УДК 519 **Технические науки**

Солодовникова Е. Н., *студентка,*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Российская Федерация
Филиппова Е. С., *студентка,*
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), г. Москва, Российская Федерация

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ФОРМА АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Аннотация: В статье рассмотрена задача получения выражения апостериорной плотности вероятности с учетом винеровского процесса. Ранее соответствующие результаты для апостериорной плотности были описаны лишь на операции с белым шумом, что соответствует идеальным условиям. Полученные выражения находят широкое применение в робототехнике для фильтрации и идентификации дискретных систем.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, винеровский процесс, борелевское поле, стохастический интеграл.

Abstract: In article the problem of obtaining the equations for the a posteriori probability density taking into account the Wiener process. Earlier appropriate results for a posteriori density were described only for operations with white noise, this corresponds to ideal conditions. The obtained expressions are widely used in robotics for filtering and identifying discrete systems.

Keywords: a posteriori probability density, the Wiener process, Borel field, stochastic integral.

В различных системах передачи информации на приемном конце знание о принятом сигнале, называемое апостериорным, формируется на основе известных сведений о сигнале, называемых априорными, и результатов обработки принятого сигнала. Рассмотрим случай, когда на вход приемника поступает аддитивная смесь y(t) сигнала s(t,x), зависящего от одного неэнергетического параметра x, и шума V’(t), где V(t) – винеровский процесс, а V’(t) – производная винеровского процесса по времени, являющаяся белым шумом

$$y(t) = s(t,x) + V'(t) \tag{1}$$

Это аддитивная смесь сигнала с шумом рассматривается на интервале наблюдения (0,T).

Отличие в постановке задачи от обычной [1]; [3] заключается в том, что при выводе формулы для апостериорной плотности вероятности операции производятся не с белым шумом, который является математической идеализацией и не может, вообще говоря, подвергаться математическим преобразованиям, а с винеровским процессом, который реально существует. Тем самым выводы обретают математическую строгость.

Сигнал s(t,x) в общем случае будем рассматривать как непрерывную функцию от t, имеющую конечное число точек разрыва 1-рода. Для того, чтобы в формуле (1) избавиться от производной, проинтегрируем выражение, стоящее в левой и правой частях от 0 до T:

$$Y(t) = S(t,x) + V(t)\ , \tag{2}$$

где

$$Y(t) = \int_0^T y(t)dt, \quad S(t,x) = \int_0^T s(t,x)dt. \tag{3}$$

Будем искать оценку x* параметра x по критерию апостериорной вероятности. Условную плотность распределения параметрах [2] относительно борелевского поля F_T назовем апостериорной вероятностью и обозначим

$$W(x/F_T) = W_{ps}(x). \tag{4}$$

За оценку x* параметра x по критерию апостериорной вероятности примем то значение параметра x, при котором апостериорная плотность вероятности $W_{ps}(x)$ имеет максимум. Таким образом, встает задача нахождения выражения для апостериорной плотности вероятности $W_{ps}(x)$.

Теперь напишем выражение для апостериорной плотности вероятности относительно борелевского поля F_n.

$$W(Y(t_1), \dots Y(t_k)) = C' W_{pr}(x) exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{[Y(t_i) - Y(t_{i-1})]^2}{t_i - t_{i-1}} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{[S(t_i,x) - S(t_{i-1},x)]^2}{t_i - t_{i-1}} + \sum_{i=1}^{k}\frac{[Y(t_i) - Y(t_{i-1})][S(t_i,x) - S(t_{i-1},x)]}{t_i - t_{i-1}}\right\}. \tag{5}$$

Первую сумму в экспоненте включим в C', тогда константа будет зависеть от $Y(t_i)$.

Третья сумма под знаком экспоненты при $\Delta \to \infty$ сходится в среднем квадратическом к стохастическому интегралу $\int_0^T s(t,x) dY(t)$, где стохастический интеграл понимается в следующем смысле:

$$\int_0^T s(t,x) dY(t) = \int_0^T s(t,x) dS(t,X) + \int_0^T s(t,x) dV(t) =$$
$$= \int_0^T s(t,x) S(t,X) dt + \int_0^T s(t,x) dV(t), \tag{6}$$

Где x-фиксированное значение параметра;

Х-случайная величина.

При каждом значении x будет выполняться предельное равенство:

$$\int_0^T s(t,x)S(t,X)dt = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} [S(t_i,X) - S(t_{i-1},X)] \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} s(t,x)dt}{t_i - t_{i-1}}. \qquad (7)$$

Вторая сумма под знаком экспоненты в равенстве (5) будет при Δ →0 равняться следующему:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{[S(t_i,x) - S(t_{i-1},x)]^2}{t_i - t_{i-1}} = \frac{1}{2} s^2(t,x)dt. \qquad (8)$$

Выражение $s^2(t,x)dt$ представляет собой энергию сигнала s(t,x) и может быть включено в константу С’, так как оно не содержит интересующей информации о параметре x.

Можно считать, что последнее интегральное равенство в формуле (6) справедливо.

$$\int_0^T s(t,x)dV(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} [V(t_i) - V(t_{i-1})] \frac{\int_{t_{i-1}}^{t_i} s(t,x)dt}{t_i - t_{i-1}}. \qquad (9)$$

Теперь из формулы (5), устремляя у нулю и учитывая равенства (7), (8) и (9), получим выражение апостериорной плотности вероятности

$$W\left(\frac{x}{F_T}\right) = W_{ps}(x) = CW_{pr}(x)exp\left\{\int_0^T s(t,x)dY(t)\right\}. \qquad (10)$$

Где стохастический интеграл понимается как случайная величина, удовлетворяющая выражению (6).

Теперь остается лишь доказать, что при предельном переходе от выражения (5) к выражению (10) константа С’ стремится к константе С, не равной нулю.

Проинтегрируем (10) от 0 до Т, тогда

$$C = \left[W_{pr}(x) exp\left\{\int_0^T s(t,x)dY(t)\right\}dx\right]^{-1}. \tag{11}$$

Если доказать, что

$$W_{pr}(x) exp\left\{\int_0^T s(t,x)dY(t)\right\}dx < \infty, \tag{12}$$

То отсюда получим, что С≠0.

Таким образом, доказано, что в окончательном выражении для апостериорной плотности вероятности $W_{ps}(x)$ постоянная С не может быть равна нулю.

Подводя итоги, следует заметить, что результирующая формула (10) для $W_{ps}(x)$ отличается от наиболее распространенного выражения $W_{ps}(x)$ [4], получаемого в результате не совсем строгих выкладок, лишь формой записи, которую при реальном сигнале можно упростить и свести к известной.

Библиографический список:

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.:Наука, 2007.

2. Дуб Д. Л. Вероятностные процессы. – М.:Физматлит, 1990.

3. Рыбаков К. А. Спектральный метод фильтрации и прогнозирования в стохастических системах диффузно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. – 2016. - С.14-23.

4. Тихонов В. И. Статическая радиотехника. - М.: Советское радио, 1966.