

УДК 517.984.64

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ

С. А. Унучек

В работе рассматривается задача восстановления k -й разделенной разности последовательности при условии, что приближенно известно преобразование Фурье этой последовательности на интервале. Построен оптимальный метод восстановления.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, экстремальная задача, разделенная разность, преобразование Фурье.

1. Введение

Задача оптимального восстановления линейного функционала по значениям других линейных функционалов впервые была поставлена С. А. Смоляком [1] в 1965 г. В основе этой работы лежали идеи А. Н. Колмогорова о наилучшем приближении на классе функций, изложенные в работах [2] и [3]. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [4]. В данной работе изучается задача восстановления самой последовательности или ее k -й разделенной разности ($1 \leq k \leq n-1$) в среднеквадратичной норме по неточно заданному на интервале преобразованию Фурье данной последовательности в равномерной норме на классе последовательностей с ограниченной n -й разделенной разностью. Задача одновременного восстановления нескольких разделенных разностей различного порядка по неточно заданной последовательности с ограниченной n -й разделенной разностью в среднеквадратичной норме рассматривалась в работе [5]. Задача восстановления функции и ее k -й производной по неточно заданному преобразованию Фурье этой функции рассматривалась в работе [6]. Результат, полученный в данной работе, в предельном случае переходит в результат, полученный в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим пространство $l_{2,h}(\mathbb{Z})$, $h > 0$, всех последовательностей $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ таких, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 < \infty, \quad \|x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} = \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} |x_j|^2 \right)^{1/2}.$$

Напомним определение оператора разделенных разностей:

$$\Delta_h^1 x = \Delta_h x = \left\{ \frac{x_{j+1} - x_j}{h} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \quad \Delta_h^k x = \Delta_h (\Delta_h^{k-1} x).$$

Обозначим

$$\mathcal{L}_{2,h}^n(\mathbb{Z}) = \{x \in l_{2,h}(\mathbb{Z}) : \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 1\},$$

$$\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathcal{L}_{2,h}^n(\mathbb{Z}) : (Fx)(\cdot) \in L_\infty([-\pi/h, \pi/h])\},$$

где образом Фурье последовательности $x = \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_{2,h}(\mathbb{Z})$ является функция

$$(Fx)(\omega) = h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \in L_2([-\pi/h, \pi/h]).$$

Образами Фурье для операторов разделенных разностей являются функции

$$\begin{aligned} (F\Delta_h x)(\omega) &= h \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{x_{j+1} - x_j}{h} e^{-ijh\omega} \\ &= \frac{1}{h} \left(h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{j+1} e^{-i(j+1)h\omega} e^{ih\omega} - h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} \right) \\ &= \frac{e^{ih\omega}}{h} \cdot h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{j+1} e^{-i(j+1)h\omega} - \frac{1}{h} \cdot h \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j e^{-ijh\omega} = \frac{e^{ih\omega} - 1}{h} (Fx)(\omega). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(F\Delta_h^k x)(\omega) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} (Fx)(\omega).$$

Пусть для каждой последовательности $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$ также приближенно известно ее преобразование Фурье на множестве $(-\sigma; \sigma)$, $\sigma \leq \pi/h$, в метрике $L_\infty(-\sigma; \sigma)$, т. е. известна некоторая функция $y \in L_\infty(-\sigma; \sigma)$ такая, что

$$\|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma; \sigma)} \leq \delta.$$

Задача состоит в оптимальном восстановлении либо самой последовательности, либо оператора разделенной разности k -го порядка последовательности $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$.

В качестве метода восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$m(y) : L_\infty(-\sigma; \sigma) \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z}).$$

Погрешностью метода m будем называть величину

$$e(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), \\ y \in L_\infty(-\sigma; \sigma), \\ \|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma; \sigma)} \leq \delta}} \|(\Delta_h^k x) - m(y(\cdot))\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) = \inf_{m: L_\infty(-\sigma; \sigma) \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})} e(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta, m).$$

Метод m , на котором достигается нижняя грань, будем называть *оптимальным методом*.

3. Основной результат

Положим

$$g(\omega) = \frac{|e^{ih\omega} - 1|^2}{h^2} = \left(\frac{2 \sin \frac{h\omega}{2}}{h} \right)^2,$$

$\hat{\sigma}$ — решение уравнения $\int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^n(\omega) d\omega = \frac{2\pi}{\delta^2}$, $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$.

Теорема 1. Погрешность оптимального восстановления равна

$$E(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) = \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\Omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} g^k(\omega) d\omega + g^{k-n}(\sigma_0) \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} g^n(\omega) d\omega \right).$$

При $\sigma_0 < \pi/h$ метод $\hat{m}(y)$ такой, что

$$F\hat{m}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| \leq \sigma_0, \\ 0, & |\omega| > \sigma_0, \end{cases}$$

где

$$\alpha(\omega) = \left(1 - \left(\frac{g(\omega)}{g(\sigma_0)} \right)^{n-k} \right) \cdot \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k},$$

является оптимальным. При $\sigma_0 = \pi/h$ метод $\hat{m}(y)$ такой, что

$$F\hat{m}(y) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} y(\omega),$$

является оптимальным.

4. Доказательство

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$E(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), \\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}. \quad (2)$$

◁ Для любой последовательности $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$ такой, что выполнено неравенство $\|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta$, и для любого метода m имеем

$$\begin{aligned} 2\|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &= \|\Delta_h^k(x) - \Delta_h^k(-x) + m(0) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \\ &\leq \|\Delta_h^k(x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} + \|\Delta_h^k(-x) - m(0)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \leq 2e(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta, m), \end{aligned}$$

т. е. для любого метода m

$$e(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta, m) \geq \sup_{\substack{x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), \\ \|(Fx)(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta}} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}.$$

Отсюда следует неравенство (2). ▷

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из леммы 1 следует, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^k x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &\rightarrow \max, \\ \|\Delta_h^n x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} &\leq 1, \quad \|(Fx)(\omega)\|_{L_\infty(-\sigma;\sigma)} \leq \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем ее в образах Фурье. По теореме Планшеля имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \|F(\Delta_h^m x)(\omega)\|_{L_2([-\pi/h, \pi/h])}^2, \\ \|\Delta_h^m x\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2m}}{h^{2m}} |Fx(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2k}}{h^{2k}} |(Fx)(\omega)|^2 d\omega &\rightarrow \max; \\ \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2n}}{h^{2n}} |(Fx)(\omega)|^2 d\omega &\leq 1, \quad |(Fx)(\omega)|^2 \leq \delta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma; \sigma)$, $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$.

Пусть $\sigma \geq \hat{\sigma}$. Покажем, что значение задачи (4) не меньше, чем

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^k(\omega) d\omega.$$

Введем функцию $p(\omega) = \frac{1}{2\pi} |(Fx)(\omega)|^2 d\omega \geq 0$. Тогда задача (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) p(\omega) d\omega &\rightarrow \max; \\ \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) p(\omega) d\omega &\leq 1, \quad p(\omega) \leq \frac{\delta^2}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим $\hat{p}(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{2\pi}, & \omega \in (-\hat{\sigma}; \hat{\sigma}), \\ 0, & \omega \notin (-\hat{\sigma}; \hat{\sigma}). \end{cases}$

Так как

$$\int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) \hat{p}(\omega) d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^n(\omega) d\omega = 1,$$

то функция $\hat{p}(\omega)$ допустима в задаче (5), т. е. значение этой задачи не меньше, чем

$$\int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) \hat{p}(\omega) d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^k(\omega) d\omega.$$

При $\sigma \geq \hat{\sigma}$ имеем, что

$$E^2(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) \geq \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^k(\omega) d\omega,$$

т. е. получена оценка снизу при $\sigma_0 = \hat{\sigma}$.

Рассмотрим случай $\sigma < \hat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$. Положим

$$S(m) = \sqrt{\frac{\pi m}{g^n\left(\frac{\sigma + \frac{1}{m}}{2}\right)} \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \sigma} g^n(\omega) d\omega\right)}.$$

Пусть m достаточно большое натуральное число такое, что выполняется неравенство $\sigma + \frac{1}{m} < \frac{\pi}{h}$. Рассмотрим последовательность функций x_m , для которой

$$(Fx_m)(\omega) = \begin{cases} \delta, & \omega \in (-\sigma; \sigma), \\ S(m), & \sigma < |\omega| < \sigma + \frac{1}{m}, \\ 0, & |\omega| \geq \sigma + \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Неравенство $\frac{1}{2\pi} |(Fx_m)(\omega)|^2 \leq \frac{\delta^2}{2\pi}$ выполнено для всех $|\omega| < \sigma$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \left(2\delta^2 \int_0^\sigma g^n(\omega) d\omega + 2S^2(m) \int_\sigma^{\sigma + \frac{1}{m}} g^n(\omega) d\omega \right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left(\delta^2 \int_0^\sigma g^n(\omega) d\omega + \frac{\pi m}{g^n\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int_0^\sigma g^n(\omega) d\omega\right) \cdot \frac{1}{m} g^n\left(\sigma + \frac{1}{m}\right) \right) = 1, \end{aligned}$$

т. е. последовательность функций x_m допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \left(2\delta^2 \int_0^\sigma g^k(\omega) d\omega + 2S^2(m) \int_\sigma^{\sigma + \frac{1}{m}} g^k(\omega) d\omega \right) \\ &\geq \frac{1}{\pi} \left(\delta^2 \int_0^\sigma g^k(\omega) d\omega + \frac{\pi m}{g^n\left(\sigma + \frac{1}{m}\right)} \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int_0^\sigma g^n(\omega) d\omega\right) \cdot \frac{1}{m} g^k(\sigma) \right). \end{aligned}$$

При $m \rightarrow \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к

$$\Omega = \left(\frac{\delta^2}{\pi} \int_0^\sigma g^k(\omega) d\omega + g^{k-n}(\sigma) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{\pi} \int_0^\sigma g^n(\omega) d\omega\right) \right).$$

Тем самым, мы показали, что при $\sigma < \hat{\sigma}$, $\sigma < \pi/h$ справедливо неравенство $E^2(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) \geq \Omega$.

В случае $\sigma = \frac{\pi}{h} < \hat{\sigma}$ положим $(Fx)(\omega) = \delta$, $|\omega| < \frac{\pi}{h}$. Тогда, поскольку выполнено равенство $\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} g^n(\omega) d\omega = 1$, $\hat{\sigma} > \frac{\pi}{h}$, функция $g^n(\omega)$ неотрицательная, то выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) |(Fx_m)(\omega)|^2 d\omega = \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) d\omega < 1.$$

Это означает, что функция $x(\cdot)$ допустима в задаче (4) и значение задачи не менее величины

$$\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) d\omega.$$

Тем самым мы показали, что

$$E(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) \geq \begin{cases} \sqrt{\Omega}, & \sigma_0 < \pi/h, \\ \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) d\omega}, & \sigma_0 = \pi/h. \end{cases}$$

Пусть $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$, $\sigma_0 < \pi/h$. Покажем, что метод $\hat{m} : L_\infty(-\sigma; \sigma) \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\hat{m}(y) = \begin{cases} \alpha(\omega)y(\omega), & |\omega| < \sigma_0, \\ 0, & |\omega| \geq \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным.

Для оценки оптимальной погрешности восстановления разделенных разностей рассмотрим экстремальную задачу

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^k x - \hat{m}_k(y)\|_{l_{2,h}(\mathbb{Z})} \rightarrow \max, \quad \|(Fx)(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_\infty(-\sigma; \sigma)} \leq \delta, \\ x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), \quad y \in L_\infty(-\sigma; \sigma). \end{aligned} \quad (6)$$

В образах Фурье квадрат задачи принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\omega| < \sigma_0} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \alpha(\omega)y(\omega) \right|^2 d\omega \right. \\ \left. + \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2k}}{h^{2k}} |Fx(\omega)|^2 d\omega \right) \rightarrow \max, \\ |Fx(\omega) - y(\omega)|^2 \leq \delta^2 \end{aligned} \quad (7)$$

для почти всех $\omega \in (-\sigma, \sigma)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2n}}{h^{2n}} |Fx(\omega)|^2 d\omega \leq 1.$$

Положим $z(\omega) = Fx(\omega) - y(\omega)$, $|z(\omega)| \leq \delta$. Тогда максимизируемое выражение можно представить в виде

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\omega| < \sigma_0} \left| \left(\frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega) \right) \cdot Fx(\omega) + \alpha(\omega)z(\omega) \right|^2 d\omega \right. \\ \left. + \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega \right) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Оценим подынтегральное выражение из первого интеграла, применив неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega) \right) \cdot Fx(\omega) + \alpha(\omega)z(\omega) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega)}{\sqrt{\hat{\lambda}_1(\omega)}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_1(\omega)} Fx(\omega) + \frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{\hat{\lambda}_2(\omega)}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_2(\omega)} z(\omega) \right|^2 \\ &\leq \left(\frac{\left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega) \right|^2}{\hat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_2(\omega)} \right) \cdot \left(\hat{\lambda}_1(\omega) |Fx(\omega)|^2 + \hat{\lambda}_2(\omega) |z(\omega)|^2 \right), \end{aligned}$$

где $\hat{\lambda}_1(\omega) > 0$, $\hat{\lambda}_2(\omega) > 0$ для почти всех $\omega < \sigma_0$.

Пусть

$$Q(\omega) = \frac{\left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega) \right|^2}{\hat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_2(\omega)} \leq 1. \quad (8)$$

Тогда значение задачи не больше, чем

$$\begin{aligned} D &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} \hat{\lambda}_1(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} \hat{\lambda}_2(\omega) |z(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Пусть

$$\hat{\lambda}_1(\omega) = \frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)}, \quad \hat{\lambda}_2(\omega) = g^k(\omega) - \hat{\lambda}_1(\omega).$$

Тогда

$$\begin{aligned} D &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} \frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)} |Fx(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} \left(g^k(\omega) - \frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)} \right) |z(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Учитывая, что функция $g^{k-n}(\omega)$ неотрицательная, четная и убывающая при $\omega > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^{k-n}(\omega) \cdot g^n(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} g^{k-n}(\sigma_0) \int_{\sigma_0 \leq |\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$D \leq \frac{g^{k-n}(\sigma_0)}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) |Fx(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} \left(g^k(\omega) - \frac{g^n(\omega)}{g^{n-k}(\sigma_0)} \right) |z(\omega)|^2 d\omega.$$

Учитывая условия в задаче (7), получаем

$$D \leq g^{k-n}(\sigma_0) \cdot \left(1 - \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^n(\omega) d\omega\right) + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| < \sigma_0} g^k(\omega) d\omega.$$

Так как верхняя и нижняя оценки погрешности совпадают, метод $\hat{m}$ — оптимальный.

Покажем, что условие (8) выполнимо. Пусть

$$\alpha(\omega) = \frac{\hat{\lambda}_2(\omega)}{\hat{\lambda}_1(\omega) + \hat{\lambda}_2(\omega)} \cdot \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k}.$$

Тогда

$$Q(\omega) = \frac{\left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} - \alpha(\omega) \right|^2}{\hat{\lambda}_1(\omega)} + \frac{|\alpha(\omega)|^2}{\hat{\lambda}_2(\omega)} = \frac{g^k(\omega)}{\hat{\lambda}_1(\omega) + \hat{\lambda}_2(\omega)} = 1,$$

и условие выполняется.

Покажем, что при $\sigma = \frac{\pi}{h} < \hat{\sigma}$ метод $\hat{m} : L_\infty(-\sigma; \sigma) \rightarrow l_{2,h}(\mathbb{Z})$ такой, что

$$F\hat{m}(y) = \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} y(\omega), \quad |\omega| < \frac{\pi}{h}$$

оптимален. В этом случае квадрат задачи (7) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} y(\omega) \right|^2 d\omega \rightarrow \max, \quad (9)$$

$$|Fx(\omega) - y(\omega)|^2 \leq \delta^2$$

для почти всех $\omega \in (-\pi/h, \pi/h)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \frac{|e^{ih\omega} - 1|^{2n}}{h^{2n}} |Fx(\omega)|^2 d\omega \leq 1.$$

Учитывая ограничения в задаче (9), оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} \left| \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} Fx(\omega) - \frac{(e^{ih\omega} - 1)^k}{h^k} y(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) |Fx(\omega) - y(\omega)|^2 d\omega \leq \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{|\omega| \leq \pi/h} g^k(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Верхняя и нижняя оценки снова совпали, метод оптимален.

Пусть

$$\mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(n-1)} \in LAC(\mathbb{R}), f^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \right\}$$

— соболевское пространство, где $LAC(\mathbb{R})$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке. Рассмотрим класс функций

$$\mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_2^n(\mathbb{R}) : \|f^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1, (Ff)(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}) \right\},$$

где $(Ff)(\cdot)$ — преобразование Фурье функции f .

Заметим, что, в пределе при $h \rightarrow 0$ k -я разделенная разность последовательности $x \in \mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z})$ переходит в производную k -го порядка функции $f(\cdot) \in \mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R})$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(\omega) = \omega^2, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \hat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)}{\delta^2} \right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(\mathcal{L}_{2,h,\infty}^n(\mathbb{Z}), k, \delta) = \begin{cases} \delta \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^{2k+1}}{\pi(2k+1)}}, & \sigma \geq \hat{\sigma}, \\ \delta \sqrt{\left(\frac{\delta^2 \sigma^{(2k+1)}}{\pi(2k+1)} + \sigma^{2(k-n)} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \right)^{(2n+1)} \right) \right)}, & \sigma < \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Величина, стоящая в правой части равенства, совпадает с погрешностью восстановления k -й производной на классе $\mathbb{W}_{2,\infty}^n(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье, полученной в работе [6].

Кроме того, предельный оптимальный метод совпадает с оптимальным методом, полученным для этой задачи в той же работе.

Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика.—М.: Наука, 1985.—470 с.
3. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук.—1950.—Т. 5, № 2.—С. 165–177.
4. Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Мат. заметки.—1975.—Т. 17, № 3.—С. 359–368.
5. Унучек С. А. Оптимальное восстановление разделенных разностей по неточно заданной последовательности // Диф. уравнения.—2015.—(В печати).
6. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди — Литтлвуда — Поля и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Унучек Светлана Александровна
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики,
старший преподаватель
РОССИЯ, 119454, Москва, Проспект Вернадского, 78
E-mail: unuchek@mirea.ru

ON OPTIMAL RECOVERY OF THE OPERATOR OF k -th DIVIDED DIFFERENCE FROM ITS INACCURATELY GIVEN FOURIER TRANSFORM

Unuchek S. A.

This paper considers the recovery problem of the k -th divided difference of sequence, provided that the Fourier transform of this sequence on the interval is approximately known. The optimal recovery method is also constructed.

Key words: optimal recovery, extremal problem, divided difference, Fourier transform.