УДК 519.632.4

А. Н. ХОМЧЕНКО
Чорноморський національний університет імені Петра Могили
О.І ЛИТВИНЕНКО
Херсонський національний технічний університет

ПРО СЕРЕНДИПОВІ ПОВЕРХНІ, ЯКІ УТВОРЮЮТЬ СІМПСОНОВІ ТІЛА

У роботі вперше серендипові поліноми, відомі з методу скінченних елементів, розглядаються як поверхні, з яких можливо утворювати клиноподібні сімпсонові тіла. Існує безліч таких серендипових поверхонь, а це означає, що в задачах повузлової локалізації навантаження від одиничної масової сили замість формули Ньютона-Котеса можна використовувати наближену формулу Сімпсона. Отримані результати суттєво поповнюють модельний ряд сімпсонових тіл.

Ключові слова: сімпсонові тіла, серендипові поверхні, серендипові елементи, формула Ньютона-Котеса, правило Сімпсона.

А. Н. ХОМЧЕНКО
Черноморский национальный университет имени Петра Могилы
Е.И. ЛИТВИНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

О СЕРЕНДИПОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ, КОТОРЫЕ СОЗДАЮТ СИМПСОНОВЫ ТЕЛА

В работе впервые серендиповы полиномы, известные из метода конечных элементов, рассматриваются как поверхности, из которых можно моделировать клиноподобные симпсоновы тела. Существует бесконечное множество таких серендипових поверхностей, а это означает, что в задачах поузлового распределения единичной массовой силы вместо формулы Ньютона-Котеса можно использовать приближенную формулу Симпсона. Полученные результаты существенно пополняют модельный ряд симпсоновых тел.

Ключевые слова: симпсоновы тела, серендиповы поверхности, серендиповы элементы, формула Ньютона-Котеса, правило Симпсона.

A. N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LITVINENKO
Kherson National Technical University

ON SERENDIPITY SURFACES WHICH CREATE SIMPSON BODIES

For the first time the serendipity polynomials known from finite elements method are considered in the work as surfaces from which one can model sphenoidal simpson bodies. There are plenty of such serendipity surfaces and this means that in the problems of per-node distribution of unit mass force instead of Newton -Cotes formula it is possible to use proximate Simpson formula. The received results essentially replenish model range of simpson bodies.

Key words: simpson bodies, serendipity surfaces, serendipity elements, Newton -Cotes formula, Simpson rule.

Вступ

Серендипові поверхні – це фінітні поліноміальні функції двох аргументів. Кожна функція $N_i(x,y)$ асоціюється з розрахунковим вузлом «*i*» на границі скінченного елемента-носія. У класичній задачі відновлення функції $f(x,y)$ за відомими вузловими аплікатами f_i функції $N_i(x,y)$ називають базисними (функціями впливу), а в методі скінченних елементів (МСЕ) – це функції форми. Задача локалізації у вузлах навантаження на скінченний елемент (СЕ) від одиничної масової сили передбачає обчислення об'єму тіла, що міститься між серендиповою поверхнею і площиною носія. Об'єм зазвичай обчислюють подвійним інтегруванням $N_i(x,y)$. Ми спробували обчислювати об'єм наближено за правилом Сімпсона і виявили, що в багатьох випадках можна отримати точне значення. Такі тіла називають сімпсоновими.

Аналіз попередніх публікацій, мета роботи

Формулу параболічних трапецій з 1743 р. називають формулою Сімпсона, хоча раніше вона була отримана Кавал'єрі (1639 р.) і Грегорі (1668 р.) Автори статті [1] наводять сучасне формулювання і доведення теореми Сімпсона, а також дають означення сімпсонова тіла. Неважко переконатися, що до переліку сімпсонових тіл належать призма, піраміда, зрізана піраміда, циліндр, конус, зрізаний конус, куля та кульовий сегмент. У роботі [1] доведено, що призматоїд також є сімпсоновим тілом. А це, в свою чергу, означає, що до сімпсонових тіл належать клиноподібні тіла, що обмежені площинами. З цієї точки зору цікаво протестувати клиноподібні тіла, що обмежені поверхнями, особливо поверхнями вищих порядків.

Мета дослідження

Мета роботи – довести, що сімпсонові тіла можна конструювати із серендипових поверхонь. Здається, що з цього боку серендипові поліноми ще не розглядалися. В роботі розглядаються СЕ від першого до п'ятого порядку включно. Зауважимо, що на відміну від прихильників матричного аналізу, ми побудували базис (і не один) елемента п'ятого порядку без використання внутрішніх вузлів. На елементі четвертого порядку це було зроблено раніше [2-3]. Треба підкреслити, що тестування правилом Сімпсона витримують як стандартні серендипові поверхні [4-6], так і альтернативні [7].

Основна частина

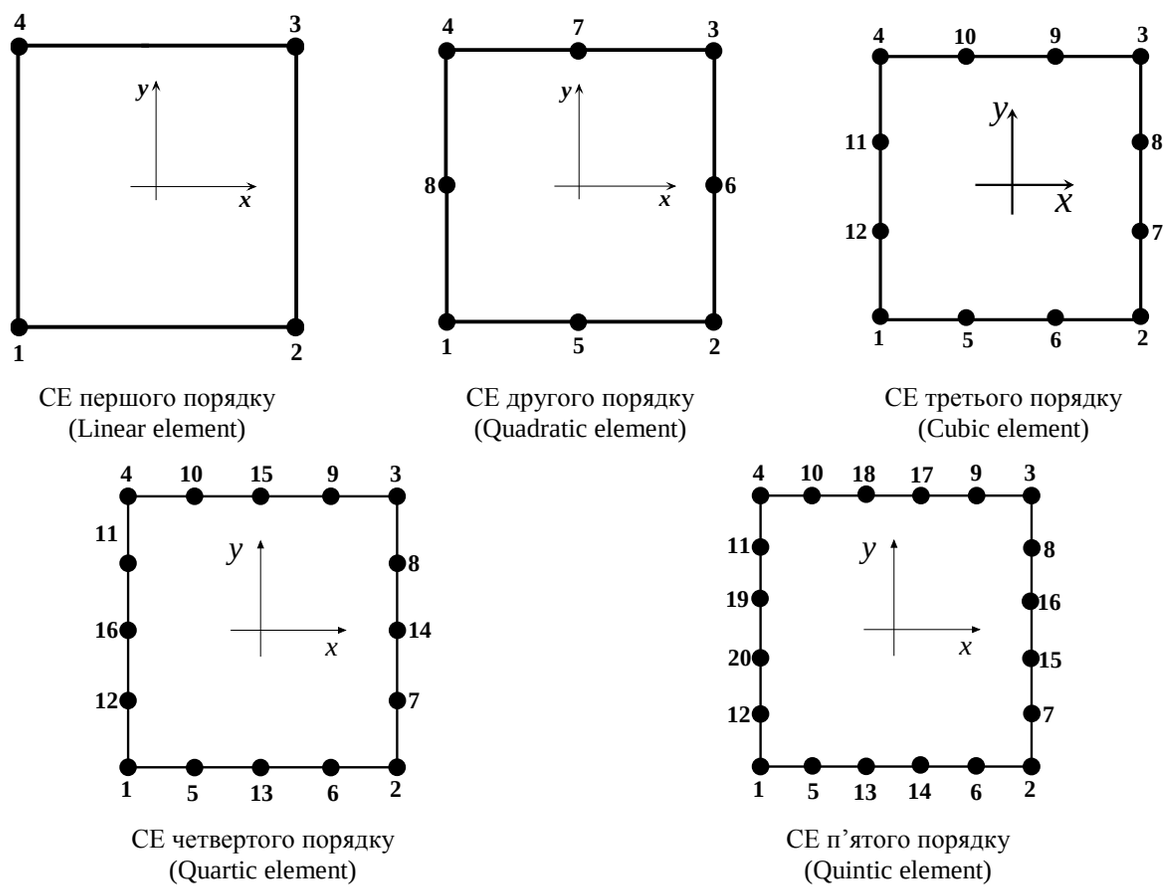
Нагадаємо, як виглядає правило Сімпсона на інтервалі $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(c)+4f(c)+f(b)\right), \text{ де } c=\frac{1}{2}(b+a). \qquad (1)$$

Якщо $f(x)=S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла, що міститься між опорними площинами $x=a$ та $x=b$, то за формулою (1) обчислюють об'єм тіла.

Підкреслимо, що поліноми не вище третього порядку – це той клас функцій $f(x)$, для якого формула (1) є квадратурою з нульовим залишком.

На рис. 1 зображені серендипові елементи, що розглядаються в роботі.



СЕ першого порядку (Linear element)

СЕ другого порядку (Quadratic element)

СЕ третього порядку (Cubic element)

СЕ четвертого порядку (Quartic element)

СЕ п'ятого порядку (Quintic element)

Рис. 1. Серендипові скінченні елементи

Підготовлений читач зверне увагу на відсутність внутрішніх вузлів на СЕ Quartic і Quintic. Вважається, що без внутрішніх вузлів неможливо побудувати базис на елементах четвертого і п'ятого порядків. Це негативний наслідок метода оберненої матриці, який багато років панує в МСЕ. Але, якщо скористатися будь-яким нематричним методом, можна обмежитись тільки граничними вузлами. Саме так ми сконструювали базисні функції (серендипові поверхні) СЕ четвертого і п'ятого порядків. Базисні функції, незалежно від порядку СЕ, повинні задовольняти наступним умовам інтерполяційної гіпотези:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{M} N_i(x,y) = 1, \tag{2}$$

де i – номер функції, k – номер вузла, M – кількість вузлів СЕ. Порядок СЕ на одиницю менший кількості вузлів на стороні квадрата (рис. 1).

Щоб скористатися формулою Сімпсона, важливо правильно обрати паралельні опорні площини. Виявляється, що для тіл, утворених серендиповими поверхнями, кращий вибір $x = \pm 1$ або $y = \pm 1$. Це суттєво спрощує обчислення, особливо на СЕ вищих порядків. На цих елементах виникає необхідність розв'язувати задачу на найменше та найбільше значення функції $N_i(x,y)$, щоб визначити опорні площини $z = a$ і $z = b$. При цьому область в «середньому» перерезі $z = c$ може мати складну конфігурацію в залежності від рельєфу поверхні. У всіх випадках ми користуємося опорними площинами $y = \pm 1$, а на СЕ вищих порядків не розглядаємо «кутові» поверхні $N_i(x,y)$, $i = 1,2,3,4$, щоб не порушувати умови теореми Сімпсона.

Порівняння результатів подвійного інтегрування $N_i(x,y)$ та наближеної оцінки інтеграла за Сімпсоном почнемо з елементів 1-го порядку. Тут лише «кутова» поверхня і вона має вигляд [1,4-6]:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y),$$

аналогічно $N_i(x,y)$ для $i = 2,3,4$.

Подвійний інтеграл на всі випадки має вигляд:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i(x,y)\,dx\,dy. \tag{3}$$

З геометричної точки зору (3) – це алгебраїчна сума об'ємів над носієм і під носієм поверхні $N_i(x,y)$.

Результат (3) ми порівняємо з оцінкою Сімпсона (1), де використовується три (навіть дві) площі паралельних перерізів.

Відповідна формула має вигляд:

$$I = 2\left(\frac{1}{6}S_{-1} + \frac{4}{6}S_0 + \frac{1}{6}S_1\right), \tag{4}$$

де $S_{-1} = S(x,-1)$, $S_0 = S(x,0)$, $S_1 = S(x,1)$ - площі у відповідних перерізах. Вузли розподілені по периметру квадрата рівномірно, тому достатньо протестувати лише ті поверхні $N_i(x,y)$, які асоціюються із стороною $y = -1$, $-1 \le x \le 1$. Для моделі 1-го порядку – це $N_1(x,y)$, для моделей другого і третього порядків – це $N_5(x,y)$, для моделей четвертого і п'ятого порядків – $N_5(x,y)$ і $N_{13}(x,y)$.

Для лінійної моделі формули (3) і (4) дають однакові результати: об'єм тіла $V = 1$ куб.од. Це означає, що тіло, яке утворене поверхнею $N_i(x,y)$ і квадратним носієм, є сімпсоновим. Особливий характер лінійної моделі забезпечує точний результат також за правилом трапецій (два перерізи S_{-1} і S_1) і навіть за правилом центрального інтегрування (один переріз S_0).

Для СЕ другого порядку достатньо навести поверхні $N_1(x,y)$ і $N_5(x,y)$ [3-5]:

$$N_1(x,y)=\frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y),$$
$$N_5(x,y)=\frac{1}{2}(1-x^2)(1-y)\ . \tag{5}$$

Нагадаємо, що ми тестуємо лише «проміжні» поверхні. «Кутова» поверхня $N_1(x,y)$ наведена для того, щоб читач мав повне уявлення про базис СЕ.

Цікаво зауважити, що на СЕ другого порядку поверхні $N_1(x,y)$ і $N_5(x,y)$ утворюють тіла Сімпсона.

Наведемо характерні поверхні СЕ третього порядку [4-6]:

$$N_1(x,y)=\frac{1}{32}(1-x)(1-y)\left(-10+9\left(x^2+y^2\right)\right),$$
$$N_5(x,y)=\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)\ (1-3x). \tag{6}$$

Тестування свідчить, що «проміжні» поверхні утворюють сімпсонові тіла. Читач може самостійно зробити висновок щодо «кутових» поверхонь.

Характерні функції стандартного базису СЕ четвертого порядку (17 вузлів) мають вигляд [5, 6]:

$$N_1(x,y)=\frac{1}{12}(1-x)(1-y)\left(-4x\left(x^2-1\right)-4y\left(y^2-1\right)+3xy\right),$$
$$N_5(x,y)=\frac{4}{3}(1-x^2)(1-y)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right),$$
$$N_{13}(x,y)=2\left(x^2-1\right)(1-y)\left(x^2+\frac{1}{4}y\right), \tag{7}$$
$$N_{17}(x,y)=(1-x^2)(1-y^2).$$

В цьому випадку «тест Сімпсона» витримують як «проміжні» поверхні $N_1(x,y)$ і $N_5(x,y)$, так і центральна поверхня («дута» мода) $N_{17}(x,y)$. Стосовно «дутої» моди треба зауважити, що у формулі Сімпсона результативно працює лише один переріз (середній), але формула дає точний об'єм тіла.

Цікаво протестувати характерні поверхні нестандартного базису СЕ четвертого порядку (16 вузлів):

$$N_1(x,y)=\frac{1}{60}(1-x)(1-y)\left(12+32x+32y+27xy-20\left(x^3+y^3\right)\right),$$
$$N_5(x,y)=\frac{1}{12}(1-x^2)(1-y)\left(16x^2-8x-3y-3\right), \tag{8}$$
$$N_{13}(x,y)=\frac{1}{20}(1-x^2)(1-y)\left(-40x^2+y+11\right).$$

Нестандартні «проміжні» поверхні $N_5(x,y)$ і $N_{13}(x,y)$ також витримують «тест Сімпсона». Як відомо [2, 3, 7], на СЕ вищих порядків існує безліч альтернативних поверхонь $N_i(x,y)$. Це означає, що існує безліч сімпсонових тіл, утворених цими поверхнями. Наприклад,

$$N_1(x,y)=\frac{1}{240}(1-x)(1-y)\left(80x\left(1-x^2\right)+80y\left(1-y^2\right)+99xy+33x+33y+33\right),$$
$$N_{13}(x,y)=\frac{1}{80}(1-x^2)(1-y)\left(-160x^2+9y+49\right). \tag{9}$$

Нам не відомо жодного джерела, яке б містило інформацію про Quintic. Цей елемент заслуговує на особливу увагу. Аналіз схеми Паскаля свідчить про те, що для метода оберненої матриці необхідно повернути деякі внутрішні вузли лагранжевої версії елемента п'ятого порядку. Нагадаємо, що лагранжевий Quintic має 16 внутрішніх вузлів. Стандартний базис серендипової версії може складатися із 21 або 25

поверхонь $N_i(x,y)$. Ми скористалися лише граничними вузлами (рис. 1) і сконструювали декілька нестандартних базисів. Один із таких базисів має вигляд:

$$N_1(x,y)=\frac{1}{1536}(1-x)(1-y)\left(25\left(x^2+y^2\right)-26\right)\left(25(x+y+1)^2-9\right),$$
$$N_5(x,y)=\frac{25}{1536}\left(1-x^2\right)\left(1-25x^2\right)(1-y)\left(5x+y-2\right), \qquad (10)$$
$$N_{13}(x,y)=\frac{25}{768}\left(1-x^2\right)\left(25x^2-9\right)(1-y)\left(5x-1\right).$$

«Проміжні» поверхні $N_5(x,y)$ і $N_{13}(x,y)$ моделі Quintic витримують тестування правилом Сімпсона. Нові базиси елементів Quartic і Quintic привертають особливу увагу. Експерименти свідчать, що при фіксованій кількості параметрів *M*, швидкість *p*-збіжності вища за швидкість *h*-збіжності. Саме цей факт стимулює пошуки нових базисів СЕ вищих порядків [5, 6].

Висновки

Існує безліч серендипових поверхонь, які утворюють клиноподібні сімпсонові тіла. Це означає, що в задачах повузлової локалізації навантаження від одиничної масової сили замість формули Ньютона-Котеса можна використовувати наближену формулу Сімпсона. Отримані результати суттєво поповнюють модельний ряд сімпсонових тіл.

Список використаної літератури

1. Кукуш О. Г. Призматоїд та його об’єм / О. Г. Кукуш, Р. П. Ушаков // У світі математики. — Том 8. — Вип. 2.— К.: ТВІМС, 2012. — С. 46–50.
2. Астіоненко І.О. Інтерполяційна процедура Тейлора для побудови базисів серендипових скінченних елементів: модифікація /І.О.Астіоненко, О.І.Литвиненко, А.Н. Хомченко // Матер. міжн. наук. конф. “Інтелект. системи прийняття рішень і проблеми обчислюв. інтелекту”. — Т. 1. — Херсон: ХНТУ, 2009. — С. 9-12.
3. Хомченко А.Н. Чи потрібний 17-й вузол серендиповому елементу 4-го порядку? / А. Н. Хомченко, С. О. Камаєва // Вестник Херсонского нац. техн. ун-та. – № 2(35). — Херсон: ХНТУ, 2009. – С. 455–461.
4. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B.M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Int. J. Solids Struct. — # 4. 1968. — P. 31–42.
5. Akin J. E. Finite Element Analysis with Error estimators / J. E. Akin. — Elsevier, Butternorth-Heinemann, 2005. —477 p.
6. Oñate E. Structural Analysis with the Finite Element Method, vol. 1 / E. Oñate. — Springer Netherlands, 2009. — 495 p.
7. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т, 1982. — 9 с. — Деп. В ВИНИТИ 18.02.82, № 1213.