С.Б. Климентов, Н.Г. Перлова

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ ЛИБМАНА И РЕМБСА О СКОЛЬЗЯЩИХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ВАРЬИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ГАУССА-ПЕТЕРСОНА-КОДАЦЦИ

1. История вопроса. Формулировка результатов. Давно известен следующий результат Г. Либмана [1].

Теорема 1. Существует счётное множество сферических сегментов, больших полусферы, допускающих единственное линейно независимое нетривиальное аналитическое скользящее бесконечно малое изгибание первого порядка, то есть такое бесконечно малое изгибание, при котором край сегмента остаётся в своей плоскости (с точностью до малых первого порядка).

В 1935 г. Э. Рембс в работе [2] сформулировал утверждение, развивающее вышеприведённую теорему Либмана.

Теорема 2. Устанавливаемые в теореме Либмана сегменты сферы, большие полусферы, допускают единственное линейно независимое нетривиальное аналитическое скользящее бесконечно малое изгибание второго порядка, то есть такое бесконечно малое изгибание, при котором край сегмента остаётся в своей плоскости (с точностью до малых второго порядка).

Приведённое в [2] доказательство теоремы 2 содержит два дефекта. Первый − использование без обоснования варьированного уравнения Бианки-Дарбу. Этот пробел хоть и не совсем просто, но можно устранить, используя результаты П.Е. Маркова [3] и С.Б. Климентова [4] (см. [5]). Второй дефект − использование уравнения Бианки-Дарбу для непроектирующихся поверхностей. Возможность такого использования − вопрос открытый по сей день. Насколько нам известно, исправленное доказательство теоремы 2 никем не было опубликовано и остаётся открытым вопрос: верна ли теорема 2?

В предлагаемой работе теоремы 1 и 2 доказываются единым (новым) методом с помощью варьированных уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци.

2. Отыскание первых вариаций приведенных коэффициентов второй квадратичной формы сферы. Известно [3, 4], что первые вариации приведённых коэффициентов второй квадратичной формы при бесконечно малом изгибании регулярной поверхности удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} L\gamma - 2M\alpha + N\beta = 0, \\ \alpha_v - \gamma_u = \Gamma_{11}^1\gamma - 2\Gamma_{12}^1\alpha + \Gamma_{22}^1\beta, \\ \alpha_u - \beta_v = \Gamma_{11}^2\gamma - 2\Gamma_{12}^2\alpha + \Gamma_{22}^2\beta, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = \dfrac{\delta M}{\sqrt{g}}$, $\beta = \dfrac{\delta L}{\sqrt{g}}$, $\gamma = \dfrac{\delta N}{\sqrt{g}}$, g - дискриминант метрической формы.

Зададим единичную сферу без южного полюса параметризацией $\bar{r} = (r\cos v,\ r\sin v,\ u)$, где $r = \sqrt{u(2-u)}$, $0 < u \le 2$. Тогда коэффициенты первой и второй квадратичных форм и символы Кристоффеля второго рода имеют следующие выражения: $E = L = \dfrac{1}{u(2-u)}$, $F = M = 0$, $G = N = u(2-u)$,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{u-1}{u(2-u)},\quad \Gamma_{12}^1 = 0,\quad \Gamma_{22}^1 = u(u-1)(2-u),\quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1-u}{u(2-u)},\quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0.$$

Система (1) для рассматриваемой параметризации сферы принимает вид

$$\begin{cases} \gamma + u^2(2-u)^2\beta = 0, \\ \alpha_v - \gamma_u = 0, \\ u(2-u)(\alpha_u - \beta_v) = 2(u-1)\alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Исключая из уравнений (2) неизвестные функции $\alpha = \alpha(u,v)$ и $\beta = \beta(u,v)$, получим уравнение относительно функции $\gamma = \gamma(u,v)$:

$$u^2(2-u)^2\gamma_{uu} + 2u(1-u)(2-u)\gamma_u + \gamma_{vv} = 0. \tag{3}$$

Методом разделения переменных нетрудно найти гладкое на сфере без южного полюса решение уравнения (3): $\gamma = u^{-\frac{k}{2}}(2-u)^{\frac{k}{2}}\sin kv.$ Следовательно, функции

$$\begin{cases} \alpha = u^{-\frac{k}{2}-1}(2-u)^{\frac{k}{2}-1}\cos kv, \\ \beta = -u^{-\frac{k}{2}-2}(2-u)^{\frac{k}{2}-2}\sin kv, \\ \gamma = u^{-\frac{k}{2}}(2-u)^{\frac{k}{2}}\sin kv, \end{cases} \tag{4}$$

$k \geq 4,\ k \in \mathrm{N}$, представляют решение системы (2), непрерывное на сфере с удалённым полюсом $u = 0$.

3. Выражение вариации кручения параллели сферы при бесконечно малом изгибании первого порядка через вариации приведённых коэффициентов второй квадратичной формы. Известно [6], что кручение координатной линии $u = const$ (без точек распрямления) регулярной поверхности класса C^3 выражается через коэффициенты первой и второй квадратичных форм следующим образом:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{g}(GN^2 + g(\Gamma^1_{22})^2)}(g\Gamma^1_{22}(\Gamma^1_{12}N - N_v - \Gamma^1_{22}M) + \\ + N(g(\Gamma^1_{22})_v + FN^2 - GMN))\cdot$$

Переходя в этом выражении к приведённым коэффициентам второй квадратичной формы, получим с учётом формулы Фосса-Вейля, что

$$\kappa = -\frac{M}{\sqrt{g}} + \\ + \frac{1}{G(\frac{N}{\sqrt{g}})^2 + (\Gamma^1_{22})^2}(((\Gamma^1_{22})_v - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{22})\frac{N}{\sqrt{g}} + F(\frac{N}{\sqrt{g}})^3 - \Gamma^1_{22}(\frac{N}{\sqrt{g}})_v)\cdot \tag{5}$$

Варьируя выражение (5) и полагая $\kappa = 0$, получим выражение первой вариации кручения плоской координатной линии $u = const$ регулярной поверхности:

$$\delta\kappa = -\alpha + \frac{1}{G(\frac{N}{\sqrt{g}})^2 + (\Gamma^1_{22})^2}(((\Gamma^1_{22})_v - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{22} + 3F(\frac{N}{\sqrt{g}})^2 - 2G\frac{M}{\sqrt{g}}\frac{N}{\sqrt{g}})\gamma -$$

$-\Gamma^1_{22}\gamma_v)$, откуда следует, что для параллели $u = const$ сферы

$$\delta\kappa = -\alpha - \frac{u-1}{u(2-u)}\gamma_v. \tag{6}$$

4. Доказательство теоремы Либмана. Из равенства (6) следует, что для параллели $u = const$ сферы условие $\delta\kappa = 0$ равносильно равенству

$$u(2-u)\alpha + (u-1)\gamma_v = 0. \tag{7}$$

Подставляя выражения функций (4_1) и (4_3) в равенство (7), получим:

$u^{-\frac{k}{2}}(2-u)^{\frac{k}{2}}(1+k(u-1))\cos kv = 0$, откуда следует, что $u = 1-\frac{1}{k}$. Это означает, что сферический сегмент

$$\bar{r} = (r\cos v, r\sin v, u), \quad r = \sqrt{u(2-u)}, \quad 1-\frac{1}{k} \le u \le 2, \quad k \ge 4, \quad k \in \mathrm{N},$$

допускает нетривиальное бесконечно малое изгибание первого порядка, при котором граничная параллель $u = 1-\frac{1}{k}$ остаётся плоской кривой (с точностью до малых выше первого порядка).

Вследствие уравнений (1) выражение

$$d\bar{y} = (\alpha\,\bar{r}_u - \beta\,\bar{r}_v)du + (\gamma\,\bar{r}_u - \alpha\,\bar{r}_v)dv$$

есть полный дифференциал, интегрируя который найдём поле вращений

$$\bar{y} = (-\frac{1}{2(k+1)}u^{\frac{-k-1}{2}}(2-u)^{\frac{k+1}{2}}\cos(k+1)v + \frac{1}{2(k-1)}u^{\frac{-k+1}{2}}(2-u)^{\frac{k-1}{2}}\cos(k-1)v,$$

$$-\frac{1}{2(k+1)}u^{\frac{-k-1}{2}}(2-u)^{\frac{k+1}{2}}\sin(k+1)v - \frac{1}{2(k-1)}u^{\frac{-k+1}{2}}(2-u)^{\frac{k-1}{2}}\sin(k-1)v,$$

$$-\frac{1}{k}u^{-\frac{k}{2}}(2-u)^{\frac{k}{2}}\cos kv).$$

Интегрируя выражение $d\bar{z} = [\bar{y}\ d\bar{r}]$, найдём поле скоростей

$$\bar{z} = (\frac{1}{2k}u^{\frac{-k+1}{2}}(2-u)^{\frac{k+1}{2}}(\frac{1}{k+1}\sin(k+1)v + \frac{1}{k-1}\sin(k-1)v),$$

$$\frac{1}{2k}u^{\frac{-k+1}{2}}(2-u)^{\frac{k+1}{2}}(-\frac{1}{k+1}\cos(k+1)v + \frac{1}{k-1}\cos(k-1)v),$$

$$\frac{1}{k(k^2-1)}(1+k(u-1))u^{-\frac{k}{2}}(2-u)^{\frac{k}{2}}\sin kv).$$

Так как на граничной параллели $u = 1-\frac{1}{k}$ сферического сегмента $(\bar{z}\ \bar{k}) = 0$, где $\bar{k}$ – нормальный вектор плоскости параллели, найденное бесконечно малое изгибание сегмента является скользящим.

Единственность следует из единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка (3) (подробности ввиду ограниченности объёма статьи, опускаем).

Об аналитичности найденного бесконечно малого изгибания в окрестности северного полюса см. замечание 2 в конце статьи.

Теорема 1 доказана.

5. Отыскание вторых вариаций приведённых коэффициентов второй квадратичной формы сферы. Известно [3, 4], что вторые вариации приведённых коэффициентов второй квадратичной формы регулярной поверхности удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} L\nu - 2M\lambda + N\mu + 2\sqrt{g}(\beta\gamma - \alpha^2) = 0, \\ \lambda_v - \nu_u = \Gamma_{11}^1\nu - 2\Gamma_{12}^1\lambda + \Gamma_{22}^1\mu, \\ \lambda_u - \mu_v = \Gamma_{11}^2\nu - 2\Gamma_{12}^2\lambda + \Gamma_{22}^2\mu, \end{cases} \tag{8}$$

где $\lambda = \dfrac{\delta^2 M}{\sqrt{g}}, \quad \mu = \dfrac{\delta^2 L}{\sqrt{g}}, \quad \nu = \dfrac{\delta^2 N}{\sqrt{g}}$, α, β, γ – решение системы (1).

Для рассматриваемой параметризации сферы система (8) принимает вид

$$\begin{cases} \nu + u^2(2-u)^2\mu + 2u(2-u)\Delta = 0, \\ \lambda_v - \nu_u = -2(u-1)\Delta, \\ u(2-u)(\lambda_u - \mu_v) = 2(u-1)\lambda, \end{cases} \tag{9}$$

где $\Delta = \beta\gamma - \alpha^2$.

Исключая из уравнений (9) неизвестные функции $\lambda = \lambda(u,v)$ и $\mu = \mu(u,v)$, получим уравнение относительно функции $\nu = \nu(u,v)$

$$\begin{gathered} u^2(2-u)^2\nu_{uu} + 2u(1-u)(2-u)\nu_u + \nu_{vv} = \\ = 2u(2-u)((u(2-u) - 2(1-u)^2)\Delta + u(u-1)(2-u)\Delta_u - \Delta_{vv}). \end{gathered} \tag{10}$$

Возьмём в качестве α, β, γ функции (4). В результате несложных преобразований получим выражение $\Delta = -u^{-k-2}(2-u)^{k-2}$.

Подставив выражение Δ в правую часть уравнения (10), методом разделения переменных найдём множество решений уравнения (10), гладких на сфере без южного полюса:

$$\nu = Cu^{-k}(2-u)^k\cos 2kv + \frac{1}{4(k^2-1)}((k+1)u^{-k+1}(2-u)^{k-1} - \\ -(k-1)u^{-k-1}(2-u)^{k+1}),$$

C – произвольная постоянная. Тогда функции

$$\begin{cases} \lambda = -Cu^{-k-1}(2-u)^{k-1}\sin 2kv, \\ \mu = -\dfrac{1}{u^2(2-u)^2}\nu + 2u^{-k-3}(2-u)^{k-3}, \\ \nu = Cu^{-k}(2-u)^k\cos 2kv + \nu_0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\nu_0 = \dfrac{1}{4(k^2-1)}((k+1)u^{-k+1}(2-u)^{k-1} - (k-1)u^{-k-1}(2-u)^{k+1}), \quad k \geq 4,$

$k \in \mathrm{N}$, C – произвольная постоянная, представляют множество решений системы уравнений (9), гладких на сфере без полюса $u = 0$.

6. Выражение второй вариации кручения параллели сферы при бесконечно малом изгибании второго порядка через вариации приведённых коэффициентов второй квадратичной формы. В результате двукратного варьирования выражения (5) с учётом равенств $\kappa = 0$ и $\delta\kappa = 0$ получается выражение второй вариации кручения плоской координатной линии $u = const$ с нулевой первой вариацией кручения:

$$\delta^2\kappa = -\lambda + \frac{1}{G(\frac{N}{\sqrt{g}})^2 + (\Gamma_{22}^1)^2}(((\Gamma_{22}^1)_v - \Gamma_{22}^1\Gamma_{22}^2 + 3F(\frac{N}{\sqrt{g}})^2 - 2G\frac{M}{\sqrt{g}}\frac{N}{\sqrt{g}})\nu -$$

$$-\Gamma_{22}^1\nu_v + (6F\frac{N}{\sqrt{g}} - 2G\frac{M}{\sqrt{g}})\gamma^2 - 4G\frac{N}{\sqrt{g}}\alpha\gamma)'$$

откуда следует, что для параллели $u = const$ сферы

$$\delta^2\kappa = -\lambda - \frac{u-1}{u(2-u)}\nu_v - 4\alpha\gamma. \qquad (12)$$

7. Доказательство теоремы Рембса. Из выражений (6) и (12) следует, что для параллели $u = const$ сферы условия $\delta\kappa = \delta^2\kappa = 0$ равносильны равенствам (7) и

$$u(2-u)\lambda + (u-1)\nu_v + 4u(2-u)\alpha\gamma = 0. \qquad (13)$$

Подставим в равенство (13) выражения α, γ из (4) и λ, ν из (11). Получим

$$C(1 + 2k(u-1)) - 2 = 0. \qquad (14)$$

На параллелях $u = 1 - \frac{1}{k}$, найденных в пункте 4 из условия (7), равенство (14) выполняется при $C = -2$. Таким образом, функции (4) и (11) при $C = -2$ определяют нетривиальное бесконечно малое изгибание второго порядка сферического сегмента $\bar{r} = (r\cos v, r\sin v, u),\ r = \sqrt{u(2-u)}$,

$1 - \frac{1}{k} \le u \le 2,\ k \ge 4,\quad k \in \mathrm{N}$, при котором граничная параллель $u = 1 - \frac{1}{k}$ остаётся плоской кривой (с точностью до малых выше второго порядка).

Вследствие уравнений (8) выражение

$$d\overset{2}{\bar{y}} = [\bar{y}\ d\bar{y}] + (\lambda\,\bar{r}_u - \mu\,\bar{r}_v)du + (\nu\,\bar{r}_u - \lambda\,\bar{r}_v)dv$$

есть полный дифференциал, интегрируя который найдём поле вращений $\overset{2}{\bar{y}}$ бесконечно малого изгибания второго порядка. Для отыскания поля вращений $\overset{2}{\bar{y}}$ используется выражение $\overset{2}{\bar{y}}_v = [\bar{y}\,\bar{y}_v] + \nu\,\bar{r}_u - \lambda\,\bar{r}_v$. Приведём координаты $[\bar{y}\,\bar{y}_v]$ и $\nu\,\bar{r}_u - \lambda\,\bar{r}_v$.

$$[\bar{y}\,\bar{y}_v] = (-\frac{1}{2(k+1)}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\sin(k+1)v\ \sin kv -$$

$$-\frac{1}{2(k-1)}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\sin(k-1)v\ \sin kv -$$

$$-\frac{1}{2k}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\cos(k+1)v\,\cos kv-\frac{1}{2k}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\cos(k-1)v\,\cos kv,$$

$$\frac{1}{2(k+1)}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\cos(k+1)v\,\sin kv-$$

$$-\frac{1}{2(k-1)}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\cos(k-1)v\,\sin kv-$$

$$-\frac{1}{2k}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\sin(k+1)v\,\cos kv+\frac{1}{2k}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\sin(k-1)v\,\cos kv,$$

$$-\frac{1}{2(k^2-1)}u^{-k}(2-u)^{k}\cos 2kv-\nu_0),$$

$$\nu\,\bar{r}_u-\lambda\,\bar{r}_v=(\frac{C}{2}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\cos(2k+1)v-$$

$$-\frac{C}{2}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\cos(2k-1)v+\nu_0 r'\cos v,$$

$$\frac{C}{2}u^{-k-\frac{1}{2}}(2-u)^{k+\frac{1}{2}}\sin(2k+1)v+\frac{C}{2}u^{-k+\frac{1}{2}}(2-u)^{k-\frac{1}{2}}\sin(2k-1)v+\nu_0 r'\sin v,$$
$$Cu^{-k}(2-u)^{k}\cos 2kv+\nu_0).$$

Интегрируя затем выражение $d\overset{2}{\bar z}=[\overset{2}{\bar y}\,d\bar r]+[\bar y\,d\bar z],$ найдём поле ускорений $\overset{2}{\bar z}$, третья компонента которого имеет следующее выражение:

$$(\overset{2}{\bar z}\,\bar k)=-\frac{1}{2k(k^2-1)}(1+k(1-u))u^{-k}(2-u)^{k}\cos 2kv+\varphi_0(u),$$

где $\varphi_0(u)$ получается интегрированием нулевого коэффициента Фурье функции $-(\bar z_u)^2$. Выберем значение аддитивной произвольной постоянной в выражении $\varphi_0(u)$ так, чтобы имело место равенство $\varphi_0(1-\frac{1}{k})=0$. Тогда на граничной параллели $u=1-\frac{1}{k}$ сферического сегмента выполняется равенство $(\overset{2}{\bar z}\,\bar k)=0$, то есть найденное бесконечно малое изгибание второго порядка является *скользящим*.

Единственность следует из единственности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка (10) (подробности, ввиду ограниченности объёма статьи, опускаем).

Об аналитичности найденного бесконечно малого изгибания в окрестности северного полюса см. ниже замечание 2.

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из формул (4) и (11) следует, что при найденных бесконечно малых изгибаниях сегментов северный полюс сферы является точкой конгруэнтности.

Замечание 2. Рассматриваемая параметризация сферического сегмента не является регулярной в окрестности полюса $u=2$, так как в этой точке $r'(u)$ обращается в бесконечность. Если перейти в окрестности северного полюса к параметрам $x,\,y$, полагая

$$\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ u = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

и, таким образом, устранить особенность параметризации, то найденные выше векторные функции $\bar{z}$ и $\overset{2}{\bar{z}}$ будут аналитичны по x и y в окрестности полюса $u = 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Liebmann H. Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen // Münchener Berichte. 1920. S. 21−48.
2. Rembs E. Über Gleitverbiegungen // Math. Ann. 1935. Bd. 111, № 4. S. 587−595.
3. Марков П.Е. Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Мат. сборник. 1987. Т. 133. № 1. С. 64−85.
4. Климентов С.Б. О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Мат. заметки. 1984. Т. 36. в. 3. С. 393−403.
5. Климентов С.Б. Варьированное уравнение Бианки-Дарбу // Настоящий сборник. С. 41–44.
6. Моденов П.С. Сборник задач по дифференциальной геометрии. М.: Учпедгиз, 1949. С. 230.

О.Б. Кожевников

ВПОЛНЕ ПРОСТЫЕ ПОЛУГРУППОИДЫ

В.В. Вагнер для геометрических целей ввел и подробно исследовал понятие полугруппоида, как нулевого ограничения [1] произвольной полугруппы с нулем. Иными словами, полугруппоид – это частичный группоид S, (заданный в мультипликативной терминологии), удовлетворяющий следующему условию сильной ассоциативности

$$(\forall x, y, z \in S) \ \ (xy)z \neq \varnothing \vee x(yz) \neq \varnothing \ \rightarrow \ (xy)z = x(yz)$$

Для любой полугруппы S обозначим

$$S^* = \begin{cases} S \setminus \{0\}, \textit{если } S \textit{ содержит ноль, не являющийся внешним,} \\ S, \textit{если } S \textit{ содержит внешний ноль, либо нуля не содержит.} \end{cases}$$

Тогда S^* – полугруппоид.

Для любого полугруппоида S обозначим

$$S^0 = \begin{cases} S \cup \{0\}, \textit{нулевое расширение } S, \textit{если операция в } S \textit{ не всюду определена,} \\ S, \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда S^0 – полугруппа.

Операторы (*), $\circ$ взаимно обратны в следующем смысле: ${S^*}^0 = S$ для любой полугруппы S и ${S^0}^* = S$ для любого полугруппоида S.

Полугруппы – это в точности те полугруппоиды, операция в которых всюду определена. При изучении полугруппы S при помощи соответствующего полугруппоида S^* часто возникающий вопрос: содержит S нуль или нет, становится не существенным. Рассматривая, например, так называемые вполне простые полугруппоиды, мы одновременно рассматриваем вполне простые полугруппы с нулем и вполне простые полугруппы без нуля.