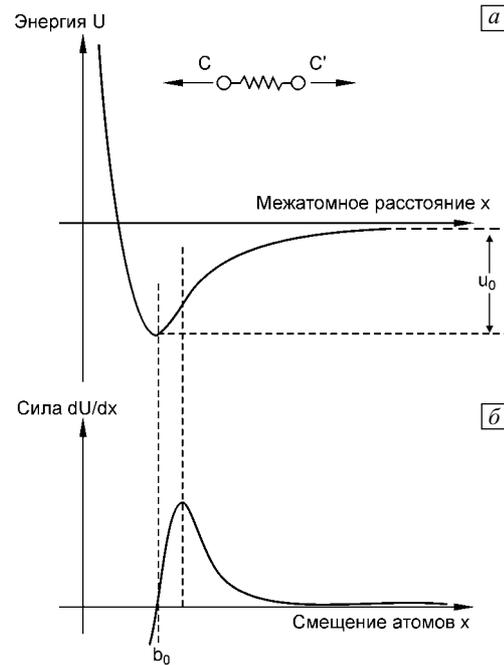


Рис. 15. Изменение энергии связи с увеличением межатомного расстояния (а), зависимость силы от смещения атомов (б)

поздние экспериментальные данные о распределениях сил когезии, связанных с адгезией и разрушением по границе раздела, получены Дж. Хатчинсоном с соавторами [30, 31].

Понимание природы межмолекулярных сил может помочь оценить, насколько важна для структурной целостности стыковых соединений коррозия, возникающая под действием напряжений.

4. Природа межмолекулярных сил

Истинная природа химической связи все еще остается в значительной степени неизвестной. Несколько фундаментальных исследований в этой сложной области физической химии и физики поверхности [32–35] лишь едва затронули этот вопрос. Стоит отметить, однако, что экспериментальные данные [36], по всей видимости, подтверждают некоторые теоретические расчеты.

Обсудим кратко математические соотношения, лежащие в основе молекулярных сил и описывающие их связь с поверхностным натяжением γ (или удельной энергией разрушения $G_f = 1/2\gamma$), не касаясь подробно их химической природы. Рисунок 15 служит иллюстрацией понятия межатомной связи через зависимости потенциала U и градиента потенциала dU/dx от расстояния между соседними атомами x . Как видно из данного рисунка, в равновесном положении $x = b_0$ сила взаимодействия между двумя атомами равна нулю. При $x < b_0$ сила взаимодействия отрицательна (т.е. имеет место отталкивание атомов), а при $x > b_0$ она положи-

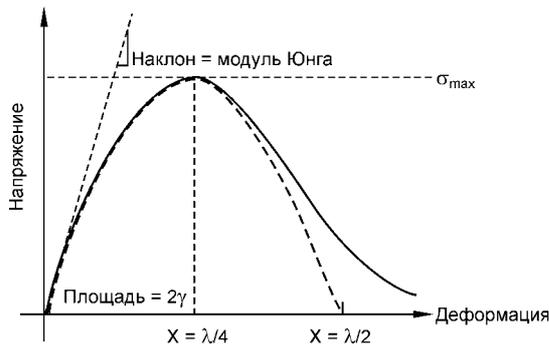


Рис. 16. Атомистическая кривая «напряжение – деформация»

тельна (притяжение) и сначала быстро возрастает до максимального значения S_{\max} , а затем при $x \rightarrow \infty$ падает до нуля.

Как показано на рис. 16, эту силу можно преобразовать в напряжение, при этом хорошей аппроксимацией для зависимости данного напряжения от межатомного расстояния (степени деформации) может служить синусоидальная функция с пока неопределенной длиной волны λ :

$$\sigma(x) = \sigma_{\max} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (81)$$

Площадь под графиком функции $\sigma(x)$ представляет собой удельную работу разрушения (или работу адгезии)

$$\begin{aligned} G_f &= 2\gamma = \int_0^\infty \sigma(x) dx \cong \\ &\cong \int_0^{\lambda/2} \sigma_{\max} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda \sigma_{\max}}{\pi}. \end{aligned} \quad (82)$$

Из соотношения (82) молекулярную прочность σ_{\max} можно выразить через поверхностную энергию и длину волны как

$$\sigma_{\max} = \frac{2\pi}{\lambda} \gamma. \quad (83)$$

Теперь исключим из рассмотрения молекулярный параметр λ . При малом x имеем $\sin x \sim x$ и напряжение σ подчиняется закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{x}{b_0}. \quad (84)$$

Комбинируя выражения (81) и (84), получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{\lambda E}{2\pi b_0}, \text{ или } \lambda = \frac{2\pi b_0}{E} \sigma_{\max}. \quad (85)$$

Подстановка последнего результата в соотношение (83), приводит к исключению длины волны λ :

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{E\gamma}{b_0}}. \quad (86)$$

Формула (86) позволяет рассчитать молекулярную прочность, которую не следует путать с приложенным на расстоянии напряжением σ . Для большинства мате-

риалов молекулярная прочность имеет порядок величины около одной десятой модуля Юнга [37]. Положив во втором равенстве (85) $\sigma_{\max}/E = 0.1$, получаем следующую оценку расчетной длины волны:

$$\lambda \cong 0.63b_0. \quad (87)$$

Здесь среднее межатомное расстояние b_0 имеет порядок 10^{-10} м. Теперь попробуем установить связь между молекулярной прочностью σ_{\max} и напряжением σ , которую можно определить из эксперимента. При условии, что наша атомистическая модель твердого тела содержит идеально острую трещину, мы получили бы приближительную оценку

$$\rho_{\text{tip}} = \begin{cases} b_0 \text{ или} \\ \frac{8}{\pi} b_0, \end{cases} \quad (88)$$

т.е. внутренний радиус такой трещины ρ_{tip} либо равен b_0 , либо прямо пропорционален данной величине.

Чтобы связать соотношения, полученные из молекулярных соображений, с величинами континуальной механики, такими как напряжение, используем формулу Инглиса

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma} = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho_{\text{tip}}}}, \quad (89)$$

в которой a обозначает полудлину «атомистически острой» трещины, полученной из эллиптического отверстия Инглиса [38] при $b \rightarrow \infty$. Комбинируя (89) и (86), получаем выражение для критического напряжения

$$\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{2 \sqrt{\frac{a}{\rho_{\text{tip}}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\gamma \rho_{\text{tip}}}{b_0 a}}. \quad (90)$$

Последний шаг в направлении данных рассуждений, который следует из молекулярных соображений, состоит в исключении с помощью соотношения (88) переменной величины ρ_{tip} , которую чрезвычайно трудно измерить. В результате получаем

$$\sigma = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E\gamma}{a}} \text{ или} \\ \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}}. \end{cases} \quad (91)$$

Из выражения (91) следует, что в начале разрушения произведение приложенного на расстоянии напряжения на квадратный корень из полудлины микротрещины достигает величины постоянной материала, пропорциональной произведению квадратного корня из модуля Юнга на поверхностное натяжение (или удельную энергию разрушения). Легко заметить, что второе выражение в (91) идентично формуле Гриффитса. Таким образом, эти результаты полностью согласуются с фундаментальными уравнениями механики разрушения.

Литература

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flowing solids // Phil. Trans. Royal Soc. – 1920. – V. A221. – P. 163–198.
2. Rice J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture // Fracture: An Advanced Treatise / Ed. by H. Liebowitz. – New York: Academic Press, 1968. – P. 191–311.
3. Obreimov J.D. The splitting of mica // Proc. Roy. Soc. – 1930. – V. A127. – P. 290–297.
4. Burns D.J., Lawn B.R. Experimental verification of Griffith energy balance condition at fracture // Proc. Roy. Soc. – 1968. – V. A137. – P. 331–343.
5. Barenblatt G.I. On Cohesion Modulus of Solids // Lecture presented at the Technical University in Krakow, Poland, 1966.
6. Wnuk M.P., Bolin S. Evaluation of Specific Fracture Energy in Membrane Delamination Test // Proc. 32nd Solid Mechanics Conf., Poland, 1998.
7. Timoshenko S. Theory of Plates and Shells. – New York: McGraw-Hill, 1940. – 492 p.
8. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. – 1960. – V. 8. – P. 100–104.
9. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypothesis. Axially-symmetric cracks // J. Appl. Math. Mech. – 1959. – V. 23. – P. 622–636.
10. Bilby B.A., Cotrell A.H., Swinden K.H. The spread of plastic yield from a notch // Proc. Roy. Soc. – 1963. – V. A279. – P. 1–9.
11. Ungsuwarungsri T., Knauss W.G. A nonlinear analysis of equilibrium craze. Part I: Problem formulation and solution. Part II: Simulation of craze and crack growth // J. Appl. Mech. – 1987. – V. 110. – P. 44–58.
12. Wnuk M.P. Onset and Early Stages of Fracture Propagation in Inelastic Solids (Invited Lecture) // Developments in Mechanics, Proc. 21 Midwest Mechanics Conf. – Houghton: Michigan Technol. Univ., 1989. – V. 15. – P. 103–110.
13. Higher Transcendental Functions / Ed. by H. Bateman, A. Erdelyi et al. – New York: McGraw-Hill, 1953. – V. 1–3.
14. Irwin G.R. Fracture Mechanics // Structural Mechanics: Proceedings of the 1st Symposium on Naval Structural Mechanics / Ed. by J.N. Goodyer, N.J. Hoff. – New York: Pergamon Press, 1960. – P. 557–591.
15. Jozavi H., Sancaktar E. The effects of cure temperature and time on the bulk fracture properties of structural adhesive // J. Adhesion. – 1985. – V. 18. – No. 1. – P. 25–48.
16. ASTM E399-81, Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials. 1981.
17. Wnuk M.P. Mathematical Modeling of Nonlinear Phenomena in Fracture Mechanics // Nonlinear Fracture Mechanics / Ed. by M.P. Wnuk. – New York: Springer-Verlag, 1990.
18. Omidvar B., Wnuk M.P. Local and global instabilities associated with continuing crack extension in dissipative solids // Int. J. Fracture. – 1997. – V. 84. – P. 237–260.
19. Wnuk M.P., Read D. Essential work of fracture (w_e) versus energy dissipation rate (J_c) in plane stress ductile fracture // Int. J. Fracture. – 1986. – V. 31. – P. 161–170.
20. Amini B., Wnuk M.P. Quasi-static extension of cohesive crack described by the energy partition technique // Int. J. Fracture. – 1993. – V. 59. – P. 245–264.
21. Broberg K.B. Cracks and Fracture. – San Diego: Academic Press, 1999. – 752 p.
22. Knowles J.K., Sternberg E. Large deformations near a tip of an interface crack between two neo-hookean sheets // J. Elasticity. – 1983. – V. 13. – P. 257–293.
23. Williams M.L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bull. Seismological Soc. America. – 1959. – V. 49. – P. 199–213.
24. England A.H. A crack between dissimilar media // J. Appl. Mech. – 1965. – V. 32. – P. 400–413.
25. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // J. Appl. Mech. – 1965. – V. 32. – P. 418–509.
26. Comninou M. The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – V. 44. – P. 631–643.
27. Comninou M. The interface crack in a shear field // J. Appl. Mech. – 1977. – V. 5. – P. 287–312.
28. Wong F.S., Shield R.T. Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-hookean material // Zeitschrift f. Angewandte Mathematik und Physik. – V. 20. – P. 176–189.
29. Malyshev B.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of cracks // Int. J. Fracture. – 1965. – V. 1. – P. 114–127.
30. Evans A.G., Hutchinson J.W., Wei Y. Interface Adhesion: Effects of Plasticity and Segregation, Report MECH 337, Division of Engineering, Harvard U., July 1998.
31. Wei Y., Hutchinson J.W. Models of Interface Separation Accompanied by Plastic Dissipation, Report MECH 341, Division of Engineering, Harvard U., Sept. 1998.
32. Casimir H.B.G., Polder D. Influence of retardation on the London – van der Waals forces // Nature. – 1946. – V. 158. – No. 4022. – P. 787–788.
33. Debye P.J.W. Interatomic and Intermolecular Forces // Adhesion and Cohesion / Ed. by P. Weiss. – Elsevier Publishing Co., 1961.
34. Good R.J. Intermolecular and Interatomic Forces // Treatise on Adhesion and Adhesives. – New York: Marcel Dekker, 1973. – V. 1.
35. Voyutskii S.S. Autohesion and Adhesion of High Polymers. – New York: Wiley, 1963.
36. Luckham P. Breaking chemical bond // Physics World. – 1999. – No. 6. – P. 23–24.
37. Smalley R.E. Buckytubes, New Materials and New Devices from Carbon // Karman Lecture at Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA, August 9, 1999.
38. Inglis C.E. Stresses in a plate due to presence of cracks and sharp notches // Trans. Inst. Naval Architects. – 1913. – V. 55. – P. 219–241.

Поступила в редакцию
28.05.2010 г.