

УДК 621.891

В.П. Тихомиров, М.А. Измеров

КОНТАКТНАЯ МЕХАНИКА ФРАКТАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Показана связь классического статистического метода оценки геометрии шероховатых поверхностей и фрактального подхода. Описаны процедуры моделирования фрактальных поверхностей. Адекватность моделей реальным поверхностям проверена по спектральной плотности и предложенному критерию адекватности. Получена связь между деформацией микронеровности и нагрузкой, дающая полную картину упруго-пластического состояния пятна контакта при заданном сближении.

Ключевые слова: контактная механика, фрактальные поверхности, зазор, фрактальная размерность, спектральная плотность, моделирование поверхностей, деформация.

При решении трибологических задач представляется важным определить параметры контактного взаимодействия с учетом наличия шероховатости. Решение подобных задач требует разработки моделей реальных поверхностей и их контактного взаимодействия. При этом принимаются допущения, которые снижают ценность моделей. Критерием адекватности модели реальной поверхности служит либо одинаковость распределения материала в шероховатом слое [1], либо плотность вершин выступов [2]. В ряде случаев при разработке моделей поверхностей полагают постоянство радиусов закругления верхней части выступов, при этом законы распределения вершин выступов могут быть разными. Обзор моделей контактного взаимодействия шероховатых поверхностей представлен в работе [3].

Модель Гринвуда-Вильямсона [2] ограничивалась рассмотрением упругого контакта шероховатых поверхностей. Дальнейшие работы учитывали наличие контактов с пластическим состоянием [4], анизотропию поверхности [5] и другие особенности контактного взаимодействия [6].

Особенности фрактального подхода [7 - 9 и др.] позволяют исключить некоторые недостаточно обоснованные допущения, в частности: постоянство радиуса закругления верхней части неровностей и его независимость от величины сближения; введение в модель контактного взаимодействия таких факторов, не зависящих от масштаба (скейлинга), как фрактальная размерность и фрактальный параметр поверхности. При этом возможно использовать ЭВМ для автоматизации и ускорения расчётов, что немаловажно при решении контактных задач в 3D на больших участках поверхности с высокой детализацией.

Связь фрактального и статистического методов. Моделирование инженерной поверхности возможно при установлении связи фрактальной размерности с параметрами шероховатости инженерных поверхностей. В ряде случаев требуется использовать данные об инженерных поверхностях и их параметрах, которые не содержат оценку фрактальной размерности.

К параметрам фрактальной поверхности, не зависящим от шкалы измерения, относят ее размерность и фрактальный параметр. Фрактальные размерности поверхности и ее профиля (по мнению Б. Мандельброта) связаны следующим соотношением:

$$D_S = D + 1.$$

Мощность спектральной функции Вейерштрасса-Мандельброта для профиля поверхности определяется выражением

$$S(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} \omega^{2D-5}.$$

Параметр G можно определить из уравнения

$$\lg S(\omega) = \lg \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} - (5 - 2D) \lg \omega; \quad 1 \leq D \leq 2.$$

Для профиля поверхности фрактальная размерность определяется угловым коэффициентом K (наклоном прямой, построенной в координатах $\lg S - \lg \omega$). Тогда фрактальная размерность для изотропной поверхности, параметры шероховатости которой можно определить по одной профилограмме, равна

$$D = \frac{5 - K}{2}.$$

Учитывая, что $G=f(Rq)$, после несложных преобразований получим

$$Rq^2 = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \omega^{2D-5} d\omega.$$

Проинтегрировав, получим

$$Rq^2 = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} \frac{(\omega_{\max}^{2D-4} - \omega_{\min}^{2D-4})}{(2D-4)},$$

откуда фрактальный параметр G будет равен

$$G = Rq^{\frac{1}{D-1}} \left[\frac{4(D-2) \ln \gamma}{(\omega_{\max}^{2(D-2)} - \omega_{\min}^{2(D-2)})} \right]^{\frac{1}{2(D-2)}}.$$

Параметр G (по данным Д. Павелеску и А. Тудора [10]) изменяется в пределах от $9,9 \cdot 10^{-16}$ до $1,2 \cdot 10^{-2}$ мкм, что подтверждает представленная зависимость, выведенная нами.

В работе [10] отмечается существенная разница в оценке параметров шероховатости при использовании фрактального и статистического методов. В таблице приведены некоторые формулы для определения параметров шероховатости.

Таблица

Сравнительная оценка параметров шероховатости

Фрактальный метод	Статистический метод
Спектральная мощность профиля	
$S(\omega) = \frac{G^{2(D-1)}}{2 \ln \gamma} \frac{1}{\omega^{(5-2D)}} \text{ мкм}^3$	$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{D_0}{D_0^2 + \omega^2} \text{ мкм}^3,$ D_0 – число нулей (пересечений профиля средней линией), отнесенное к единице длины, мкм^{-1}
Радиус закругления вершин выступов	
$r = \frac{2^D a^{D/2}}{\pi^{(4+D)/2} G^{D-1}} \text{ мкм},$ a – площадь пятна контакта, мкм^2	$r = \frac{[1 + (\pi D_0 \sigma)^2]}{\pi^2 D_0 D_e \sigma} \text{ мкм},$ D_e – число экстремальных точек, отнесенное к единице длины, мкм^{-1} ; σ – среднее квадратическое отклонение профиля

Нахождение фрактальной размерности D возможно и на основе установления связи с такими параметрами шероховатости, как среднее арифметическое отклонение профиля Ra и среднее квадратическое отклонение профиля Rq . Подобные зависимости получены на основе обработки экспериментальных данных некоторых инженерных поверхностей [9; 11; 12]. Сравнение этих зависимостей показывает их удовлетворительное соответствие в диапазоне $Ra \in [0,2 \dots 1,3]$.

Моделирование фрактальных поверхностей. Модель фрактальной поверхности может быть представлена следующим выражением [13]:

$$Z(x, y) = c_z \sum_{n=0}^{N-1} q^{(D_s-3)n} \sum_{m=1}^M \sin \left\{ K q^n \left[x \cos \left(\frac{2\pi m}{M} \right) + y \sin \left(\frac{2\pi m}{M} \right) \right] + \theta_{nm} \right\}.$$

Здесь c_z – сомножитель; $q > 1$ – параметр пространственно-частотного масштабирования; D_s – фрактальная размерность ($2 < D < 3$); N, M – число гармоник; K – основное пространственное волновое число; θ_{nm} – случайная фаза, распределенная равномерно в интервале $[-\pi, +\pi]$.

Сомножитель c_z можно определить из соотношения

$$c_z = \left[\frac{2(1 - q^{2(D_s-3)})}{M(1 - q^{2(D_s-3)N})} \right]^{1/2}.$$

На рис. 1 представлена модель поверхности, построенная при следующих данных: $q = 2,7$; $K = 1$; $N = M = 3$; $\theta_{n,m} \sim \text{Rav}[0, \pi]$; $D_s = 2,17$.

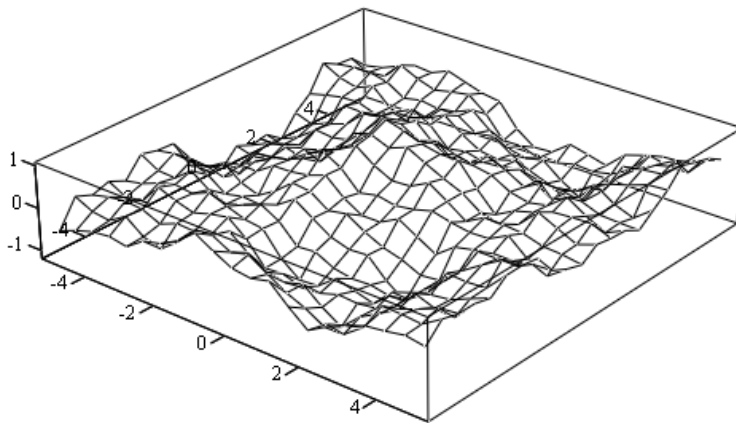


Рис. 1. Модель поверхности

К алгоритмам моделирования фрактальных поверхностей можно отнести метод последовательного случайного сложения, предложенный Р.Ф. Фоссом, а также метод серединного смещения, применяя которые можно получить достаточно детализированную картину поверхности в объёме (3D). Все эти алгоритмы были нами опробованы и протестированы. Составленная на языке программирования C++ программа даёт возможность не только увидеть в 3D смоделированную

поверхность с её параметрами шероховатости, но и провести компьютерный эксперимент по контактированию двух шероховатых поверхностей (рис. 2).

Адекватность модели реальной поверхности.

Моделирование фрактальных поверхностей и построение базы поверхностей позволяет за сравнительно короткое время с помощью компьютерных технологий провести оценку параметров, необходимых для практических задач. Важной является проверка адекватности модели реальной поверхности. Нами предложены критерии сравнения модели поверхности с оригиналом. На

рис. 3 представлены реальная поверхность и ее модель. Сравнение спектральной плотности реальной поверхности и модели (рис. 4) является одним из обоснований их адекватности. Так как важную роль играют такие параметры, как среднее квадратическое отклоне-

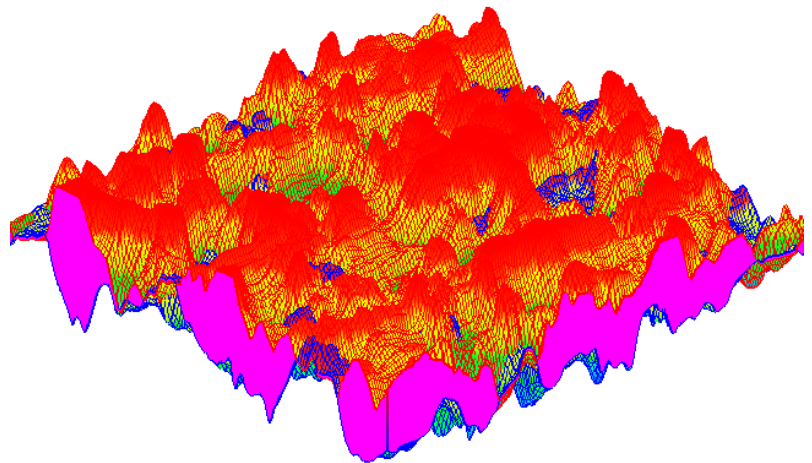


Рис. 2. Контактное взаимодействие двух моделей поверхностей

ние высот неровностей поверхности и фрактальный фактор G , то в дополнение к фрактальной размерности D_s предлагается следующий критерий адекватности:

$$\pi = Ra/Rq = idem,$$

где Ra – среднее арифметическое отклонение ординат; Rq – среднее квадратическое отклонение.

Критерий π можно представить в виде следующего выражения:

$$\pi = \frac{2Ra[(2-D_f)\ln\gamma]^{1/2}}{G(D_f-1)\sqrt{\omega_{max}^{-2(2-D_f)} - \omega_{min}^{-2(2-D_f)}}}.$$

Здесь G – фрактальный фактор; γ – величина, равная 1,5 (по А. Маджумдару); ω – частота.

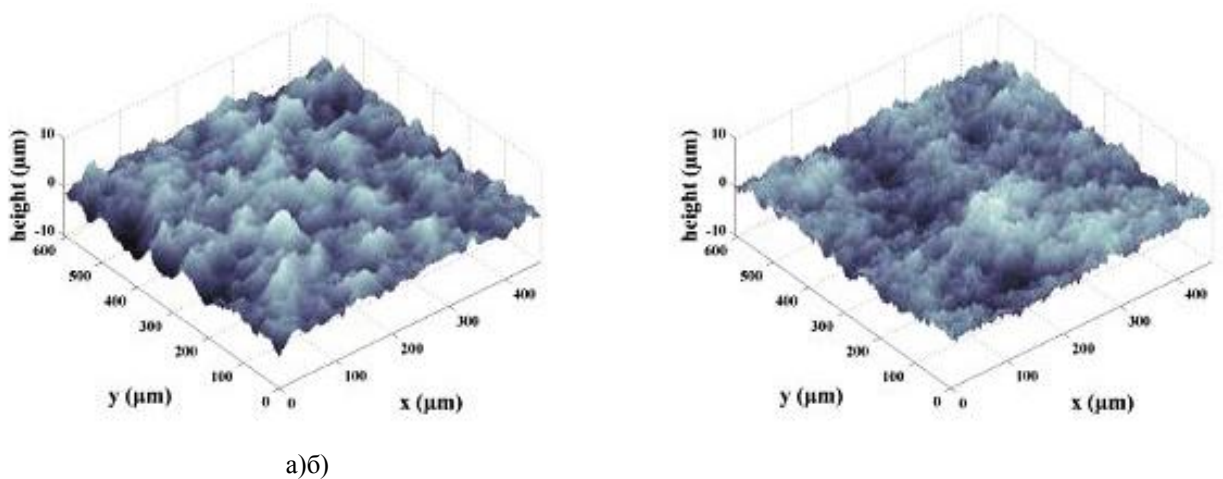


Рис. 3. Моделирование инженерной поверхности: а – реальная поверхность; б – модель

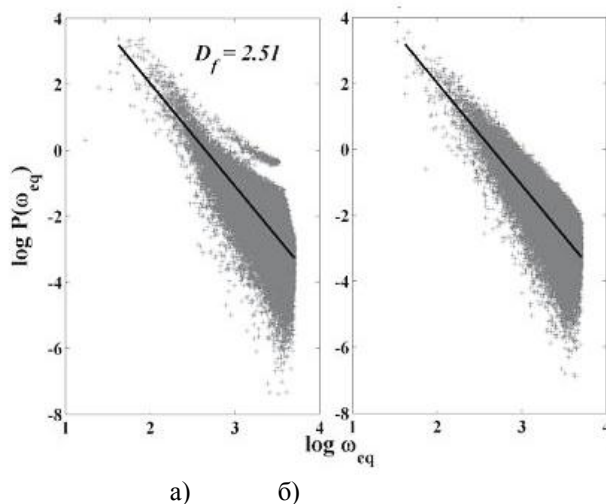


Рис. 4. Спектральная плотность:
а – реальная поверхность; б – модель

Для представленных на рис. 3 поверхностей критерий π принял следующие значения: $\pi = 0,085816$ – для реальной поверхности; $\pi = 0,08248$ – для модели. Критерий π показывает хорошую сходимость полученных результатов, свидетельствуя о том, что эти две поверхности идентичны.

Контактная механика фрактальных поверхностей. Для единичного пятна связь между нагрузкой и площадью соответственно при упругом и пластическом состояниях имеет вид

$$F_{e0}(a) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} EG^{D-1} a_e^{(3-D)/2},$$

$$F_{p0}(a) = H_m a_p,$$

где $a_e \in [a_{min}, a_e]$; $a_p \in [a_{e-p2}, a_{max}]$. Учитывая, что $a = a^* a_{max}$, запишем:

$$F_{e0}(a) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} EG^{D-1} (a_e^*)^{(3-D)/2} a_{max}^{(3-D)/2}, \quad F_{p0}(a) = H_m a_p^* a_{max},$$

где $a_s^* \in [a_{min}^*, a_c^*]$; $a_p \in [a_{s-p2}^*, 1]$.

Для множественного контакта найдем нагрузку, воспринимаемую упруго деформированными пятнами:

$$F_s(a) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} E G^{D-1} (a_s^*)^{(3-D)/2} a_{max}^{(3-D)/2} N(A > a_{min}) \int_{a_{min}}^{a_c^*} C(a^{*'})^{-\tilde{\alpha}} da^{*'}.$$

Здесь $a^{*'}$ - переменная интегрирования. Число пятен контакта определяется выражением

$$N(A > a_{min}) = \left(\frac{a_{max}}{a_{min}} \right)^{D/2} = (a_{min}^*)^{-D/2}.$$

Подставив число пятен в формулу для $F_s(a)$, после несложных преобразований получим

$$F_s(a) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} E G^{D-1} \frac{a_{max}^{(3-D)/2}}{(a_{min}^*)^{D/2}} \frac{1 - \tilde{\alpha}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\tilde{\alpha}}} \int_{a_{min}}^{a_c^*} (a^{*'})^{(1.5-D-\tilde{\alpha})} da^{*'}.$$

Проинтегрировав это выражение, окончательно запишем:

$$F_s(a) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} E G^{D-1} \frac{a_{max}^{(3-D)/2}}{(a_{min}^*)^{D/2}} \frac{1 - \tilde{\alpha}}{2.5 - D - \tilde{\alpha}} \frac{(a_c^*)^{2.5-D-\tilde{\alpha}} - (a_{min}^*)^{2.5-D-\tilde{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\tilde{\alpha}}}.$$

Нагрузка, приходящаяся на пятна, находящиеся в пластическом состоянии, оценивается соотношением

$$\begin{aligned} F_p(a) &= H_m a_{max} (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \int_{110a_s^*}^{1/a_c^*} C(a^{*'})^{1-\tilde{\alpha}} da^{*'} = \\ &= H_m a_{max} (a_{min}^*)^{-D/2} \frac{1 - \tilde{\alpha}}{2 - \tilde{\alpha}} \cdot \frac{1 - (a_{s-p2}^*)^{2-\tilde{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\tilde{\alpha}}}. \\ F_p(a) &= \begin{cases} F_p(a) & \text{при } \frac{1}{a_c^*} > 110a_s^*; \\ 0 & \text{при } \frac{1}{a_c^*} \leq 110a_s^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Кроме пятен, находящихся в упругом и пластическом состояниях, имеются пятна в упругопластическом состоянии (е-р-контакт). Изучение упругопластической деформации при контакте полусферы с жесткой плоскостью с помощью метода конечных элементов [14] позволило записать соотношения между нагрузкой и относительной деформацией в следующем виде:

- для случая $a_c^* \leq a_{s-p1}^* < 6a_c^*$

$$\begin{aligned} F_{s-p1} &= \frac{4.12}{3} \frac{a_c^D}{\pi G^{2(D-1)} (E')^2} \left(\frac{C\sigma_T}{2} \right)^2 (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \int_{a_c^*}^{6a_c^*} C(a^{*'})^{1.425-\tilde{\alpha}} da^{*'} = \\ &= \frac{4.12}{3} \frac{a_c^D}{\pi G^{2(D-1)} (E')^2} \left(\frac{C\sigma_T}{2} \right)^2 (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \frac{1-\tilde{\alpha}}{2.425-\tilde{\alpha}} \frac{(6a_c^*)^{2.425-\tilde{\alpha}} - (a_c^*)^{2.425-\tilde{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\tilde{\alpha}}} \end{aligned}$$

- для случая $6a_c^* \leq a_{s-p1}^* < 110a_c^*$

$$F_{s-p2} = \frac{5.60}{3} \frac{a_c^D}{\pi G^{2(D-1)} (E')^2} \left(\frac{C\sigma_T}{2} \right)^2 (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \frac{1-\tilde{\alpha}}{2.263-\tilde{\alpha}} \frac{(110a_c^*)^{2.263-\tilde{\alpha}} - (6a_c^*)^{2.263-\tilde{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\tilde{\alpha}}}.$$

Из условия равновесия найдем

$$F = F_s(a) + F_{s-p1} + F_{s-p2} + F_p(a).$$

Площади упруго, упругопластически и пластически деформируемых пятен соответственно равны

$$\begin{aligned} A_{rs} &= \frac{(a_{min}^*)^{-D/2}}{2 - \hat{\alpha}} (a_{max}^{2-\hat{\alpha}} - a_{min}^{2-\hat{\alpha}}); \\ A_{r(s-p1)} &= \frac{0,93a_c}{(a_c^*)^{1,136}} (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \int_{6a_c^*}^{110a_c^*} C(a^{*'})^{1,136-\hat{\alpha}} da^{*'} = \\ &= \frac{0,94a_c}{(a_c^*)^{1,146}} (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \frac{1 - \hat{\alpha}}{2,146 - \hat{\alpha}} \frac{(6a_c^*)^{2,136-\hat{\alpha}} - (a_c^*)^{2,136-\hat{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\hat{\alpha}}}; \\ A_{r(s-p2)} &= \frac{0,94a_c}{(a_c^*)^{1,146}} (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \frac{1 - \hat{\alpha}}{2,146 - \hat{\alpha}} \frac{(110a_c^*)^{2,146-\hat{\alpha}} - (6a_c^*)^{2,146-\hat{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\hat{\alpha}}}; \\ A_{rp} &= a_{max} (a_{min}^*)^{-\frac{D}{2}} \frac{1 - \hat{\alpha}}{2 - \hat{\alpha}} \frac{(a_c^*)^{-(2-\hat{\alpha})} - (110a_c^*)^{2-\hat{\alpha}}}{1 - (a_{min}^*)^{1-\hat{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Если какая-либо часть фактической площади контакта окажется отрицательной, то ее не следует учитывать при оценке всей площади контакта.

Интерес представляет сравнение оценок фактической площади контакта, полученных по формулам

$$A_r = A_{rs} + A_{r(s-p1)} + A_{r(s-p2)} + A_{rp}$$

и

$$A_r = \langle a^* \rangle \frac{a_{max}^{1+D/2}}{a_{min}^{D/2}}.$$

Номинальная площадь равна

$$A_a = N(A > a_{min}) \langle a^* \rangle a_{max} = (a_{min}^*)^{-D/2} \frac{a_{max} \{1 - \alpha [1 - (a_{min}^*)^{2-\alpha}]\}}{2 - \alpha [1 - (a_{min}^*)^{1-\alpha}]},$$

Номинальное давление при задаваемой величине номинальной площади равно

$$p_a = \frac{F}{A_a} = \frac{1}{A_a} [F_s(a) + F_{s-p1} + F_{s-p2} + F_p(a)].$$

Сближение можно найти из соотношения

$$\omega_{max} = \frac{\pi G^{D-1} a_{max}^{1-D/2}}{\varphi},$$

где

$$\varphi = \begin{cases} 2, & \text{если } a^* > 110a_c^*; \\ 2 - a_c^*/a^*, & \text{если } 1 \leq a^* \leq 110a_c^*; \\ 1, & \text{если } a^* < 1. \end{cases}$$

При контактном взаимодействии анизотропных поверхностей пятна контакта существенно отличаются по форме от круга. В этом случае, используя компьютерное моделирование, найдем в графической форме зависимости контурной площади сопряжения от сближения при любой форме пятен касания. Тогда несущая способность контакта при заданной нагрузке определяется одной и той же контурной площадью, которая соответствует разным сближениям и другим параметрам контактного взаимодействия. Процедура определения сближения для разных сочетаний поверхностей понятна из рис. 5.

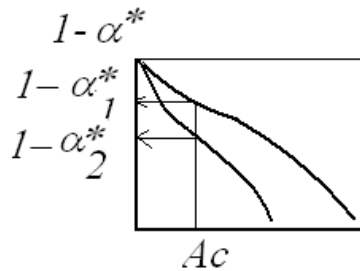


Рис. 5. Зависимость контурной площади от относительного сближения $\alpha^* = a/R_p$

Таким образом, выполнена сравнительная оценка параметров инженерной поверхности, полученных с помощью фрактальных представлений и методом статистического анализа. Используя фрактальные представления о геометрии шероховатой поверхности, можно создать трёхмерную компьютерную модель контакта и провести компьютерный эксперимент по деформированию сопряжённых поверхностей с расчётом основных параметров контактирования.

Установленные зависимости позволяют определить такие параметры контактного взаимодействия, как фактическая площадь контакта, контактная жесткость и др. С помощью представлений о шероховатом слое как о фрактальном объекте рассмотрен вопрос замены контакта шероховатых поверхностей на контактное взаимодействие гладкой поверхности с поверхностью, имеющей эквивалентные параметры шероховатости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демкин, Н.Б. Развитие теории фрикционного контакта/Н.Б. Демкин//Трение и износ.—1992. - Т. 13.—№1.— С.71-80.
2. Greenwood, J.A. Contact of nominally flat surfaces/J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson//Proc. Royal Soc. London.Ser. A. — 1966.—V. 293.—P. 300-319.
3. Bhushan, B. Contact mechanics of rough surfaces in tribology: Multiple asperity contact/B. Bhushan//Tribology Letters.—1998.—V.4.—P. 1-35.
4. Chang, W. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces/ W. Chang, I. Etsion, D. Bogy// Journal of Tribology.—1987.—V. 109.—P. 257-263.
5. Bush, A. Strongly anisotropic rough surfaces/ A. Bush, R. Gibson, G. Klogh//Journal of Lubrication Technology. - 1979.—V. 101.— P. 15-20.
6. Горячева, И.Г. Механика фрикционного контакта/И.Г. Горячева.—М.: Наука, 2001. — 479 с.
7. Маджумдар, А. Фрактальная модель упругопластического контакта шероховатых поверхностей /А. Маджумдар, Б. Бхушан//Современное машиностроение. Сер. Б.—1991.—№6.— С.11-23.
8. Ganti, S. Generalized fractal analysis and its application to engineering surfaces/ S. Ganti, B. Bhushan//Wear.—1995.—V. 180.—P. 17-34.
9. Тихомиров, В.П. Контактное взаимодействие фрактальных поверхностей/ В.П. Тихомиров// Трение и износ.—1997.—Т.18. - №3. — С.369-374.
10. Pavelescu, D. On the roughness fractal character, the tribological parameters and the error factors/D.Pavelescu, A. Tudor//Proceedings of the Romanian Academy. Ser. A. - 2004. —Vol. 5. -№2.
11. Barman, T.K. Fractal relation with conventional roughness parameters for surface topography generated in grinding/T.K. Barman, P. Sahoo// Proc. of the Intern. Conf. of Mech. Engineering. - Dhaka, Bangladesh, 2005. - P.1-5.
12. Лабутин, И.С. Связь шероховатости и фрактальной размерности для односвязных поверхностей//И.С. Лабутин, В.В. Брюханов//Изв. КТГУ. - 2006.—№ 10.
13. Потапов, А.А. Теория рассеяния волн фрактальной анизотропной поверхностью / А.А. Потапов, А.В. Лактюшкин// Нелинейный мир. - 2001.—Т. 6. - № 6. — С. 3-36.
14. Jackson, R.L. A Finite element study of elastic-plastic hemispherical contact against a rigid flat / R. L. Jackson, I. Green//Journal of Tribology. - 2005. - V. 127. - P.343-354.

Материал поступил в редколлегию 10.02.15.