ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ РЕДУКТОРОВ

Шахнюк Л.А. *(БГИТА, Брянск, РФ)*

The problem of optimum designing many step reducers with cylindrical cogwheels is considered. Criterion function represents total interaxal distance. The technique of definition of a minimum of criterion function which has allowed to distribute rationally the transfer relation on steps of a reducer is given.

Оптимальное (наилучшее из возможных) решение представляет собой результат применения методов теории оптимизации в техническом проектировании. Под оптимизацией понимается процесс, в котором максимизируется (или минимизируется) количественная характеристика определенного свойства технического объекта. В данном случае требуется минимизировать суммарное межосевое расстояние.

Условия взаимодействия между элементами технической системы выражаются *уравнениями связи* (условиями равновесия, прочности, совместности перемещений и т.д.). Пусть m - число уравнений связи, описывающих условия функционирования системы. При проектировании эти уравнения образуют систему, содержащую n неизвестных ($x_1, x_2,...,x_n$) - *переменных проектирования.* Варьируя этими переменными, можно получить различные варианты проектных решений. Особенностью инженерных задач является то, что $m<n$. В этом случае каждая инженерная задача имеет множество решений. Число переменных n может быть достаточно большим, при этом увеличивается сложность и многовариантность задачи. Вот почему часто приходится уменьшать число переменных, используя те или иные соображения, или же допускать их изменения в некоторых пределах, определяемых требованиями технологии изготовления, стандартов и т.п. В соответствии с этим вводят *ограничения* на параметры проектируемого объекта. К ним следует отнести:

- функциональные ограничения на параметры оптимизации

$$\psi_s = \psi_s (x_1, x_2, ... , x_n) \le 0, s=[1, p].$$

Используя ограничения в виде равенства, т.е. $\psi_s=0$, можно понизить размерность задачи, уменьшив число изменяемых параметров;

- параметрические ограничения

$$x_i \in [a_i ,b_i], i=1,2, ... ,n.$$

Параметрические ограничения можно записать в другой форме, а именно : $a_i \le x_i \le b_i$, где a_i и b_i - минимальное и максимальное значения i-го параметра;

- дискретные ограничения

$$x_j \in \{ x_{j1} , x_{j2} , ... , x_{jn}\},$$

где x_{jk}, k=1, 2, ... ,n - допустимое дискретное значение j-го параметра, k - номер дискретного значения.

Дискретные ограничения связаны с требованиями стандартов, физической сущностью и т.д. (например, модуль зубчатого колеса как дискретная величина

устанавливается стандартом, число зубьев колеса должно быть целым числом). Кроме того, некоторые переменные могут иметь ограничения по знаку, выражаемые соотношением $x_j \geq 0$. Назначение ограничений является важным этапом при решении оптимизационной задачи, так как не учет каких-либо ограничений может привести к тому, что считающаяся "оптимальной" конструкция может иметь параметры (или структуру), не соответствующие оптимальным. В этой ситуации требуется затратить существенные расходы на доводку конструкции. С другой стороны, введение в рассмотрение избыточных ограничений усложняет расчет конструкции и в общем точность получаемых результатов. Таким образом, выбор ограничений представляет собой самостоятельную задачу и в большинстве случаев основывается на опыте и интуиции конструкторов.

Выбор оптимального решения или сравнение альтернативных решений проводится с помощью некоторой функции, определяемой проектными параметрами. Эта функция носит название целевой функции (или критерия качества). В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения параметров, при которых целевая функция имеет экстремум (минимум или максимум). *Целевая функция* - это главный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные или экономические задачи. Целевую функцию можно записать в виде

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow extr, \quad x_i \in D,$$

где переменные x_i принадлежат области допустимых значений D.

Целевых функций может быть несколько. Тогда в качестве основной функции цели (критерия качества) объекта может быть выбран суперкритерий, в который определенным образом входят несколько целевых функций. Иногда одна из целевых функций принимается в качестве основной, а остальные функции учитываются в виде ограничений. Можно выделить два класса задач оптимизации: безусловные и условные. Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума функции цели от n переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве n-мерного пространства (гиперкубе). Условные задачи или задачи с ограничениями требуют задания некоторых ограничений.

При конструировании многоступенчатых редукторов необходимо выбрать такие передаточные числа по ступеням, которые обеспечили бы минимальные размеры редуктора. Определяющим параметром (критерием качества) в этом случае будем считать суммарное межосевое расстояние a_Σ.

Межосевое расстояние между k-м и последующим k+1-м валами (рис. 1) определяется выражением

$$a_{k,k+1} = \frac{m_k}{2}\left(Z_{шk} + Z_{kk}\right) = \frac{m_k Z_{шk}}{2}\left(1 + u_k\right). \qquad (1)$$

Здесь k =1,2,...,n - число ступеней; m_k - модуль зубчатых колес k-й ступени, $u_k = Z_{kk} / Z_{шk}$ - передаточное число k-й ступени.

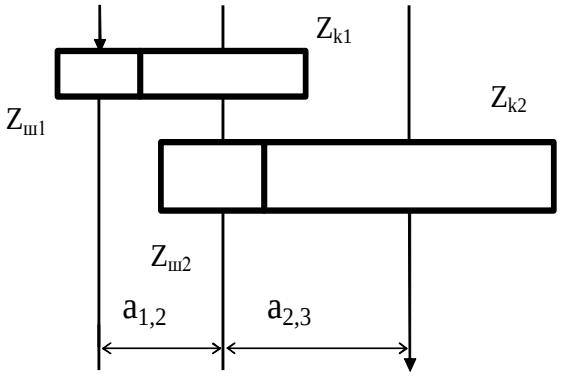


Рисунок 1- Схема редуктора

Суммарное межосевое расстояние - расстояние от оси первого (входного) вала редуктора до последнего (n+1) выходного вала запишем в виде

$$a_y = a_{1,n+1} = \frac{m_1 Z_{щ1}}{2}(1+u_1) + \frac{m_2 Z_{щ2}}{2}(1+u_2) + + \frac{m_n Z_{щn}}{2}(1+u_n). \qquad (2)$$

Предположим, что числа зубьев шестерен одинаковы для всех ступеней, тогда, переписав выражение (2), получим

$$a_\Sigma = \frac{m_1 Z_{щ1}}{2}\left[\ 1+u_1 + \frac{m_2(1+u_2)}{m_1} + \ldots + \frac{m_n(1+u_n)}{m_1}\ \right].$$

В качестве функции цели примем минимум суммарного межосевого расстояния, т. е. $a_\Sigma \to min$.

Сформулируем систему ограничений, рассматривая 2-х ступенчатый редуктор: 1) контактные напряжения на рабочих поверхностях зубьев при передаче крутящего момента должны быть не больше допускаемых; 2) вращающие моменты на шестернях связаны условием $T_{ш2}$-$T_{ш1}u_1$=0; 3) общее передаточное число u_Σ и передаточные числа ступеней u_1 и u_2 образуют ограничение в виде равенства u_Σ - $u_1 \cdot u_2$ =0.

Таким образом, выбор передаточных чисел в редукторе сводится к определению переменных проектирования, минимизирующих суммарное передаточное отношение и удовлетворяющих перечисленным требованиям.

Известно, что межосевое расстояние, определяющее габариты редуктора, зависит от контактных напряжений и других факторов, которые входят в выражения для стальных эвольвентных прямозубых передач внешнего зацепления. Полагая, что $k_{H1} = k_{H2}$, $\psi_{a1} = = \psi_{a2}$ и $[\sigma_{H1}] = [\sigma_{H2}]$, выразим суммарное межосевое расстояние $a_\Sigma = a_{1,2} + a_{2,3}$ в виде следующего уравнения

$$a_\Sigma = 450\left(\frac{k_H}{\psi_a[\sigma_H]^2}\right)^{1/3}\left[\left(\frac{T_{щ1}}{u_1}\right)^{1/3}(1+u_1) + \left(\frac{T_{щ2}}{u_2}\right)^{1/3}(1+u_2)\right] \quad . \qquad (3)$$

Перепишем уравнение (3), обозначив через C величину, стоящую перед квадратной скобкой и приняв во внимание, что $T_{H2} / T_{H1} = u_1$. Тогда получим выражение

$$a_\Sigma = C T_{щ1}^{1/3}\left[\ (1+u_1)u_1^{-1/3} + (1+u_2)u_1^{1/3}u_2^{-1/3}\ \right]. \qquad (4)$$

Для того чтобы найти экстремальное значение функции (4), в которой переменные u_1 и u_2 связаны между собой зависимостью $\varphi = u_\Sigma - u_1 u_2 = 0$, применим метод множителей Лагранжа. Сформулируем задачу следующим образом. Требуется найти экстремальные значения функции $F(u_1, u_2, \lambda)$, имеющей вид

$$F = a_\Sigma + \lambda\varphi, \tag{5}$$

где λ - неопределенный множитель.

Для нахождения экстремальных значений функции, выраженной уравнением (5) возьмем частные производные.

В результате получим

$$\lambda = \left(-\frac{1}{3} u_2^{-4/3} u_1^{-2/3} + \frac{2}{3} u_2^{-1/3} u_1^{-2/3} \right).$$

Решая совместно систему уравнений, полученных путем приравнивания производных нулю, с учетом, что $u_2 = u_\Sigma / u_1$, найдем требуемую зависимость передаточного числа первой ступени от общего передаточного числа редуктора. Эта зависимость имеет вид

$$u_1 = \frac{1 + u_\Sigma^{2/3}}{2\left(1 + u_\Sigma^{-1/3}\right)}. \tag{6}$$

На рис. 2 приведена зависимость передаточного числа первой ступени от общего передаточного числа редуктора при соблюдении принятых условий и ограничений. Этот график позволяет произвести разбивку передаточного числа по ступеням редуктора, если известно общее передаточное число редуктора.

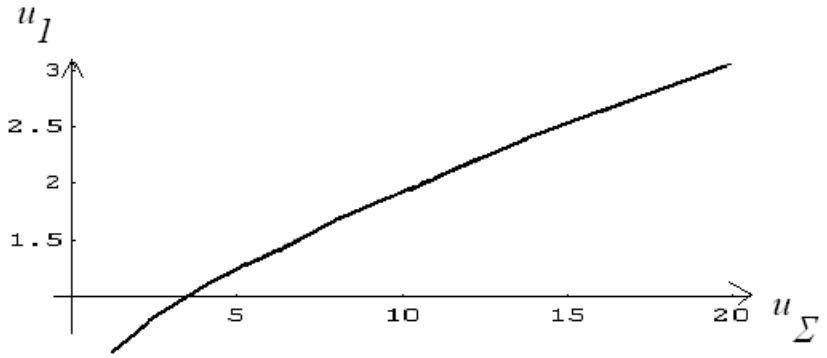


Рисунок 2- Зависимость передаточного числа первой ступени от общего передаточного числа редуктора

Рассмотренный пример представляет собой частный случай оптимизационной задачи. В общем случае задачи проектирования машин являются многокритериальными, когда приходится учитывать уменьшение себестоимости, увеличение надежности, уменьшение материалоемкости, увеличение КПД и т.д.