

УДК 624.074.433:534.1

С.В. Серёгин

ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»

СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНО-РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НЕСУЩЕЙ ПРИСОЕДИНЕННУЮ МАССУ

В рамках теории пологих оболочек изучено влияние малой сосредоточенной массы на собственные динамические характеристики оболочки. Предложено уточнение математической модели, предполагающей, что присоединенная масса, уже в линейной постановке, приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм колебаний с радиальными. Обнаружено более сильное расщепление изгибного частотного спектра, обусловленное не только наличием присоединенной массы, но и параметрами волнобразования, характеризующими относительную длину и толщину оболочки.

Ключевые слова: круговая цилиндрическая оболочка, присоединенная масса, изгибно-радиальные колебания, расщепление, изгибный частотный спектр, параметр волнобразования.

Тонкие оболочечные конструкции часто встречаются в строительной индустрии. Одним из инновационных направлений в области строительства является возведение зданий и сооружений в среде водного пространства. Конструкции подводных туннелей неизбежно характеризуются наличием присоединенной (сосредоточенной или распределенной по некоторой поверхности) массы, обусловленной конструктивной, прочностной или эксплуатационной необходимостью [1—4]. Такая система оболочки — масса в условиях эксплуатации подвергается интенсивным динамическим, в частности, периодическим нагрузкам, что требует повышенной точности к расчетам [5—8].

В научной литературе имеется большое число публикаций по изучению динамических характеристик оболочек, несущих присоединенную массу. Однако на сегодняшний день теоретические результаты не всегда согласуются с численными и экспериментальными данными [9—13]. Так, например, в [2, 11] обнаружено, что снижение меньшей из расщепленных собственных частот более сильное, чем это предсказывает традиционная теория [10]. Несколько позже в [3] установлено, что эффект влияния присоединенной массы зависит не только от ее величины, как это следует из традиционного решения [10], но и от геометрических параметров оболочки.

Данное обстоятельство требует уточнения традиционной математической модели.

Математическая модель. Рассматривается оболочка массой M_0 , радиусом R , длиной l и толщиной h , к которой при $x = x_0, y = y_0$ присоединена масса M . Изучаются колебания вблизи основного резонанса.

Уравнения движения. Анализ, как и в [10], основывается на уравнениях движения теории пологих оболочек, которые имеют вид [14]

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1)$$

В (1) $D = Eh^3 / [12(1-\mu^2)]$ — цилиндрическая жесткость, где E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; ∇^4 — бигармонический оператор Лапласа; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений; ρ — массовая плотность; t — время; $\delta(x, y)$ — функция Дирака.

Конечномерная модель. При использовании вариационного метода, получаемый результат в значительной степени зависит от задаваемой формы динамического прогиба.

Традиционных подход [10] к построению линейной конечномерной модели предполагает, что присоединенная масса приводит к взаимодействию сопряженных изгибных форм $\sin \beta y \sin \alpha x$ и $\cos \beta y \cos \alpha x$ ($\beta = n/R$; $\alpha = \pi/l$, где n — число образовавшихся волн при изгибных колебаниях), сдвинутых в окружном направлении на угол $\pi/2$. В этом случае упругий прогиб свободно опертой по торцам оболочки аппроксимируется выражением

$$w(x, y, t) = [f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y] \sin \alpha x. \quad (2)$$

В настоящей работе предлагается уточнение конечномерной модели (2). Считается, что присоединенная масса приводит не только к связности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний оболочки с высокочастотными радиальными колебаниями. Прогиб оболочки в новом подходе имеет вид:

$$w(x, y, t) = (f_1(t) \sin \beta y + f_2(t) \cos \beta y + f_3(t)) \sin \alpha x + f_4(t) \sin 3\alpha x, \quad (3)$$

где дополнительно введенные обобщенные координаты к (2) $f_3(t)$ и $f_4(t)$ отвечают радиальным колебаниям.

Различные варианты конечномерных моделей рассмотрены и в [15—17].

Модальные уравнения. Выражение прогиба (3) подставляется в уравнение совместности (1). Находится функция напряжений $\Phi(x, y, t)$ и удовлетворяются условия периодической непрерывности динамических напряжений и отсутствия перемещений торцов оболочки в плоскости.

$$\Phi(x, y, t) = [\Phi_1(t) \sin \beta y + \Phi_2(t) \cos \beta y + \Phi_3(t)] \sin \alpha x + 9\Phi_4(t) \sin 3\alpha x, \quad (4)$$

$$\text{где } \Phi_1(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_1(t), \quad \Phi_2(t) = \frac{E\alpha^2}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} f_2(t), \quad \Phi_3(t) = \frac{E}{R\alpha^2} f_3(t),$$

$$\Phi_4(t) = \frac{1}{81 R\alpha^2} f_4(t).$$

Подставляя (3) и (4) в дифференциальное уравнение движения (1) и применяя процедуру метода Бубнова — Галеркина, получаем систему динамических уравнений:

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \frac{4M}{M_0} \left[\ddot{f}_1 \sin^2 \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 \sin \beta y_0 + \right. \\ \left. + \ddot{f}_3 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_4 \sin \beta y_0 (2 \cos 2\alpha x_0 + 1) \right] \sin^2 \alpha x_0 = 0;$$

$$\ddot{f}_2 + f_2 + \frac{4M}{M_0} \left[\ddot{f}_1 \sin \beta y_0 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos^2 \beta y_0 + \right. \\ \left. + \ddot{f}_3 \cos \beta y_0 + \ddot{f}_4 \cos \beta y_0 (2 \cos 2\alpha x_0 + 1) \right] \sin^2 \alpha x_0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}_3 + \left(p_1/\omega_n\right)^2 f_3 + \frac{2M}{M_0} \left[\begin{array}{l} \ddot{f}_1 \sin \beta y_0 + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 + \\ + \ddot{f}_3 + \ddot{f}_4 (2 \cos 2\alpha x_0 + 1) \end{array} \right] \sin^2 \alpha x_0 = 0; \\ \ddot{f}_4 + \left(p_2/\omega_n\right)^2 f_4 + \frac{2M}{M_0} \left[\begin{array}{l} \ddot{f}_1 \sin \beta y_0 \sin \alpha x_0 + \ddot{f}_3 \sin \alpha x_0 + \\ + \ddot{f}_2 \cos \beta y_0 \sin \alpha x_0 + \ddot{f}_4 \sin 3\alpha x_0 \end{array} \right] \sin 3\alpha x_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) $p_1^2 = 1 + [\varepsilon \theta^4]/[12(1-\mu^2)]$, $p_2^2 = 1 + [81\varepsilon\theta^4]/[12(1-\mu^2)]$ — квадраты безразмерных частот радиальных колебаний оболочки без присоединенной массы; $\omega_n^2 = [\varepsilon(1+\theta^2)^2]/[12(1-\mu^2)] + \theta^4/(1+\theta^2)^2$ — квадрат безразмерной частоты изгибных колебаний оболочки без присоединенной массы; $\varepsilon = (n^2 h)^2/R^2$ и $\theta = (\pi R)/(nl)$ — параметры волнобразования, характеризующие относительную толщину и длину оболочки соответственно; точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \lambda_n t$, где $\lambda_n^2 = E\omega_n^2/\rho R^2$ — квадрат собственной частоты.

Из системы модальных уравнений (5) видно, что присоединенная масса приводит не только к связности сопряженных изгибных форм, но и к взаимодействию изгибных колебаний оболочки с радиальными. При этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами.

Частоты колебаний. Из частотного уравнения, соответствующего (5), найдены безразмерные собственные частоты оболочки, несущей присоединенную массу $\Omega_{ni} = \omega_{ni}/\omega_n$ ($i = 1, 2, 3, 4$; ω_{ni} — безразмерная частота изгибных колебаний оболочки с присоединенной массой), не зависящие от круговой координаты y_0 — места крепления массы. Первым двум Ω_{n1}, Ω_{n2} соответствуют преимущественно изгибные колебания, остальным — преимущественно радиальные.

Меньшая из расщепленных собственных частот Ω_{n1} в новом решении зависит не только от величины присоединенной массы, но и от параметров ε и θ . На рис. 1. показано снижение Ω_{n1} в зависимости от M/M_0 , ε и θ . Кривая 1 соответствует традиционному теоретическому решению [10]. Кривая 2 — новому решению при $\varepsilon = 0,5$, $\theta = 0,1$ и кривая 3 — при $\varepsilon = 1$ и $\theta = 1,5$. Расчеты выполнены для случая крепления массы при $x_0 = l/2$.

На рис. 2 продемонстрировано влияние волновых параметров при $M/M_0 = 0,01$: а — ε ; б — θ . Прямой сплошной линией 1 по-прежнему представлено теоретическое решение [10], не зависящее от параметров волнобразования. Штриховой, штрихпунктирной и пунктирной линиями — новое решение зависимости от волновых параметров ε и θ .

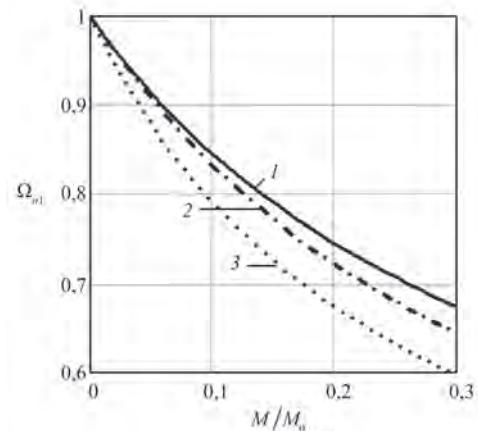
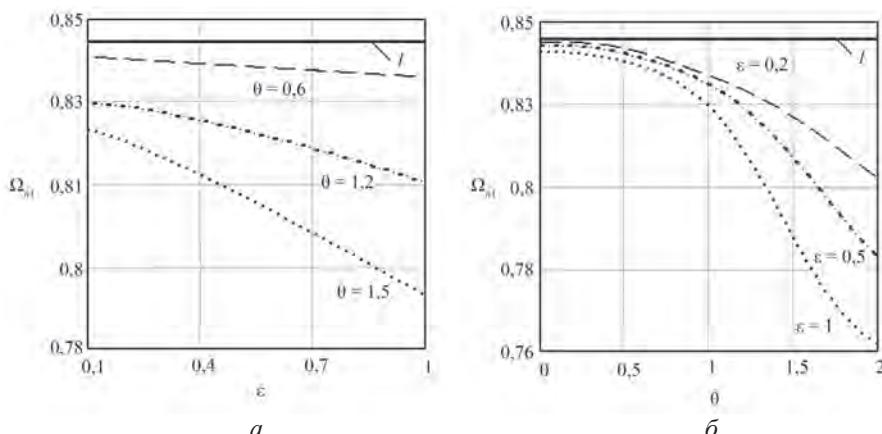


Рис. 1. Влияние M/M_0 , θ при $\varepsilon = 0,1$ на Ω_{n1}

Рис. 2. Влияние параметров волнообразования ε и θ на Ω_{n1}

На рис. 2 видно, что с ростом ε и θ меньшая из расщепленных собственных частот оболочки, несущей присоединенную массу, снижается, причем снижение частоты существенное. Традиционное решение совпадает с новым только для относительно длинных и толстых оболочек.

Стоит отметить, что значительное снижение частоты Ω_{n1} при креплении «незначительной» величины присоединенной массы было обнаружено в экспериментальных исследованиях [2].

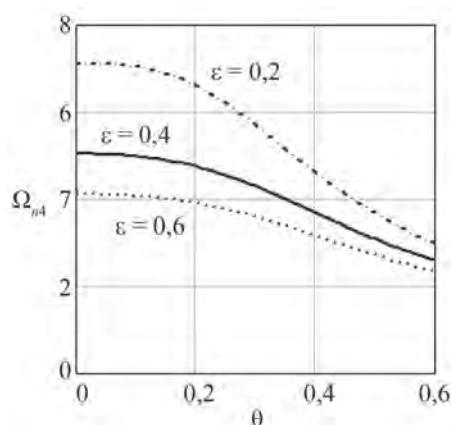
Большая из расщепленных собственных частот Ω_{n2} и в новом, и в традиционном решениях равна 1.

Частоты преимущественно радиальных колебаний при определенных значениях ε и θ могут быть соизмеримы с частотами преимущественно изгибных колебаний (рис. 3).

Это означает, что резонанс может наступить не только при частотах Ω_{n1} и Ω_{n2} , но и при близкой им частоте радиальных колебаний Ω_{n4} , и при Ω_{n3} , которая $\Omega_{n2} < \Omega_{n3} < \Omega_{n4}$.

Выводы. Уточненная математическая модель позволила установить, что присоединенная масса уже в линейной постановке связывает сопряженные изгибные формы круговой цилиндрической оболочки и приводит к взаимодействию низкочастотных изгибных колебаний с высокочастотными радиальными колебаниями. При этом радиальные колебания выступают в качестве дополнительной инерционной связи между сопряженными изгибными формами.

Сосредоточенная масса приводит к расщеплению изгибного частотного спектра. Меньшая из расщепленных собственных частот снижается, причем снижение частоты зависит не только от величины присоединенной массы, но и

Рис. 3. Влияние параметров волнообразования ε и θ на Ω_{n4}

от параметров волнообразования ε и θ , характеризующих относительную толщину и длину оболочки. Большая из расщепленных частот не меняет своего значения и равна частоте колебаний оболочки без массы.

Установлено, что при некоторых значениях ε и θ частоты преимущественно радиальных колебаний могут быть соизмеримы с частотами преимущественно изгибных колебаний оболочки, несущей присоединенную массу. Это значит, что вследствие вынуждающей нагрузки нерезонансные зоны, определенные согласно традиционной математической модели, по существу могут быть резонансными.

Полученные в работе результаты необходимо учитывать при оценке динамической прочности проектируемых оболочечных конструкций.

Уточненная конечномерная модель, учитывающая радиальные колебания, позволила получить результаты количественно, а главное, качественно лучше согласующиеся с численными расчетами и опытными данными, что может потребовать уточнения уже решенных ранее задач динамики.

Библиографический список

1. Amabili M., Garziera R., Carra S. The effect of rotary inertia of added masses on vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells // Journal of Fluids and Structures. 2005. Vol. 21. No. 5—7. Pp. 449—458.
2. Серёгин С.В. Влияние присоединенного тела на частоты и формы свободных колебаний цилиндрических оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 3. С. 35—38.
3. Серёгин С.В. Влияние площади контакта и величины линейно распределенной и сосредоточенной массы с круговой цилиндрической оболочкой на частоты и формы свободных колебаний // Вестник МГСУ. 2014. № 7. С. 64—74.
4. Заруцкий В.А., Телалов А.И. Колебания тонкостенных оболочек с конструктивными особенностями. Обзор экспериментальных исследований // Прикладная механика. 1991. Т. 278. № 4. С. 3—9.
5. Trotsenko Yu.V. Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 292. No. 3—5. Pp. 535—551.
6. Mallon N.J. Dynamic stability of a thin cylindrical shell with top mass subjected to harmonic base-acceleration // International Journal of Solids and Structures. 2008. Vol. 45. No. 6. Pp. 1587—1613.
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: steady viscous effects on shells conveying fluid // Journal of Fluids and Structures. 2002. Vol. 16. No. 6. Pp. 795—809.
8. Khalili S.M.R., Tafazoli S., Malekzadeh Fard K. Free vibrations of laminated composite shells with uniformly distributed attached mass using higher order shell theory including stiffness effect // Journal of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330. No. 26. Pp. 6355—6371.
9. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. М. : Машиностроение, 1988. 200 с.
10. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев : Наукова думка, 1984. 220 с.
11. Серёгин С.В. Исследование динамических характеристик оболочек с отверстиями и присоединенной массой // Вестник МГСУ. 2014. № 4. С. 52—58.

12. Sivak V.F., Sivak V.V. Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses // International Applied Mechanics. 2002. Vol. 38. No. 5. Pp. 623—627.
13. Avramov K.V., Pellicano F. Dynamical instability of cylindrical shell with big mass at the end // Reports of the National Academy of Science of Ukraine. 2006. No. 5. Pp. 41—46.
14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. : Наука, 1972. 432 с.
15. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. New York, USA : Cambridge university press, 2008. 392 p.
16. Варадан Т.К., Пратхан Дж., Рамани Х.В. Нелинейные свободные изгибные колебания тонкостенных круговых цилиндрических оболочек // Аэрокосмическая техника. 1990. № 5. С. 21—24.
17. Св. о гос. рег. прог. для ЭВМ № 2014617201. Свободные колебания круговой цилиндрической оболочки, несущей сосредоточенную массу / С.В. Серёгин // Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем. Режим доступа: <http://www1.fips.ru/Archive/EVM/2014/2014.08.20/>. Дата обращения: 28.08.2014.

Поступила в редакцию в августе 2014 г.

Об авторе: Серёгин Сергей Валерьевич — старший преподаватель кафедры строительства и архитектуры, Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет (ФГБОУ ВПО «КнАГТУ»), 681013, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Ленина, д. 27, (4217) 24-11-41, Seregin-komsHome@yandex.ru.

Для цитирования: Серёгин С.В. Свободные изгибно-радиальные колебания тонкой круговой цилиндрической оболочки, несущей присоединенную массу // Вестник МГСУ. 2014. № 11. С. 74—81.

S.V. Seregin

FREE FLEXURAL RADIAL VIBRATIONS OF A THIN CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL BEARING ADDED MASS

The author comes up with a refined mathematical model contemplating that added mass facilitates interaction between coupled flexural and radial vibrations in the linear setting. The author has identified a higher splitting of the flexural frequency spectrum due to the presence of the added mass and the wave generation parameters that characterize the relative length and thickness of the shell. Within the framework of the shallow-shell theory, the influence of the small concentrated mass onto natural dynamic properties of the shell is exposed to research. The refined mathematical model was employed to identify that the added mass binds the coupled flexural shape of the circular cylindrical shell and facilitates interaction between low-frequency flexural vibrations and high-frequency radial vibrations. Moreover, radial vibrations act as a supplementary inertial link between coupled flexural shapes. Due to the availability of the exciting load, non-resonant areas, identified through the application of the traditional mathematical model, can be resonant in essence. The findings of this research must be considered in the course of the assessment of the dynamic strength of any shell structures designed. This refined finite-dimensional model, capable of recognizing radial vibrations, has generated the results that comply with numerical analyses and experimental data both quantitatively and qualitatively. Therefore, dynamic problems that have already been resolved may need refinement.

Key words: circular cylindrical shell, added mass, flexural radial vibrations, splitting, flexural frequency spectrum, wave generation parameter.

References

1. Amabili M., Garziera R., Carra S. The Effect of Rotary Inertia of Added Masses on Vibrations of Empty and Fluid-filled Circular Cylindrical Shells. *Journal of Fluids and Structures*. 2005, vol. 21, no. 5—7, pp. 449—458. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.07.018>.
2. Seregin S.V. Vliyanie prisoedinennoego tela na chastoty i formy svobodnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek [Influence of Attached Body on Natural Frequencies and their Forms]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Building Mechanics and Calculation of Structures]. 2014, no. 3, pp. 35—38. (In Russian).
3. Seregin S.V. Vliyanie ploshchadi kontakta i velichiny lineyno raspredelennoy i sosredotochennoy massy s krugovoy tsilindricheskoy obolochkoy na chastoty i formy svobodnykh kolebaniy [Influence of the Contact Area of Linearly Distributed and Concentrated Mass with a Circular Cylindrical Shell on the Frequency and Modes of Natural Oscillations]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 7, pp. 64—74. (In Russian).
4. Zarutskiy V.A., Telalov A.I. Kolebaniya tonkostennyykh obolochek s konstruktivnymi osobennostyami. Obzor eksperimental'nykh issledovaniy [Frequencies of Thin-Walled Shells with Structural Peculiarities]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 1991, vol. 278, no. 4, pp. 3—9. (In Russian).
5. Trotsenko Yu.V. Frequencies and Modes of Vibration of a Cylindrical Shell with Attached Rigid Body. *Journal of Sound and Vibration*. 2006, vol. 292, no. 3—5, pp. 535—551. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2005.08.015>.
6. Mallon N.J. Dynamic Stability of a Thin Cylindrical Shell with Top Mass Subjected to Harmonic Base-acceleration. *International Journal of Solids and Structures*. 2008, vol. 45, no. 6, pp. 1587—1613. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijсолstr.2007.10.011>.
7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of Circular Cylindrical Shells with Nonuniform Constraints, Elastic Bed and Added Mass; Part III: Steady Viscous Effects On Shells Conveying Fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2002, vol. 16, no. 6, pp. 795—809. DOI: <http://dx.doi.org/10.1006/jfls.2002.0446>.
8. Khalili S.M.R., Tafazoli S., Malekzadeh Fard K. Free Vibrations of Laminated Composite Shells with Uniformly Distributed Attached Mass Using Higher Order Shell Theory Including Stiffness Effect. *Journal of Sound and Vibration*. 2011, vol. 330, no. 26, pp. 6355—6371. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2011.07.004>.
9. Andreev L.V., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika plastin i obolochek s sosredotochennymi massami* [Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1988, 200 p. (In Russian).
10. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Krasnopol'skaya T.S. *Nelineynoe vzaimodeystvie form izgibnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear Interaction of Flexural Vibration Forms of Cylindrical Shells]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1984, 220 p. (In Russian).
11. Seregin S.V. Issledovanie dinamicheskikh kharakteristik obolochek s otverstiyami i prisoedinennoy massoy [Investigation of Dynamic Characteristics of Shells with Holes and Added Mass]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 4, pp. 52—58. (In Russian).
12. Sivak V.F., Sivak V.V. Experimental Investigation into the Vibrations of Shells of Revolution with Added Masses. *International Applied Mechanics*. 2002, vol. 38, no. 5, pp. 623—627. DOI: <http://dx.doi.org/10.1023/A:1019770206949>.
13. Avramov K.V., Pellicano F. Dynamical Instability of Cylindrical Shell with Big Mass at the End. *Reports of the National Academy of Science of Ukraine*. 2006, no. 5, pp. 41—46.
14. Vol'mir A.S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 432 p. (In Russian).
15. Amabili M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. New York, USA, Cambridge university press, 2008, 392 p.

16. Varadan T.K., Pratkhap Dzh., Ramani Kh.V. Nelineynye svobodnye izgibnye kolebaniya tonkostennyykh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [Nonlinear Free Frequencies of Thin-Walled Round Cylindrical Shells]. *Aerokosmicheskaya tekhnika* [Aerospace Engineering]. 1990, no. 5, pp. 21—24. (In Russian).

17. Seregin S.V. Svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM № 2014617201. Svobodnye kolebaniya krugovoy tsilindricheskoy obolochki, nesushchey sosredotochennuyu massu [State Registration Certificate of a Computer Program no. 2014617201. Free vibrations of a circular cylindrical shell carrying a concentrated mass]. *Programmy dlya EVM. Bazy dannykh. Topologii integral'nykh mikroskhem* [Computer Programs. Databases. Typology of Integral Microchips]. Available at: <http://www1.fips.ru/Archive/EVM/2014/2014.08.20/>. Date of access: 28.08.2014. (In Russian).

About the author: **Seregin Sergey Valer'evich** — senior lecturer, Department of Construction and Architecture, **Komsomolsk-na-Amure State Technical University**, 27 Lenina str, Komsomolsk-on-Amur, 681013, +7 (4217) 24-11-41, Russian Federation; Seregin-komsHome@yandex.ru.

For citation: Seregin S.V. Svobodnye izgibno-radial'nye kolebaniya tonkoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki, nesushchey prisoedinennoy massu [Free Flexural Radial Vibrations of a Thin Circular Cylindrical Shell Bearing Added Mass]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 11, pp. 74—81. (In Russian).