

## ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

---

**Ключевые слова:**  
системный анализ, риск,  
теория групп

**Н. А. Сердюкова**, д. э. н., зав. кафедрой высшей математики  
Академии бюджета и казначейства Минфина России  
(e-mail: nsns25@yandex.ru)

# Теорема об описании финансовых рисков

Концепция компромисса между риском и доходом (*risk-return trade-off*) является очень важной областью финансовой науки, в связи с чем крайне актуальным представляется решение задачи об описании рисков, в частности, финансовых рисков. Субъект производственной и инвестиционной деятельности неизбежно сталкивается с незапланированными или непредвиденными событиями, на которые необходимо адекватно реагировать с тем, чтобы не понести убытки. Многообразие форм неопределенности и рисков, частота их проявления и тяжесть последствий ослабляют условия стабильного хозяйствования, делают невозможным абсолютное устранение рисков. Это заставляет проводить исследования причинно-следственных связей и путей снижения последствий наступления рисковых событий.

**С**егодняшнее развитие российской экономики, к сожалению, нельзя назвать абсолютно устойчивым. Существует множество факторов, которые подтверждают это (неустойчивость производственных связей, высокая инфляция, высокие процентные ставки по кредитам, мощное регулирующее ценовое воздействие со стороны государства и т. д.). Эти факторы, а также различного характера риски являются серьезным барьером для привлечения инвестиций в экономику.

По Бланку<sup>1</sup> концепция учета фактора риска состоит в объективной оценке его уровня с целью обеспечения формирования необходимой степени доходности финансовых операций и разработки системы мероприятий, минимизирующих его негативные финансовые последствия. Прежде чем решать этот вопрос, необходимо понять, что такое риск.

Поэтому остановимся на понятии риска и на тесно связанном с этим вопросом аспекте построения долгосрочных прогнозов.

Один из самых распространенных методов экономико-математического моделирования — построение вероятностных моделей, а один из самых важных аспектов построения вероятностной модели — это учет возникающих при этом рисков отклонения событий от их прогнозируемого развития. Например, вероятностные модели оптимизации портфеля ценных бумаг, самые известные из них — модели Марковица и Шарпа, — являются двукритериальными, и одна из целевых функций каждой из этих моделей — минимизация риска портфеля, измеряющегося стандартным отклонением. В отечественной и зарубежной литературе по математическому моделированию име-

<sup>1</sup> Бланк И.А., Энциклопедия финансового менеджера. Том 1. Концептуальные основы финансового менеджмента — М.: «Омега-Л», 2008. — 448 с.

ется большая серия работ, посвященных моделированию банковского управления рисками. В финансовом анализе подробно изучаются различные категории финансовых рисков. Аспекты риска учитываются и учитывались в практической деятельности. Согласно приказу Минфина России от 31.10.2000 г. № 94н, предусматривалась возможность создания организациями оценочных резервов (под снижение стоимости материальных ценностей); резервов под обесценение вложений в ценные бумаги; резервов по сомнительным долгам. В налогообложении предусматривается формирование резервов под риски. Но хотя вычислительная сторона этого вопроса — количественные измерители рисков — разработана, на первый взгляд, достаточно тщательно, тем не менее, самая суть вопроса, связанная с общим определением риска, исследована недостаточно. Отсутствие четкого, ясного и исчерпывающего представления о том, что такое риск, делает сложным прогнозирование и предотвращение создания рисковых ситуаций как на макро-, так и на микроуровне.

Мы определим финансовый риск следующим образом.

**Финансовый риск** — система финансовых факторов, во взаимодействии с внешними и внутренними условиями функционирования определяющая реальные события финансового сектора.

Выделяя основные финансовые факторы, определяющие реальные события финансового сектора, и принципы системного подхода, попытаемся разобраться в сути понятия риска и в вопросе возможности построения долгосрочных прогнозов.

**Системный анализ** является одним из сравнительно новых практических методов оценки и управления рисками в экономике и финансах. Системным анализом называется изучение структурных свойств системы — совокупности элементов и связей между ними, обладающей определенной целостностью — с помощью их качественного и количественного анализа: эмпирических, математических методов, методов математической логики, а также методов моделирования.

Одной из самых важных задач системного анализа является задача декомпозиции, которая означает представление системы в виде подсистем, состоящих из более мелких элементов. Декомпозиция обычно рассматривается как составная часть задачи анализа. Задача анализа в свою очередь, состоит в описании свойств системы, определяющих ее поведение.

Системный подход — направление методологии научного познания и социальной практики, в основе которого лежит рассмотрение объектов как систем; он ориентирует исследование на раскрытие целостности объекта, на выявление многообразных типов связей в нем и сведение их в единую теоретико-практическую картину. Принципы системного подхода нашли применение прежде всего в биологии, экологии, психологии, кибернетике, технике.

Термины «теория систем» и «системный анализ» или, более кратко — системный подход, несмотря на большой период их использования<sup>2</sup>, все еще не нашли общепринятого истолкования. Сложность применения системного подхода в экономике и финансах кроется в динамичности процессов в области человеческой деятельности, невозможности использования эксперимента, в отсутствии четкой и строгой формализации понятий и методов системного подхода, а также и в том, что согласно теореме Геделя о неполноте, имеющей огромное философское значение, нельзя описать систему, используя свойства и средства только этой системы.

---

<sup>2</sup> Основателем обобщенной системной концепции под названием «Общая теория систем» является Карл Людвиг фон Берталанфи (*Ludwig von Bertalanffy*, 1901 — 1972) — австрийский биолог, постоянно проживавший в Канаде и США с 1949 года. Он — первый постановщик системных задач, прежде всего в сфере разработки описаний типологически несходных систем с помощью математического аппарата.

В определении понятия «система» есть варианты, использующие как философские подходы, так и сугубо практические, побуждающие к решению чисто практических задач системного плана. Мы будем понимать под системой совокупность отдельных объектов с четкими структурными связями между ними, и рассматривать системы как способ существования окружающего нас мира. Система структурных связей является подсистемой исходной или изучаемой системы, обеспечивающей ее существование. Основные понятия теории систем вводятся на теоретико-множественном уровне и между ними устанавливаются взаимосвязи. Система определяется прежде всего как некоторое отношение на абстрактных множествах, а затем дается оценивание временных и динамических систем как систем на множествах абстрактных функций времени. Для того, чтобы иметь возможность определять системы различных типов более четко, вводятся вспомогательные функции и объекты, такие как состояние, глобальное состояние, глобальная реакция системы. Тогда функционирование сложной системы можно представить как совокупность двух функций времени: одна описывает внутреннее состояние системы, а другая — выходной процесс системы. Обе функции зависят, с одной стороны, от воздействия внешней среды на систему, т. е. входного процесса системы, и с другой стороны, от воздействия случайных факторов, присущих самой системе.

**Системный подход** дает возможность ставить и решать две задачи:

- расширять и углублять представления о взаимодействии объектов в системе; изучать и, возможно, открывать новые ее свойства посредством изучения структуры внутрисистемных и внешних связей;
- изменять эффективность системы в различных направлениях ее функционирования, что дает возможность управлять системой.

Рассмотрим экономические и финансовые системы. Финансовая система при этом будет подсистемой структуры связей экономической системы. Интерес представляет глобальная задача системного подхода — совершенствование процесса управления, в нашем случае — экономикой и финансами.

Теория систем и системный анализ как отрасль науки могут быть разделены на две условные части:

- теоретическую, использующую такие отрасли знания, как теория вероятностей, теория информации, теория игр, теория графов и др.;
- прикладную, основанную на прикладной математической статистике, методах исследования операций и т. п.

Выделим основные принципы системного подхода:

1. совокупность элементов системы рассматривается как одно целое (запрет на рассмотрение системы как простого объединения элементов);

2. свойства системы — не просто сумма свойств ее элементов. Система может обладать особыми свойствами, которых может и не быть у отдельных элементов. Исследователь, используя системный подход, сначала проводит декомпозицию системы на подсистемы и элементы, определяет цели их функционирования, критерии оценки их эффективности, строит модели их функционирования, а затем проводит их последовательный синтез в модель системы.

В качестве финансовых факторов, определяющих риск как систему, можно рассматривать

на макроуровне:

1. фискальную политику государства;
2. монетарную политику государства;
3. государственное законодательство;
4. структуру потоков денежных средств в консолидированном бюджете государства;
5. финансовые ресурсы государства и мирового хозяйства;

6. уровень глобализации финансовых ресурсов мирового хозяйства;
7. уровень золотовалютных резервов государства;
8. объем и структуру государственного внешнего долга;
9. уровень либерализации в национальной и мировой экономической деятельности;
10. объемы сбережений, потребления и инвестиций;
11. структуру спроса и предложения;
12. банковскую систему.

на микроуровне:

1. финансовую стратегию и тактику предприятия;
2. структуру потоков денежных средств предприятия;
3. финансовые ресурсы предприятия;
4. структуру собственных и заемных средств предприятия.

В качестве элементов системы структурных связей в рамках системного подхода при оценке финансовых рисков в экономике можно рассматривать связи между перечисленными позициями.

Количество факторов и структурных связей может быть значительно расширено в зависимости от цели управления рисками. Однако при построении математической модели системы структурных связей необходима оптимизация выбора доминирующих связей, поскольку адекватный анализ огромного числа параметров вряд ли возможен.

Следующий принцип теории систем и системного анализа запрещает рассматривать систему в отрыве от окружающей ее среды. Это означает, что анализируемая система рассматривается как часть (подсистема) некоторой более общей системы.

Принцип учета внешней среды приводит к принципу декомпозиции, то есть к принципу деления данной системы на подсистемы. Если последние оказываются недоступными для анализа, с ними поступают точно также. В процессе декомпозиции нельзя нарушать предыдущие принципы — пока они действуют, декомпозиция оправдана, поскольку гарантирует применимость алгоритмов решения задач системного анализа.

Поскольку теория систем носит междисциплинарный характер, то в ней используется высокий уровень абстракции. Абстрактная теория систем насчитывает девять уровней: символический или лингвистический, теоретико-множественный, абстрактно-логический, топологический, логико-математический, теоретико-информационный, динамический, эвристический<sup>3</sup> и синергетический. На последнем остановимся подробнее.

Возникновение синергетики связано, с одной стороны, с созданием в 1970-х годах общей физической теории критических явлений, а с другой стороны, с пересмотром возможностей динамического подхода к описанию физических систем.

Выяснилось, что применение **динамических методов** к системам многих взаимодействующих подсистем невозможно. Выход пытались найти в отказе от полного детерминированного<sup>4</sup> описания таких систем и переходе к частично детерминированному описанию с использованием малого числа параметров. Идеология этого подхода близка к динамической.

На другой идеологии основано понятие **вероятностного прогнозирования** поведения системы. Однако и в этом случае динамический подход оказывает влияние. Он проявляется в том, что вероятностный характер поведения системы объясняют на основе неполноты ее описания, то есть предположения о существовании скрытых

---

<sup>3</sup> Могилевский В.Д. Методология систем. — М.: «Экономика», 1999.

<sup>4</sup> Детерминизм — теория, согласно которой результаты развития системы полностью предопределены. Система детерминированного хаоса является системой, которая демонстрирует кажущиеся случайными результаты даже тогда, когда эти результаты порождаются системой уравнений.

динамических параметров, подчиняющихся более точной динамической теории. Поведение реальной динамической системы больше похоже на хаотическое, случайное. Характерная особенность неорганизованной среды или хаоса заключается в ее однородности, аморфности, устойчивости. Информационная оценка хаотического состояния соответствует максимуму энтропии<sup>5</sup>. Максимум энтропии находит проявление в слабой чувствительности среды к действию возмущений: информационные, производственные внешние воздействия быстро затухают, не давая ощутимого эффекта. Свойства неорганизованной среды в настоящее время позволяют характеризовать ее состояние только стабильными детерминированными вероятностными оценками, с помощью которых невозможно прогнозировать развитие системы. В связи со случайностью и хаотичностью изменения возникают вопросы о возможности надежных долгосрочных прогнозов в различных областях жизнедеятельности систем.

Приведем пример из области экономики. Вопрос о возможности построения долгосрочных достоверных прогнозов в экономике занимает особое место. В работах лауреатов Нобелевской премии по экономике 2004 года Кидланда и Прескотта показано, что если в государственной экономической политике преобладают долгосрочные цели, то они приносят лучший результат, чем в случае, когда преобладают краткосрочные цели, которые кажутся удачными, и политика «немедленного реагирования». Задача осуществления долгосрочных планов является гораздо более сложной, чем реализация краткосрочных и среднесрочных программ.

Возможно поэтому многие экономические решения, связанные с воплощением в жизнь долгосрочных проектов, потерпели неудачу. Так, при долгосрочном планировании в СССР не учитывался системный подход: максимизировалась продукция различных секторов экономики, но они не были соединены в единую экономическую систему. Результат всем хорошо известен...

Для изменения состояния хаоса, кроме силового воздействия на всю среду, может быть выбран и другой путь. Нарушим состояние равновесия в локальных участках среды, вводя порядок и организованность. Это приведет к уменьшению энтропии. Процессы в этих областях станут сильнее коррелировать с начальными условиями, тем самым создадутся предпосылки к прогнозированию событий на таких участках. Хаос структурируется, появляются зоны с устойчивым состоянием составляющих единиц.

**Методология динамики** ориентирована на изучение движения как следствия причин, его вызывающих или изменяющих. В теории систем под движением понимается изменение состояния, обусловленное внешними и внутренними причинами. Таким образом, движение — проявление внутренних процессов системы и влияние на систему внешних факторов. Движение системы — самая существенная ее характеристика, поскольку полностью раскрывает свойства системы и позволяет соотнести ее состояние с требуемым — целью. Отсюда вытекает последующая задача: воздействовать на систему, или управлять системой так, чтобы привести ее в требуемое состояние. Поэтому динамические свойства системы характеризуются посредством изменения параметров или факторов, определяющих ее состояние. Для наглядности параметры, определяющие состояние системы, интерпретируются в  $n$ -мерном векторном пространстве, если состояние системы определяется с помощью  $n$  параметров. Обозначим параметры, определяющие состояние системы, следующим образом:  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , каждый из параметров изменяется во времени, с учетом этого состояние системы  $S$  описывается так:  $S = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$ . Последовательно фиксируя моменты времени, получаем дискретную временную шкалу  $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ . Если

---

<sup>5</sup> В теории управления энтропия — это мера неопределенности состояния или поведения системы в данных условиях.

предположить, что область изменения параметра  $t$  интервал  $(a; b)$ , то получаем непрерывную временную шкалу. Различие между дискретными и непрерывными шкалами зависит от масштабов времени, например, становится весьма условным по мере увеличения точности представления процессов и скорости обновления информации, то есть по мере уменьшения масштаба времени. При изучении системы признание ее статической, с фиксированными свойствами, динамической, непрерывной или дискретной зависит от принятого временного масштаба наблюдений. При неправильно выбранном временном масштабе процесс может закончиться к моменту следующего замера, если временной интервал слишком большой, или наблюдения не зафиксируют изменений, если интервал слишком мал.

Динамическая неустойчивость может играть в функционировании открытых систем и конструктивную роль. Хаотическое поведение проявляют как консервативные системы, т. е. системы, у которых энергия сохраняется, так и диссипативные системы, то есть открытые системы, которые функционируют в устойчивом состоянии, возникающем в неравновесной среде при условии рассеивания (диссипации) энергии, поступающей извне. Диссипативная система характеризуется спонтанным появлением сложной, иногда хаотичной структуры. Суть изменения систем основывается на возникновении необратимых процессов вследствие неустойчивости. После образования из хаоса устойчивых структурных элементов начинается их развитие:

- рост;
- появление у них новых функциональных качеств.

Накопление новых свойств связано с бифуркациями или возникновением качественно отличного поведения элемента при количественном изменении его параметров<sup>6</sup>. Предполагается, что в момент бифуркации — своего рода перерождения — вероятность достоверного прогнозирования новых свойств мала.

В процессе развития систем противоречия возникают естественным путем и являются причиной совершенствования систем. Из теории систем известно, что форсировать развитие системы путем искусственного введения в нее противоречий невозможно, поскольку нельзя определить, будет ли она в результате их разрешения носителем новых качеств.

Мы, кроме перечисленных выше способов моделирования систем, предлагаем использовать понятие теоретико-группового прогнозирования поведения системы.

**Группа** является одним из основных типов алгебраических систем, а теория групп — одним из основных, динамично развивающихся разделов современной алгебры. Понадобилась работа нескольких поколений выдающихся математиков, таких как Кэли, Фробениус, ван Дик, занявшая около ста лет, прежде чем идея группы привела к современному абстрактному понятию группы, использующемуся в настоящее время практически во всех областях математики. Основные вехи теории групп следующие:

- Лагранж — применял группы подстановок для решения алгебраических уравнений в радикалах (1771 г.);
- Руффини (1799 г.);
- Абель (1824 г.);
- Галуа (1830 г.) — впервые ввел термин «группа» и создал теорию Галуа, считающуюся в настоящее время вершиной современной алгебры,

Следующие двадцать лет Кэли и Жордан развивали и обобщали идеи Галуа, которые совершенно преобразили облик всей математики.

#### **Приведем определение группы.**

Непустое множество  $G$  с заданной на нем бинарной операцией:  $G \times G \xrightarrow{*} G$

---

<sup>6</sup> Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. — М.: Прогресс, 1986.

называется группой  $\langle G; \cdot ; {}^{-1} \rangle$ , если выполнены следующие аксиомы:

1. ассоциативность:  $(\forall a, b, c \in G)((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$ ;
2. наличие нейтрального элемента:  $(\exists e \in G)(\forall a \in G)(e \cdot a = a \cdot e = a)$ ;
3. наличие обратного элемента:  $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)(a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e)$ .

Покажем теперь, каким образом для описания механизма взаимодействия подсистемы системы можно применить аппарат теории групп и получить модель описания пошагового поведения системы.

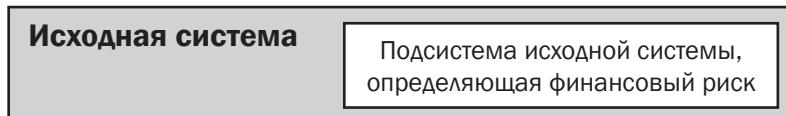
Пусть в результате декомпозиции система  $\Gamma$  представлена в виде множества элементов  $G = \{a, b, c, \dots\}$  каждый из которых является подсистемой системы  $\Gamma$ . Результат взаимодействия подсистем  $a$  и  $b$  (в указанном порядке) будем обозначать через  $ab$ . Будем рассматривать замкнутую систему, то есть такую систему  $\Gamma$ , что для любых ее элементов  $a$  и  $b$  результат взаимодействия  $ab$  не выходит за пределы  $G$ . Будем, кроме того, предполагать, что система  $\Gamma$  является ассоциативной, то есть для любых ее элементов  $a, b, c$  имеет место равенство  $a(bc) = (ab)c$ . Через  $e$  обозначим нейтральный элемент системы  $\Gamma$ , то есть такую ее подсистему, что для любого элемента  $a$  имеет место равенство  $ae = a = ea$ . Через  $a^{-1}$  обозначим обратное действие подсистемы  $a$ , то есть такое действие подсистемы  $a$  системы  $G$ , что  $a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1}$ .

Таким образом, ассоциативная замкнутая система  $\Gamma$ , декомпозиция которой  $G = \{a, b, c, \dots\}$  содержит нейтральную подсистему  $e$  и обратные действия  $a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots$  для всех элементов декомпозиции, определяет группу  $\langle G; \cdot ; {}^{-1} \rangle$ , а любое возможное пошаговое поведение системы  $\Gamma$  определяется словом в групповом алфавите  $\{a, b, c, \dots\} \cup \{a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, \dots\} \cup \{e\}$ .

В настоящее время теория групп является достаточно хорошо изученной областью, например, получено полное описание всех конечных групп. Для каждого понятия теории групп, на наш взгляд, можно найти адекватную качественную интерпретацию в теории системного подхода. Так, понятие гомоморфизма группы можно интерпретировать как передачу функций системы, понятие ядра гомоморфизма  $\varphi$  можно интерпретировать так: отображение  $\varphi$  нейтрализует подсистему  $\text{Ker } \varphi$ , иерархические замкнутые ассоциативные системы могут быть описаны с помощью упорядоченных групп, автоморфизм группы можно интерпретировать как передачу функций внутри системы с сохранением всех свойств системы. Для каждой теоремы теории групп можно найти качественную интерпретацию в теории системного подхода. Например, существуют две с точностью до изоморфизма группы из шести элементов, поэтому существует лишь две существенно различные по своим свойствам системы, имеющие декомпозицию из шести элементов.

Формализуем термин «система» как совокупность элементов, структурированную посредством связей в подсистемы различных уровней для достижения целей функционирования (целевых функций). Если рассматривать финансовый риск как систему финансовых факторов, во взаимодействии с внешними и внутренними условиями функционирования определяющую реальные события финансового сектора, то она имеет следующее отличие от всех остальных систем: цели ее функционирования — обеспечение неравновесного состояния финансового сектора, поскольку из теории динамических систем известно, что в поглощающем или в предельном (равновесном) состоянии система прекращает свое существование.

Поясним наше представление о риске следующей схемой:



**Теорема об описании финансового риска.** Финансовый риск системы определяется не более чем двумя комбинациями факторов, определяющих подсистему риска системы.

**Доказательство.** Финансовый риск будем рассматривать с позиций системного подхода.

Пусть финансовый риск системы определяется множеством факторов  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Рассмотрим свободную группу  $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  ранга  $n$  с образующими  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Поскольку любая свободная группа конечного ранга вкладывается в свободную группу счетного ранга  $F_\infty = \langle a_i^{-1}a_j^{-1}a_ia_j | i, j = 1, \dots, n, i \neq j \rangle$  – коммутант группы  $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ , а свободная группа счетного ранга вкладывается в свободную группу ранга  $2^7$ , то получается, что существуют два слова  $w_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$  и  $w_2(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , в алфавите  $\{a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , такие, что  $F_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  вложима в  $F_2 = \langle w_1(a_1, a_2, \dots, a_n), w_2(a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle$ .

Применение методов теории групп и знание строения конечных групп<sup>8</sup> позволит определять конечные варианты возможного развития системы и их число. То есть теория групп позволяет выделять не только, скажем, три прогноза вариантов развития – оптимистический, пессимистический и нейтральный, – но все возможные варианты развития системы, конечный результат каждого варианта развития, количество различных вариантов. По сути, применительно к задаче долгосрочного планирования, мы знаем все возможные итоговые позиции, к которым может прийти система в результате своего развития, правда, с учетом только конечного числа факторов, влияющих на систему.

## Библиография

1. Бланк, И. А. Энциклопедия финансового менеджера. Т. 1. Концептуальные основы финансового менеджмента. – М.: Издательство «Омега - Л», 2008. – 448 с.
2. Могилевский, В. Д. Методология систем. – М.: «Экономика», 1999.
3. Пригожин, И., Стенгерс, И. Порядок из хаоса. – М.: Прогресс, 1986.
4. Мельников, О. В., Ремесленников, В. Н., Романьков, В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1 / Под общей редакцией Скорнякова Л. А. – М.: Наука, 1990.

<sup>7</sup> Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. Общая алгебра. Т. 1 / Под общей редакцией Скорнякова Л. А. – М.: Наука, 1990. – 592 с.

<sup>8</sup> На сегодняшний день получено описание всех конечных групп.