

УДК 521.1

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ В ОДНОРОДНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ В СЛУЧАЕ КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ КОНЕЧНОГО ПРОМАХА ПО РАДИУС-ВЕКТОРУ И ВЕКТОРУ СКОРОСТИ

Г. Е. Кузмак

Рассматривается задача об оптимальном управлении материальной точкой при движении ее в пустоте в однородном центральном поле тяготения в случае, когда векторы конечного промаха по радиус-вектору и вектору скорости коллинеарны. Детально рассмотрена задача о переходе между произвольными пересекающимися орбитами. Полученные результаты применимы при произвольных законах изменения величины тяги, что позволяет использовать их для построения системы управления, компенсирующей возмущения в величине тяги. Комбинация решения этой задачи и решения задачи о перелете в точку, полученного автором ранее, используется затем для построения траектории перелета с двумя активными участками при произвольных граничных условиях. Решения всех рассмотренных в работе задач получены в виде аналитических формул и достаточно наглядных графиков.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается задача об оптимальном управлении материальной точкой при движении ее в пустоте в однородном центральном поле тяготения. Как показано в работе [1], для такого поля соотношения, обеспечивающие выполнение граничных условий в конечный момент $t = T$, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T \vec{a}(\xi) \sin \nu (T - \xi) d\xi &= \nu \Delta \vec{r}(T); \\ \int_0^T \vec{a}(\xi) \cos \nu (T - \xi) d\xi &= \Delta \vec{V}(T), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где

$$\Delta \vec{r}(T) = \vec{r}(T) - \vec{r}_0(T); \quad \Delta \vec{V}(T) = \vec{V}(T) - \vec{V}_0(T); \quad \nu = \sqrt{\frac{g_{\text{ср}}}{r_{\text{ср}}}}; \quad (1.2)$$

$\vec{a}(t)$ — вектор управляющего ускорения;

$r_{\text{ср}}$ — средний радиус шарового слоя, в котором происходит движение;

$g_{\text{ср}} = \frac{\mu}{r_{\text{ср}}^2}$ — ускорение силы притяжения в средней точке слоя.

Через $\vec{r}(T)$ и $\vec{V}(T)$ здесь обозначены значения радиус-вектора и вектора скорости при $t=T$, которые предполагаются заданными; $\vec{r}_0(T)$ и $\vec{V}_0(T)$ представляют собой значения радиус-вектора и вектора скорости при $t=T$, которые получились бы, если бы движение при $0 \leq t \leq T$ происходило при $\vec{a}(t)=0$. Таким образом, векторы $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ представляют собой невязки в граничных условиях при $t=T$, которые должны быть выбраны в результате действия $\vec{a}(t)$. Это дает основание называть векторы $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ векторами конечного промаха. В настоящей статье рассматривается случай, когда эти векторы коллинеарны:

$$\Delta \vec{r}(T) \times \Delta \vec{V}(T) = 0. \quad (1.3)$$

Поставим задачу о таком выборе $\vec{a}(t)$, при котором бы выполнялись условия (1.1), неравенство $a(t) \leq a_{\text{max}}(t)$, где $a_{\text{max}}(t)$ — заданная функция, и был минимален интеграл

$$I = \int_0^T a(\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

В работе [1] показано, что для такой задачи при условии (1.3) существует коллинеарная с векторами $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ „прямая управления“, которой при оптимальном управлении параллелен вектор $\vec{a}(t)$. В процессе движения могут происходить лишь изменения ориентации этого вектора на π . Однако результаты, полученные в [1], не позволяют указать моменты и число изменений направления, а также количество и расположение активных участков. Перейдем к решению этих вопросов.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В качестве положительного направления на прямой управления выберем направление $\vec{a}(t)$ на первом активном участке. Функции $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$ будем считать положительными, если направления векторов $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ совпадают с этим направлением. Можно считать, что на каждом активном участке направления тяги постоянно, а если происходит изменение направления $\vec{a}(t)$, то в этот момент начинается следующий активный участок. Введем в равенствах (1.1) и (1.4) новую переменную интегрирования q :

$$\frac{dq}{d\xi} = a(\xi). \quad (2.1)$$

мгновенно получает приращение, равное π . Если такие точки существуют, то конечное значение ω в дополнении к (2.5) будет равняться $k\pi$, где k — число перемен знака функции $\sigma(q)$. При таком определении угла ω в интегралах, стоящих в левых частях равенств (2.2), следует положить $\sigma(q) \equiv 1$, и тогда они оказываются проекциями указанной кривой на оси координат. В соответствии с этим любая кривая, выходящая из начала координат и оканчивающаяся в точке B (см. фиг. 1, a) с координатами $\Delta V(T)$ и $\Delta r(T)$, обеспечивает выполнение граничных условий; длина же этой кривой равняется I . Решение рассматриваемой вариационной задачи дается той из этих кривых, которая имеет наименьшую длину и, кроме того, удовлетворяет условию (2.6), которое представляет собой ограничение, налагаемое на кривизну кривой $\frac{d\omega}{dq}$.

Ясно, что на пассивных участках приращение q равняется нулю, а $\Delta\omega_{\text{п}}$ в соответствии с (2.3) равняется $-\nu\Delta t_{\text{п}}$, где $\Delta t_{\text{п}}$ — продолжительность пассивного участка. Таким образом, пассивные участки моделируются на указанной кривой угловыми точками, в которых ω уменьшается.

Длина кривой, соединяющей начало координат и конечную точку (см. фиг. 1, a) с координатами $\Delta V(T)$ и $\Delta r(T)$, будет наименьшей в том случае, когда используемая кривая во всех своих точках имеет наименьшую кривизну. Из этого в соответствии с (2.4) — (2.6) следует, что величина ускорения $a(t)$ при оптимальном управлении всегда должна иметь граничное значение $a_{\text{max}}(t)$.

Рассмотрим далее случай, когда отсутствуют активные участки, на которых вектор $\vec{a}(t)$ направлен в отрицательную сторону „прямой управления“ (см. фиг. 1, a). Соединим начало координат и конечную точку кривой с наименьшей возможной кривизной во всех ее точках. Эта кривая соответствует режиму управления с активным участком, расположенным внутри интервала $0 < t < T$. Пассивные участки в этом случае располагаются в начале и в конце траектории и их величины определяются углами $\Delta\omega_{\text{сн}}$ и $\Delta\omega_{\text{тн}}$, указанными на фиг. 1, a . Пассивный участок внутри интервала $0 < t < T$ соответствует кривой с изломом, которая имеет большую длину, чем кривая без излома, и, следовательно, такой режим управления не является оптимальным. Включение активного участка с отрицательным направлением $\vec{a}(t)$, очевидно, также приведет лишь к увеличению длины кривой. Таким образом, во всех тех случаях, когда конечная точка B может быть достигнута с помощью кривой, соответствующей режиму управления с одним активным участком, расположенным внутри интервала $0 < t < T$, этот режим обеспечивает минимальное значение I . Из схемы, изображенной на фиг. 1, a , видно, что при управлении с одним активным участком можно построить решения лишь для конечных точек B , лежащих между положительным направлением оси абсцисс и прямой, выходящей из начала координат и составляющей угол νT с этой осью. Очевидно, что при таком управлении и $\nu T \leq \pi/2$ нельзя достигнуть ни одной конечной точки, для которой $\Delta r(T) < 0$ или $\Delta V(T) < 0$.

Остановимся на случае, когда после первого активного участка с положительным направлением $\vec{a}(t)$ существует второй активный участок, на котором направление $\vec{a}(t)$ отрицательно. Возможные

расположения кривых в этом случае изображены на фиг. 1, б. Кривая наименьшей длины строится следующим образом. Из начала координат проводится кривая 1, имеющая наименьшую кривизну и касающаяся в начале координат прямой, наклоненной к оси абсцисс под углом νT . Далее из конечной точки B по касательной к линии $\nu \Delta r = \text{const}$ проводится кривая 2, также имеющая во всех своих точках наименьшую возможную кривизну. Кривые 1 и 2 продолжают до момента их пересечения. Угол, который они образуют между собой в точке пересечения $\Delta \omega_n$, определяет продолжительность пассивного участка, разделяющего активные. Ясно, что активные участки примыкают к концам промежутка $0 \leq t \leq T$. Построенная таким образом кривая определяет оптимальное решение, позволяющее достигнуть конечные точки, соответствующие отрицательным значениям $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$. Таким образом, рассмотренный режим оптимального управления весьма существенно расширяет область возможных значений $\nu \Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$, при которых существует решение рассматриваемой задачи.

Более детальный анализ возможного расположения кривых в рассматриваемой плоскости показывает, что при $\nu T \leq \pi/2$ никаких других режимов оптимального управления, кроме описанных, не существует. Следует отметить, что этот результат согласуется с результатами работы [2].

Рассмотренная геометрическая интерпретация может использоваться при оптимальном выборе зависимости $a_{\max}(t)$, которая связана с распределением массы летательного аппарата между ступенями.

3. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ $a_{\max} = \text{const}$

Рассмотрим сначала режим оптимального управления с одним активным участком. Для этого режима граничные условия (1.1) могут быть преобразованы к виду

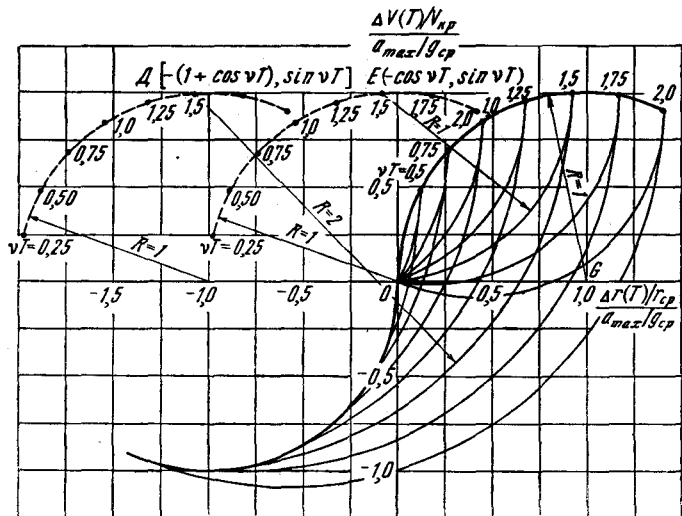
$$\left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{\nu \Delta t_a}{2} \sin \nu (T - t_{a. \text{cp}}) &= \frac{\Delta r(T)/r_{\text{cp}}}{a_{\max}/g_{\text{cp}}} ; \\ 2 \sin \frac{\nu \Delta t_a}{2} \cos \nu (T - t_{a. \text{cp}}) &= \frac{\Delta V(T)/V_{\text{кр}}}{a_{\max}/g_{\text{cp}}} . \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь Δt_a — продолжительность активного участка, $t_{a. \text{cp}}$ — положение середины активного участка. Решение системы (3.1), имеющее физический смысл, должно удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \nu \Delta t_a &\geq 0; \quad \nu t_{a. \text{cp}} - \frac{\nu \Delta t_a}{2} \geq 0; \\ \nu t_{a. \text{cp}} + \frac{\nu \Delta t_a}{2} &\leq \nu T, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

выражающим факт существования активного участка внутри интервала $0 < t < T$. Область допустимых значений $\nu \Delta t_a$ и $\nu t_{a. \text{cp}}$ представляет собой внутреннюю область треугольника, отображение границ которой на плоскость параметров $\frac{\Delta r(T)/r_{\text{cp}}}{a_{\max}/g_{\text{cp}}}$ и $\frac{\Delta V(T)/V_{\text{кр}}}{a_{\max}/g_{\text{cp}}}$ может быть получено с помощью равенства (3.1) (фиг. 2). Сторона, на которой $\Delta t_a = 0$, переходит в начало координат; стороны же, на

которых обращаются в равенства последние два неравенства (3.2) — в дуги окружностей. Центр окружности, на которой $\nu t_{a. \text{cp}} = \frac{\nu \Delta t_a}{2}$, располагается в точке E (см. фиг. 2) с координатами $(-\cos \nu T, \sin \nu T)$, а радиус равен единице. Центр окружности, на которой $\nu t_{a. \text{cp}} = \nu T - \frac{\nu \Delta t_a}{2}$, располагается в точке G (см. фиг. 2) с координатами $(1, 0)$, радиус равен единице. При изменении νT в качестве границы используются разные по величине дуги этой окружности. Нетрудно убедиться в том, что преобразование (3.1) переводит область, определяемую неравенствами (3.2), в чечевицеобразную область, ограниченную дугами указанных окружностей.



Фиг. 2

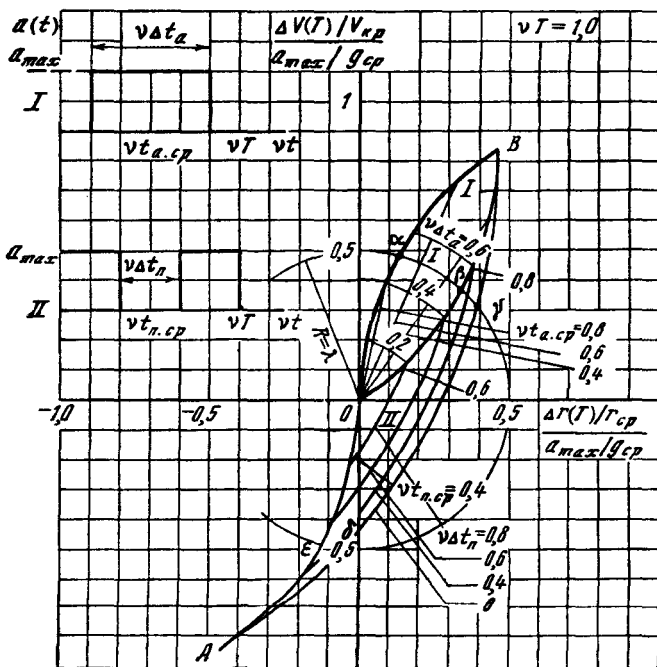
Определяемые таким образом области существования режима с одним активным участком в координатах $\frac{\Delta r(T)/r_{\text{ср}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}}$, $\frac{\Delta V(T)/V_{\text{кр}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}}$ при различных значениях νT построены на фиг. 2. При $\nu T \leq \pi/2$ они расположены в первом квадранте и уменьшаются с уменьшением νT .

С помощью формул (3.1) можно построить линии $\nu \Delta t_a = \text{const}$ и $\nu t_{a. \text{cp}} = \text{const}$. Из этих формул видно, что семейство линий $\nu \Delta t_a = \text{const}$ состоит из окружностей с центром в начале координат и радиусами, равными $2 \sin \frac{\nu \Delta t_a}{2}$. Семейство же линий $\nu t_{a. \text{cp}} = \text{const}$ представляет собой семейство прямых, выходящих из начала координат и составляющих угол с осью ординат, равный $\nu(T - t_{a. \text{cp}})$. Физический смысл имеют части этих линий, расположенные внутри области существования.

Линии $\nu \Delta t_a = \text{const}$ и $\nu t_{a. \text{cp}} = \text{const}$ при $\nu T = 1,0$ изображены на фиг. 3. Область существования режима с одним активным участком обозначена на ней цифрой 1. Из формул (3.1) нетрудно получить явные выражения для $\nu \Delta t_a$ и $\nu t_{a. \text{cp}}$.

Интересно отметить, что $\nu \Delta t_a$ не зависит явно от продолжи-

тельности движения T . Зависимость от T проявляется только через зависимости $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$. Нет явной зависимости от T также и у времени движения от конца активного участка до конца перелета $t=T$. Влияние T явно сказывается лишь на размерах области существования решения и на длине пассивного участка, с которого начинается движение.



Фиг. 3

Перейдем далее к анализу режима оптимального управления с двумя активными участками, примыкающими к концам промежутка $0 \leq t \leq T$, на которых направления $\vec{a}(t)$ противоположны. Для этого случая граничные условия (1.1) при $a_{\max}(t) = \text{const}$ могут быть преобразованы к виду

$$\left. \begin{aligned} 2 \cos \frac{v \Delta t_{\text{п}}}{2} \cos v(T - t_{\text{п. ср}}) &= \frac{\Delta r(T)/r_{\text{ср}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}} + 1 + \cos vT; \\ 2 \cos \frac{v \Delta t_{\text{п}}}{2} \sin v(T - t_{\text{п. ср}}) &= \frac{\Delta V(T)/V_{\text{кр}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}} + \sin vT. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Здесь через $\Delta t_{\text{п}}$ обозначена продолжительность пассивного участка, разделяющего активные участки, а через $t_{\text{п. ср}}$ — положение его середины (см. фиг. 3). Условия существования рассматриваемого режима управления представляют собой неравенства

$$v \Delta t_{\text{п}} \geq 0; \quad v t_{\text{п. ср}} - \frac{v \Delta t_{\text{п}}}{2} \geq 0; \quad v t_{\text{п. ср}} + \frac{v \Delta t_{\text{п}}}{2} \leq vT. \quad (3.4)$$

Эти условия выражают факт существования пассивного участка внутри промежутка $0 \leq t \leq T$. Границы области, определяемой неравенствами (3.4), при преобразованиях при помощи (3.3) переходят в дуги окружностей. Центр окружности, на которой $v \Delta t_{\text{п}} = 0$,

располагается в точке D (см. фиг. 2) с координатами $[-(1 + \cos \nu T), \sin \nu T]$, а радиус окружности равен 2. Центр окружности, на которой $\nu t_{п. ср} = \frac{\nu \Delta t_{п}}{2}$, располагается в точке F , а радиус равен еди-

нице. Окружность, на которой $\nu t_{ср} = \nu T - \frac{\nu \Delta t_{п}}{2}$, совпадает с окружностью, определяющей правую границу области существования режима управления с одним активным участком. Области существования режима управления с двумя активными участками построены на фиг. 2 для тех же значений νT , что и области существования режима с одним активным участком. Из фигуры видно, что при управлении с двумя активными участками при $\nu T \leq \pi/2$ можно попасть в конечные точки, лежащие в третьем и четвертом квадрантах плоскости $\frac{\Delta r(t)/r_{ср}}{a_{\max}/g_{ср}}, \frac{\Delta V(T)/V_{кр}}{a_{\max}/g_{ср}}$ (см. разд. 2). При уменьшении νT область существования режима с двумя активными участками также уменьшается.

Равенства (3.3) позволяют построить семейства линий $\nu \Delta t_{п} = \text{const}$ и $\nu t_{п. ср} = \text{const}$. В рассматриваемом случае семейство линий $\nu \Delta t_{п} = \text{const}$ представляет собой семейство окружностей с центром в точке D (см. фиг. 2) и радиусом, равным $2 \cos \frac{\nu \Delta t_{п}}{2}$. Семейство же линий $\nu t_{п. ср} = \text{const}$ представляет собой пучок прямых с вершиной в точке D , составляющих угол $-\nu(T - t_{п. ср})$ с положительным направлением оси абсцисс. Физический смысл имеют лишь те части указанных линий, которые расположены внутри области существования.

Семейства этих линий при $\nu T = 1,0$ показаны на фиг. 3. Там же указана область существования режима с двумя активными участками, обозначенная цифрой II. Формулы (3.3) позволяют получить явные выражения для суммарной продолжительности активных участков $T - \Delta t_{п}$, определяющей значение интеграла I , и для $t_{п. ср}$. Формулы (3.1) и (3.3) и графики фиг. 3, будучи построены для различных значений νT , дают полное решение задачи синтеза оптимального управления в случае коллинеарности векторов $\vec{\Delta r}(T)$ и $\vec{\Delta V}(T)$.

4. ВОЗМОЖНЫЕ СЛУЧАИ КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

$$\vec{\Delta r}(T) \text{ и } \vec{\Delta V}(T)$$

Будем считать, что до начала и после окончания перелета движение происходит по орбитам, уравнения которых в соответствии с [1] могут быть записаны в следующем виде:

начальная орбита

$$\vec{r}_0(\tau_0) = \vec{r}_{00} \cos \nu \tau_0 + \frac{\vec{V}_{00}}{\nu} \sin \nu \tau_0; \quad \vec{V}_0(\tau_0) = \vec{V}_{00} \cos \nu \tau_0 - \vec{r}_{00} \sin \nu \tau_0, \quad (4.1)$$

конечная орбита

$$\vec{r}(\tau_1) = \vec{r}_{10} \cos \nu \tau_1 + \frac{\vec{V}_{10}}{\nu} \sin \nu \tau_1; \quad \vec{V}(\tau_1) = \vec{V}_{10} \cos \nu \tau_1 - \vec{r}_{10} \sin \nu \tau_1. \quad (4.2)$$

Через τ_0 и τ_1 здесь обозначено время движения соответственно по начальной и конечной орбитам, отсчитываемое от некоторых начальных состояний, характеризующихся векторами $\vec{r}_{00}$, $\vec{V}_{00}$ и $\vec{r}_{10}$, $\vec{V}_{10}$.

Предположим, что между временами τ_0 и τ_1 имеется следующая связь:

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau. \quad (4.3)$$

При таком предположении выражения (1.2) для $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ записываются в виде

$$\Delta \vec{r}(T) = \Delta \vec{r}_0 \cos v\tau + \frac{\Delta \vec{V}_0}{v} \sin v\tau; \quad \Delta \vec{V}(T) = \Delta \vec{V}_0 \cos v\tau - v \Delta \vec{r}_0 \sin v\tau, \quad (4.4)$$

где

$$\Delta \vec{r}_0 = \vec{r}_{10} - \vec{r}_{00}; \quad \Delta \vec{V}_0 = \vec{V}_{10} - \vec{V}_{00}. \quad (4.5)$$

С учетом этих равенств условие (1.3) коллинеарности векторов $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ преобразуется к форме

$$\Delta \vec{r}_0 \times \Delta \vec{V}_0 \cos 2v\tau = 0. \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что векторы $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ коллинеарны в следующих случаях:

$$1) \Delta \vec{r}_0 = 0; \quad 2) \Delta \vec{V}_0 = 0; \quad 3) \Delta \vec{r}_0 \parallel \Delta \vec{V}_0; \quad 4) \cos 2v\tau = 0. \quad (4.7)$$

Отметим, что в первых трех случаях коллинеарность имеет место при произвольных τ .

Случай $\Delta \vec{r}_0 = 0$ соответствует переходу между орбитами, имеющими точку пересечения, а случай $\Delta \vec{V}_0 = 0$ — переходу между орбитами, у которых в некоторых точках совпадают векторы скорости.

5. ПЕРЕХОД МЕЖДУ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОРБИТАМИ

Рассмотрим задачу о переходе между пересекающимися орбитами. Моменты начала и окончания работы двигателя предполагаются не заданными и подлежат рациональному выбору.

В соответствии с равенствами (4.4) в рассматриваемом случае выражения для $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$ записываются в виде

$$\Delta \vec{r}(T) = \frac{\Delta \vec{V}_0}{v} \sin v\tau; \quad \Delta \vec{V}(T) = \Delta \vec{V}_0 \cos v\tau, \quad (5.1)$$

где τ — время движения от точки пересечения орбит до момента окончания перелета. Отсюда видно, что при $0 \leq v\tau \leq \pi/2$ вектор $\vec{a}(t)$ параллелен вектору $\Delta \vec{V}_0$ и, следовательно, параллелен импульсу тяги, который получается при решении задачи в импульсной постановке.

Рассмотрим сначала случай одного активного участка при произвольной зависимости $a_{\max}(t)$. Очевидно, что в данной задаче

без ограничения общности можно предполагать, что двигатель включается при $t=0$ и выключается при $t=T$. При таких предположениях граничные условия (1.1) записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T a_{\max}(\xi) \sin \nu (T - \xi) d\xi &= \Delta V_0 \sin \nu \tau; \\ \int_0^T a_{\max}(\xi) \cos \nu (T - \xi) d\xi &= \Delta V_0 \cos \nu \tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Эти равенства представляют собой систему уравнений для определения T и τ и могут быть переписаны в виде

$$\sin \nu T \cdot I_c - \cos \nu T \cdot I_s = \Delta V_0 \sin \nu \tau; \quad \cos \nu T \cdot I_c + \sin \nu T \cdot I_s = \Delta V_0 \cos \nu \tau, \quad (5.3)$$

где

$$I_c = \int_0^T a_{\max}(\xi) \cos \nu \xi d\xi; \quad I_s = \int_0^T a_{\max}(\xi) \sin \nu \xi d\xi. \quad (5.4)$$

Отсюда

$$I_c = \Delta V_0 \cos \nu (T - \tau); \quad I_s = \Delta V_0 \sin \nu (T - \tau). \quad (5.5)$$

После возведения этих равенств в квадрат и сложения, получается уравнение для определения T :

$$\sqrt{\left[\int_0^T a_{\max}(\xi) \cos \nu \xi d\xi \right]^2 + \left[\int_0^T a_{\max}(\xi) \sin \nu \xi d\xi \right]^2} = \Delta V_0. \quad (5.6)$$

При известном T можно считать известными интегралы I_c и I_s и определить τ из равенств (5.5).

Найдем теперь координаты точки, соответствующей началу перелета $t=0$, при этом рассуждать будем следующим образом. Если бы точка двигалась по начальной орбите, то за время T она передвинулась бы в точку, время движения до которой по начальной орбите от точки пересечения равнялось τ . Поэтому время движения по начальной орбите до точки пересечения орбит равняется $T - \tau$. В соответствии с этим радиус-вектор и вектор скорости, соответствующие начальной точке траектории перехода, определяются равенствами (4.1) при $\tau_0 = \tau - T$.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_0|_{t=0} &= \vec{r}_{00} \cos \nu (T - \tau) - \frac{\vec{V}_{00}}{\nu} \sin \nu (T - \tau) = \frac{1}{\Delta V_0} \left(I_c \vec{r}_{00} - I_s \frac{\vec{V}_{00}}{\nu} \right); \\ \vec{V}_0|_{t=0} &= \vec{V}_{00} \cos \nu (T - \tau) + \nu \vec{r}_{00} \sin \nu (T - \tau) = \frac{1}{\Delta V_0} (I_c \vec{V}_{00} + I_s \nu \vec{r}_{00}). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Формулы (5.5) — (5.7) справедливы при произвольном законе регулирования тяги и могут быть использованы для построения системы управления траекторий перехода между произвольными пересекающимися орбитами.

Проведем вычисления для случая $a_{\max}(t) = \text{const}$. Имеем

$$I_c = \frac{a_{\max}}{\nu} \sin \nu T; \quad I_s = \frac{a_{\max}}{\nu} (1 - \cos \nu T). \quad (5.8)$$

Из этих равенств и равенств (5.5) следует, что

$$\tau = \frac{T}{2}; \quad 2 \sin \frac{\nu T}{2} = \frac{\Delta V_0/V_{кр}}{a_{\max}/g_{ср}}. \quad (5.9)$$

Таким образом, при $a_{\max}(t) = \text{const}$ траектория перехода симметрична относительно точки пересечения орбит.

Рассмотрим для случая $a_{\max}(t) = \text{const}$ вопрос о всех возможных режимах управления с помощью графиков, приведенных на фиг. 3. В этом случае выражения для безразмерных параметров, откладываемых по осям координат фиг. 3, записываются в виде

$$\frac{\Delta r(T)/r_{ср}}{a_{\max}/g_{ср}} = \lambda \sin \nu \tau; \quad \frac{\Delta V(T)/V_{кр}}{a_{\max}/g_{ср}} = \lambda \cos \nu \tau, \quad (5.10)$$

где

$$\lambda = \frac{\Delta V_0/V_{кр}}{a_{\max}/g_{ср}}. \quad (5.11)$$

При изменении τ и фиксированном λ функции (5.10) определяют окружность с радиусом λ . Угол $\nu \tau$ на фиг. 3 отсчитывается от оси $\frac{\Delta V(T)/V_{кр}}{a_{\max}/g_{ср}}$ по часовой стрелке. Из графиков фиг. 3 видно, что решение рассматриваемой задачи существует лишь в случаях, когда выполняется неравенство

$$\lambda \leq R_B = R_A = 2 \sin \frac{\nu T}{2}. \quad (5.12)$$

Через R_B и R_A здесь обозначены расстояния от точек A и B на фиг. 3 до начала координат. Указанное в (5.12) выражение для этих величин получается, если в соответствии с графиками фиг. 3 принять в равенствах (3.1) $\Delta t_a = T$, $t_{a.ср} = \frac{T}{2}$, а в равенствах (3.3) $\Delta t_n = 0$, $t_{n.ср} = 0$.

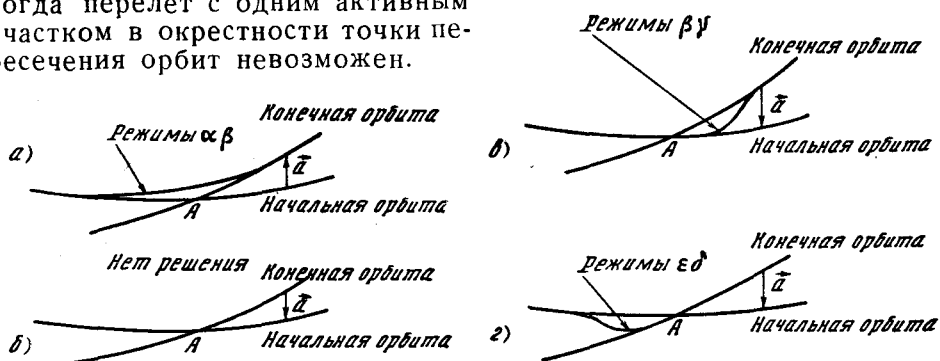
Из фиг. 3 видно, что при значениях λ , удовлетворяющих неравенству (5.12) с запасом, возможны режимы управления как с одним активным участком, так и с двумя. Режимы с одним активным участком соответствуют на фиг. 3 дуге $\alpha\beta$ и отличаются от режима, рассмотренного выше, наличием пассивных участков по краям.

Режимы с двумя активными участками соответствуют на фиг. 3 дугам $\beta\gamma$ и $\epsilon\delta$. Однако из расположения кривых $\nu \Delta t_a = \text{const}$ и $\nu \Delta t_n = \text{const}$ следует, что эти режимы имеют большее значение I , чем режимы с одним активным участком. Покажем, что с их помощью нельзя уменьшить время перелета T . Минимальное значение T , очевидно, соответствует такому расположению кривых, при которых область существования столь мала, что ее крайние точки A и B лежат на окружности с радиусом λ . Если бы R_A было больше R_B , то перелеты с двумя активными участками, соответствующие дуге $\epsilon\delta$, существовали бы при меньших значениях T , чем перелеты с одним активным участком. Поэтому из равенства $R_A = R_B$ следует, что при $a_{\max}(t) = \text{const}$ перелеты с двумя активными участками не позволяют уменьшить время совершения маневра.

Представим себе вид траекторий перелета для всех рассмотренных режимов. Выше было указано, что положительное направ-

ление для $\Delta r(T)$ и $\Delta V(T)$ совпадает с направлением $\vec{a}(t)$ на первом активном участке. Для того чтобы анализ возможных режимов перелета был полным, необходимо рассматривать оба возможных направления вектора $\vec{a}$. Формулы (5.10) для $\frac{\Delta r(T)/r_{\text{ср}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}}$ и $\frac{\Delta V(T)/V_{\text{кр}}}{a_{\text{max}}/g_{\text{ср}}}$ получены для случая, когда направление вектора $\vec{a}(t)$ на первом активном участке совпадает с направлением вектора $\Delta \vec{V}_0$. При изменении направления $\vec{a}(t)$ входящий в эти формулы угол ψ заменяется на угол $\pi + \psi$.

Указанный анализ был выполнен, и результаты его в виде взаимного расположения траектории перехода, начальной и конечной орбит представлены на фиг. 4. Случай *a* и *б* соответствуют перелетам с одним активным участком, случаи *в* и *г* — с двумя. В случае *a* изображена траектория перехода, соответствующая дуге $\alpha\beta$ на фиг. 3; при этом тяга направлена по вектору $\Delta \vec{V}_0$. Случай *б* соответствует противоположному направлению тяги, когда перелет с одним активным участком в окрестности точки пересечения орбит невозможен.



Фиг. 4

В случаях *в* и *г* тяга на первом активном участке направлена, соответственно, по вектору $\Delta \vec{V}_0$ и противоположно ему. В случае *в* возможные режимы перелета определяются дугой $\beta\gamma$ на фиг. 3. Этот перелет заканчивается за точкой пересечения орбит. Случай же *г* соответствует дуге $\epsilon\delta$ на фиг. 3 и заканчивается до точки пересечения орбит или за ней.

6. ПЕРЕЛЕТ С ДВУМЯ АКТИВНЫМИ УЧАСТКАМИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Задачи, рассмотренные в работе [1] и в разд. 5, позволяют решить задачу о переходе из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние. В такой задаче необходимо при выборе $\vec{a}(t)$ удовлетворить одновременно обоим граничным условиям (1.1) при произвольных векторах $\Delta \vec{r}(T)$ и $\Delta \vec{V}(T)$.

Разобьем весь маневр на два этапа. В течение первого этапа управление осуществляется таким образом, чтобы попасть в заданную конечную точку, характеризующуюся вектором $\vec{r}(T)$ (фиг. 5). Такая задача рассматривалась в работе [1]. Там было выяснено,

что для осуществления такого маневра вектор $\vec{a}(t)$ должен быть постоянно ориентирован в пространстве и направлен по вектору $\Delta\vec{r}(T)$, который является известным. Момент включения двигателя совпадает с моментом $t=0$, а для момента выключения двигателя t_k в работе [1] получено уравнение. Приращение вектора скорости к моменту $t=T$ при таком управлении может быть определено с помощью формулы

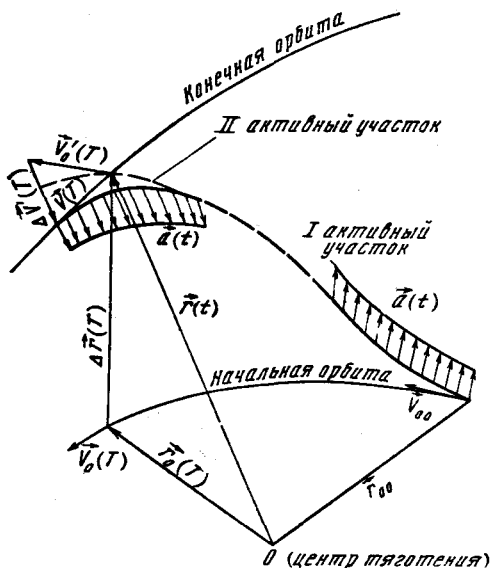
$$\Delta\vec{V}''(T) = \int_0^{t_k} \vec{a}(\xi) \cos \nu(T - \xi) d\xi. \quad (6.1)$$

Соответственно полное изменение вектора скорости $\Delta\vec{V}'$, которое должно быть выбрано на второй фазе маневра, определяется как

$$\Delta\vec{V}'(T) = \Delta\vec{V}(T) - \Delta\vec{V}''(T). \quad (6.2)$$

После того как первая фаза маневра закончена, задача сводится к нахождению перехода между произвольными пересекающимися орбитами (см. разд. 5). В данном случае вектор точки пересечения орбит совпадает с заданным заранее вектором $\vec{r}(T)$, а разность скоростей в точке пересечения орбит равняется $\Delta\vec{V}'(T)$ и после окончания первого активного участка может считаться известной величиной.

Рассмотренная схема перелета с двумя активными участками, на каждом из которых тяга имеет свое постоянное на-



Фиг. 5

правление в пространстве, привлекательна простотой программы изменения ориентации тяги.

Автор выражает признательность Е. И. Арбековой, выполнившей все приведенные здесь расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузмак Г. Е. О некоторых свойствах оптимального управления пространственным движением материальной точки в однородном центральном поле тяготения. Ученые записки ЦАГИ*, т. I, № 5, 1970.
2. Кузмак Г. Е., Исаев В. К., Давидсон Б. Х. Оптимальные режимы движения точки переменной массы в однородном центральном поле. Доклады АН СССР, 149, № 1, 1963.