$$x_i A^i_{ab} t^a t^b + \nu x_i A^i_a t^a = 0.$$

Отсюда заключаем, что каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ и гиперплоскости (30) отвечает в $\tilde{A}_p$ асимптотический гиперконус $R^2_{p-1}(x)$ гиперквадрик $R^2_{p-1}(\nu)$, не зависящий от параметра ν. Этот гиперконус определяется уравнением

$$x_i A^i_{ab} t^a t^b = 0. \qquad (32)$$

Отсюда следует, что в каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ в пространстве A_n существует гиперконус Ψ^p_{n-1} класса p с вершиной в точке $A \in A_n$, представляющий собой совокупность всех гиперплоскостей (30) в A_n, которым отвечают в $\tilde{A}_p$ вырожденные гиперконусы (32) по крайней мере, с прямолинейными вершинами, проходящими через точку $A \in A_n$. Этот гиперконус $\Psi^p_{n-1} \subset A_n$ определяется в тангенциальных координатах x_i уравнением

$$\det[x_i A^i_{ab}] = 0 \Leftrightarrow \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} = 0;$$

$$\Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \frac{1}{p!} A^{(i_1}_{[1|1|} A^{i_2}_{2|2|} \ldots A^{i_p)}_{p|p|]};$$

$$\nabla \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p} + 2\Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p}(\Theta^1_1 + \Theta^2_2 + \ldots + \Theta^p_p) =$$

$$= \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_p}_a \Theta^a, \ (i_1, i_2, \ldots, i_p = \overline{1,n}; a = \overline{1,p}). \qquad (33)$$

Здесь явный вид величин $\Phi^{i_1 \ldots i_2 i_p}_a$ для нас не существенен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
2. Лаптев Г.Ф. К инвариантной теории дифференцируемых отображений // Труды геометрического семинара. – Т. 6. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – С. 37–42.
3. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий // Итоги науки. Вып. Геометрия. 1963. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 65–107.
4. Павлюченко Ю.П., Рыжков В.В. Об изгибании точечных соответствий между проективными пространствами // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 235–241.
5. Павлюченко Ю.В. О характеристической системе точечных соответствий // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 221–233.
6. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Труды геометрического семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 235–241.
7. Рыжков В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Итоги науки. Вып. Алгебра. Топология. Геометрия, 1970. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1971. – С. 153–174.

Поступила 19.03.2010 г.

УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЯ АФФИННЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: lutchinin@mail.ru

Рассматриваются отображения аффинного пространства $\tilde{A}_p$ в аффинное пространство A_n (при $p \geq n$ и $p<n$) и в евклидово пространство E_n. Аналитически и геометрически изучается структура фундаментальных геометрических объектов этих отображений в смысле Г.Ф. Лаптева.

Ключевые слова:
Дифференцируемые отображения, многомерные аффинные и евклидовы пространства.
Key words:
Differentiable mappings, multidimensional affine and Euclidian spaces.

Введение

Рассматривается отображение $V^n_p : \tilde{A}_p \to A_n$ и доказывается существование (при $p \geq n$ и $p<n$) в аффинном пространстве A_n, отвечающем пространству $\tilde{A}_p$, инвариантного гиперконуса q^2_{n-1}, который в [1] считался заданным. Изучаются фундаментальные геометрические объекты первого и второго порядков дифференцируемого отображения V^n_p аффинного пространства $\tilde{A}_p$ в аффинное пространство A_n. Аналитически и геометрически строятся инвариантные геометрические образы, ассоциированные с геометрическими объектами отображения.

1. Инъективное дифференцируемое отображение

1.1. В этом случае точка $A \in A_n$ как образ точки $B \in \tilde{A}_p$ при инъективном отображении V^n_p является текущей точкой p-мерной поверхности (p-поверхности) $S_p \subset A_n$ с касательной p-плоскостью L_p. Аффинный репер $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ в A_n (см. [1. Ур. (2)]) выбирается так, чтобы

$$L_p = (\bar{A}, \bar{e}_1, \ldots \bar{e}_p). \tag{1}$$

Тогда (см. [1. Ур. (29)]) получаем

$$A_a^{\hat{\alpha}} = 0 \Rightarrow \omega^\alpha = A_a^\alpha \Theta^a, \nabla A_a^\alpha = A_{ab}^\alpha \Theta^b, A_{[ab]}^\alpha = 0,$$

$$A_a^\alpha \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = A_{ab}^{\hat{\alpha}} \Theta^b, A_{[ab]}^{\hat{\alpha}} = 0,$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, p}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{p+1, n}; a, b, c = \overline{1, p}). \tag{2}$$

Отсюда следует, что с инъективным отображением V_p^n ассоциируется отображение

$$V : \tilde{A}_p \to L_p. \tag{3}$$

Будем предполагать, что это отображение является невырожденным (биективным), т. е. $\det[A_a^\alpha] \neq 0$, тогда можно ввести в рассмотрение величины B_β^a по формулам

$$B_\beta^a A_a^\alpha = \delta_\beta^\alpha, B_\alpha^a A_b^\alpha = \delta_b^a, (\alpha, \beta = 1, p, a, b = 1, p). \tag{4}$$

Из дифференциальных уравнений (2) с учетом (4) получаем

$$\nabla B_\beta^b = B_{\beta a}^b \Theta^a, B_{\beta a}^b = -A_{ca}^\alpha B_\alpha^b B_\beta^c, \Theta^a = B_\beta^a \omega^\beta,$$

$$\omega^\alpha = A_b^\alpha \Theta^b, \omega_\alpha^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} \omega^\beta = \tilde{A}_{\alpha b}^{\hat{\alpha}} \Theta^b \Rightarrow$$

$$A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} = A_{ab}^{\hat{\alpha}} B_\alpha^a B_\beta^b \Rightarrow A_{[\alpha\beta]}^{\hat{\alpha}} = 0, A_{[ab]}^{\hat{\alpha}} = 0, A_{ab}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}} A_a^\alpha A_b^\beta,$$

$$\tilde{A}_{\alpha b}^{\hat{\alpha}} = A_{ab}^{\hat{\alpha}} B_\alpha^a, \nabla A_{\alpha b}^{\hat{\alpha}} = \tilde{A}_{\alpha bc}^{\hat{\alpha}} \Theta^c,$$

$$\tilde{A}_{\alpha bc}^{\hat{\alpha}} = A_{abc}^{\hat{\alpha}} B_\alpha^a + A_{ab}^{\hat{\alpha}} B_{\alpha c}^a, (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{p+1, n}). \tag{5}$$

Из (1), (5) следует, что гиперконус Φ_{n-1}^p класса p с вершиной в точке $A \in A_n$, отвечающей точке $B \in \tilde{A}_p$ при отображении (3) и определяемый в тангенциальных координатах репера R уравнением

$$\Phi^{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \ldots \hat{\alpha}_p} x_{\hat{\alpha}_1} x_{\hat{\alpha}_2} \ldots x_{\hat{\alpha}_p} = 0, (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p = \overline{p+1, p}),$$

представляет собой совокупность гиперплоскостей гиперконуса Ψ_{n-1}^p (см. (33) в [1]), которые проходят через p-плоскость L_p. Этот гиперконус является касательным (фокальным) в смысле [2, 3].

1.2. Каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ соответствующей точке $A \in A_n$ сопоставим $(n-p)$-плоскость P_{n-p}: $P_{n-p} \cup L_p = A_n$, $P_{n-p} \cap L_p = A$, которую в точечных координатах репера R зададим уравнениями

$$x^\alpha = C_{\hat{\alpha}}^\alpha x^{\hat{\alpha}}. \tag{6}$$

Здесь величины $C_{\hat{\alpha}}^\alpha$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla C_{\hat{\alpha}}^\alpha + \omega_{\hat{\alpha}}^\alpha = C_{\hat{\alpha} b}^\alpha \Theta^b.$$

Заметим в соответствии с [4, 5], что линейное подпространство (6) является оснащающей (нормальной) $(n-p)$-плоскостью p-поверхности $S_p \subset A_n$ в точке A.

С помощью компонент геометрического объекта Γ_2, величин $\Phi^{i_1 \ldots i_{p-1} i_j}$ [1] и $C_{\hat{\alpha}}^\alpha$ в каждой точке $B \in \tilde{A}_p$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$\tilde{A}_{ab}^\gamma = A_{ab}^\gamma - A_{ab}^{\hat{\alpha}} C_{\hat{\alpha}}^\gamma, \tilde{A}_{[ab]}^\gamma = 0; D_{ab}^c = \tilde{A}_{ab}^\alpha B_\alpha^c, D_{[ab]}^c = 0;$$

$$D_a = D_{ab}^b = D_{ba}^b;$$

$$E_\alpha = D_a B_\alpha^a = D_{\alpha b}^a B_a^b = \tilde{A}_{ab}^\beta B_\beta^a B_\alpha^b;$$

$$E_{\hat{\alpha}} = -C_{\hat{\alpha}}^\alpha E_\alpha = -C_{\hat{\alpha}}^\alpha \tilde{A}_{ab}^\beta B_\beta^a B_\alpha^b, g^{ij} = \Phi^{i_1 \ldots i_{p-2} ij} E_{i_1} \ldots E_{i_{p-2}}, \tag{7}$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\nabla \tilde{A}_{ab}^\gamma = \tilde{A}_{abc}^\gamma \Theta^c; \tilde{A}_{abc}^\gamma = A_{abc}^\gamma - A_{abc}^{\hat{\alpha}} C_{\hat{\alpha}}^\gamma - A_{ab}^{\hat{\alpha}} C_{\hat{\alpha} c}^\gamma;$$

$$\nabla D_{ab}^c = D_{abs}^c \Theta^s, D_{abs}^c = \tilde{A}_{abs}^\alpha B_\alpha^c + \tilde{A}_{ab}^\alpha B_{\alpha s}^c;$$

$$\nabla D_a = \tilde{D}_{ab} \Theta^b; \tilde{D}_{ab} = D_{cab}^c; \nabla E_\alpha = E_{\alpha b} \Theta^b;$$

$$E_{\alpha b} = D_{cb} B_\alpha^c + D_c B_{\alpha b}^c; \nabla E_{\hat{\alpha}} = E_{\hat{\alpha} b} \Theta^b;$$

$$E_{\hat{\alpha} b} = -C_{\hat{\alpha} b}^\alpha E_\alpha - C_{\hat{\alpha}}^\alpha E_{\alpha b}; \nabla g^{ij} = g_a^{ij} \Theta^a;$$

$$g_a^{ij} = \Phi_a^{i_1 \ldots i_{p-2} ij} E_{i_1} \ldots E_{i_{p-2}} + \Phi^{i_1 i_2 \ldots i_{p-2} ij} E_{i_1 a} E_{i_2} \ldots E_{i_{p-2}} + \ldots +$$

$$+ \Phi^{i_1 \ldots i_{p-3} i_{p-2} ij} E_{i_1} \ldots E_{i_{p-3}} E_{i_{p-2} a};$$

$$(i_1, \ldots i_p, i, j = \overline{1, n}; a, b, c, s = \overline{1, p};$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, p}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{p+1, n}).$$

Найдем те геометрические образы, которые определяются величинами (7).

Рассмотрим гиперплоскость $\tilde{H}_{p-1}(u)$ в пространстве $\tilde{A}_p$, проходящую через точку $B \in \tilde{A}_p$ и определяемую уравнением

$$u_c u^c = 0. \tag{8}$$

Эта гиперплоскость будет в силу (3) и (4) прообразом $(p-1)$-плоскости $L_{p-1}(u) \subset L_p$ при отображении V, которая определяется уравнениями

$$u_c B_\alpha^c x^\alpha = 0, x^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{9}$$

Из (8) и (9) в силу (6) следует, что точке $B \in \tilde{A}_p$ в A_n отвечает гиперплоскость $G_{p-1}(u) = H_{p-1}(u) \cup P_{n-p}$, которая определяется уравнением

$$u_c B_\alpha^c (x^\alpha - C_{\hat{\alpha}}^\alpha x^{\hat{\alpha}}) = 0.$$

Этой гиперплоскости в пространстве $\tilde{A}_p$ отвечает гиперконус $\tilde{R}_{p-1}^2(u)$ (см. (32) в [1]) с вершиной $B \in \tilde{A}_p$, определяемый с учетом (7) уравнением

$$u_c B_\alpha^c \tilde{A}_{ab}^\alpha t^a t^b = 0.$$

Таким образом, каждому направлению $t \in \tilde{A}_p$ отвечает центроаффинное преобразование пространства $\tilde{A}_p$ в себя с центром в точке $B \in \tilde{A}_p$:

$$\Pi(t) = \{\tilde{A}_{ab}^c t^b\}, \ \tilde{A}_{ab}^c = \tilde{A}_{ab}^\alpha A_\alpha^c.$$

Это центроаффинное преобразование каждую $(p-1)$-мерную плоскость (8) переводит в $(p-1)$-плоскость в $\tilde{A}_p$, проходящую через точку B и полярно сопряженную направлению t относительно гиперконуса $\tilde{R}_{p-1}^2(u)$.

Из (9) замечаем, что точке $B \in \tilde{A}_p$ отвечает в $\tilde{A}_p$ гиперплоскость $\tilde{\Gamma}_{p-1} = \{t \in \tilde{A}_p | \mathrm{ter}\,\Pi(t) = 0\}$, которая определяется уравнением $D_a t^a = 0$.

Эта гиперплоскость будет прообразом $(p-1)$-плоскости $L_{p-1} \subset A_n$ при отображении (3), которая в силу (7) в терминах репера R определяется уравнениями

$$E_\alpha x^\alpha = 0, x^{\hat{\alpha}} = 0.$$

Отсюда с учетом (6) и (7) заключаем, что точке $B \in \tilde{A}_p$ в пространстве A_n отвечает гиперплоскость $\tilde{E}_{n-1} = P_{n-p} \cup \Gamma_{p-1}$, которая задается уравнением

$$E_i x^i = 0 \Leftrightarrow E_\alpha x^\alpha + E_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0. \tag{10}$$

Из (33) (см. [1]) с учетом (7) и (10) следует, что гиперконус $k^2_{n-1}\subset A_n$ второго класса с вершиной в точке $A\in A_n$, определяемый уравнением

$$g^{ij}x_ix_j=0, \qquad (11)$$

является квадратичным полюсом (полюсом второго порядка) в смысле [7] гиперплоскости $\tilde{E}_{n-1}$ относительно гиперконуса Φ^p_{n-1}.

Покажем, что в общем случае гиперконус (11) является невырожденным, т. е. $\det[g^{ij}]\neq 0$.

Геометрически это означает, что гиперконус k^2_{n-1} в общем случае имеет только точечную вершину в точке $A\in A_n$, через которую проходят все его гиперплоскости.

Из (7) замечаем, что величины g^{ij} в конечном итоге зависят от величин A^i_{ab} ($i=\overline{1,n}$; $a,b=\overline{1,p}$; $A^i_{[ab]}=0$), общее число независимых из которых равно $n_1=\dfrac{np(p+1)}{2}$, а число независимых симметричных величин g^{ij} равно $n_2=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Следовательно, получаем

$$n_2\le n_1 \Leftrightarrow n\le p^2+p-1. \qquad (12)$$

Учитывая, что $p<n$, получаем, что все результаты, о которых ранее шла речь (см. [1], пункт 3), справедливы в общем случае при всех p и n, удовлетворяющих неравенству

$$p<n\le p^2+p-1. \qquad (13)$$

С учетом (12) и (13) величины A^i_{ab} можно всегда так подобрать, чтобы $g^{ij}=\delta^{ij}$.

Поэтому в общем случае в точке $B\in\tilde{A}_p$ имеет место неравенство $\det[g^{ij}]\neq 0$. Это дает основание ввести в рассмотрение симметрические величины g_{ik} по формулам $g_{ik}g^{kj}=\delta^k_i$. Из (7) следует, что величины g_{ik} удовлетворяют дифференциальным уравнениям,

$$\nabla g_{ik}=g_{ika}\Theta^a;\ g_{ika}=-g^{qs}_a g_{qi}\,g_{sk}$$
$$(i,j,k,q,s=\overline{1,n};a=\overline{1,p}).$$

Геометрически величины g_{ik} определяют в пространстве A_n гиперконус q^2_{n-1} второго порядка с вершиной в точке $A\in A_n$, который огибается гиперконусом (11) и определяется уравнением типа (4) (см. [1]).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. С каждой оснащающей $(n-p)$-плоскостью $P_{n-p}\subset A_n$, отвечающей точке $B\in\tilde{A}_p$, при отображении $V^n_p:\tilde{A}_p\to A_n(p<n\le p^2+p-1)$ в пространстве A_n инвариантным образом ассоциируется гиперконус q^2_{n-1}, огибаемый гиперконусом $k^2_{n-1}\subset A_n$ – квадратичным полюсом гиперплоскости $\tilde{E}_{n-1}\subset A_n$ относительно гиперконуса $\Phi^p_{n-1}\subset A_n$.

Определение. Линейное подпространство $P_{n-p}\subset A_n$, отвечающее точке $B\in\tilde{A}_p$ и гиперконус q^2_{n-1}, о котором идет речь в теореме 1, называются ассоциированным.

Замечание 1. В обзорной статье Г.Ф. Лаптева [4], а также не вошедшей в эту статью работах [5, 6], указаны инвариантные построения оснащающих (нормальных) линейных подпространств многомерных поверхностей в аффинных и проективных пространствах. В соответствии с теоремой 1, взяв за основу соответствующую оснащающую плоскость, построенную в одной из указанных статей и применив ее к p-поверхности $S_p\subset A_n$, можно получить ассоциированный инвариантный гиперконус $q^2_{n-1}\subset A_n$, который и будет решением задачи, об инвариантном определении гиперконуса $q^2_{n-1}\subset A_n$.

В следующей теореме будет указано инвариантное построение оснащения p-поверхности $S_p\subset A_n$, определенное отображением $V^n_p:\tilde{A}_p\to A_n\,(p<n\le p^2+p-1)$.

Теорема 2. Каждой точке $B\in\tilde{A}_p$ в общем случае при отображении $V^n_p:\tilde{A}_p\to A_n$ $(p<n\le p^2+p-1)$ в пространстве A_n отвечает конечное число оснащающих плоскостей P_{n-p} p-поверхности S_p в A_n, полярно сопряженных касательной p-плоскости L_p относительно гиперконусов $k^2_{n-1}\subset A_n$, огибающих соответствующие ассоциированные гиперконусы q^2_{n-1}.

Доказательство. Из (6) и (11) с учетом (1) следует, что $(n-p)$-плоскость P_{n-p} и p-плоскость L_p полярно сопряжены относительно гиперконуса q^2_{n-1} тогда и только тогда, когда в точке $B\in\tilde{A}_p$ выполняются соотношения

$$g^{\alpha\hat{\beta}}+g^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=0. \qquad (14)$$

Если воспользоваться соотношениями (7), то из (14) можно получить следующую систему $p(n-p)$ неоднородных алгебраических уравнений порядка $2p(n-p)$ относительно величин $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$:

$$\phi^{\alpha\hat{\beta}}\equiv\Psi^{\alpha\hat{\beta}}+\tilde{g}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}+\tilde{g}^{\alpha\hat{\beta}}=0. \qquad (15)$$

Здесь $\Psi^{\alpha\hat{\beta}}$ – алгебраические соотношения, содержащие величины $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$ степеней $2,3,...,2p(p-n)$, причем

$$\tilde{g}^{\alpha\hat{\beta}}=\Phi^{\alpha_1...\alpha_{p-2}\alpha\hat{\beta}}g_{\alpha_1}...g_{\alpha_{p-2}};\ g_{\alpha}=A^{\beta}_{ab}B^a_{\beta}B^b_{\alpha};$$

$$\tilde{g}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}=-\frac{1}{p-1}\begin{pmatrix}\Phi^{(\alpha_1\alpha_2...\alpha_{p-3}\alpha_{p-2})\hat{\alpha}\hat{\beta}}g_{(\alpha_1}g_{\alpha_2}...g_{\alpha_{p-3}}g_{\alpha_{p-2})}+\\ +\Phi^{(\alpha_2...\alpha_{p-2}\hat{\alpha})\hat{\beta}}g_{\alpha_2}...g_{\alpha_{p-2}}\end{pmatrix}.$$

Подсчитаем ранг якобиевой матрицы $\Phi=\left[\dfrac{\partial\phi^{\alpha\hat{\beta}}}{\partial C^{\gamma}_{\hat{\gamma}}}\right]$ системы (15) при $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=0$. Используя условия $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=0$, из системы (15) получаем соотношения

$$\tilde{g}^{\alpha\hat{\beta}}=0. \qquad (16)$$

Матрица Φ будет иметь отличный от нуля минор порядка $p(n-p)$, равный

$$\{\det[\tilde{g}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}]\}^p. \qquad (17)$$

Заметим, что $\tilde{g}^{ij}=g^{ij}\Big|_{C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}=0}$. Поэтому в силу (16) получаем, что $\det[g^{ij}]=\det[\tilde{g}^{\alpha\beta}]\cdot\det[\tilde{g}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}]\neq 0$. Отсюда с учетом (17) следует, что ранг матрицы в общем случае равен $p(p-n)$, поэтому система (15) состоит из алгебраически независимых уравнений. Следовательно, система (15) в общем случае имеет конечное число решений относительно $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}$. Теорема 2 доказана.

2. Биективное дифференцируемое отображение $V_n^n:\widetilde{A}_p \to A_n$ $(p=n)$

Каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$, соответствующей точке A при отображении $V_n^n:\widetilde{A}_p \to A_n$ соотнесем гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x) \subset A_n$, проходящую через точку $A \in A_n$. Этой гиперплоскости будет отвечать гиперконус $R_{n-1}^2(x) \subset A_n$ второго порядка с вершиной в точке B, определяемый уравнением $x_i A_{ab}^i t^a t^b = 0$, $(a,b,c,i,j,k,\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,n})$. Прообразом этого гиперконуса при отображении $V_p^n:\widetilde{A}_p \to A_n$ будет гиперконус $\widetilde{R}_{n-1}^2(x) \subset A_n$, определяемый уравнением

$$x_i \widetilde{A}_{jk}^i x^j x^k = 0. \tag{18}$$

Здесь величины $\widetilde{A}_{jk}^i$, симметрические по нижним индексам, определяются по формулам

$$\widetilde{A}_{jk}^i = A_{ab}^i B_j^b B_k^a ; \nabla \widetilde{A}_{jk}^i = \widetilde{A}_{jkc}^i \Theta^c ;$$

$$\widetilde{A}_{jkc}^i = A_{abc}^i B_j^b B_k^a + A_{ab}^i B_{jc}^b B_k^a + A_{ab}^i B_j^b B_{kc}^a . \tag{19}$$

Таким образом, каждому направлению $y = (\overline{A}, \overline{e}_k) y^k \subset A_n$, отвечающему точке $B \in \widetilde{A}_p$, соответствует центроаффинное преобразование $\Pi(y) = \{\widetilde{A}_{jk}^i y^k\}$ аффинного пространства A_n с центром в точке $A \in A_n$. Геометрически это преобразование любую гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x)$ переводит в поляру направления y относительно гиперконуса (18). Поэтому точке $B \in \widetilde{A}_p$ в соответствующем пространстве A_n отвечает инвариантная гиперплоскость $\widetilde{E}_{n-1} = \{y \in \widetilde{A}_p | \operatorname{ter} \Pi(y) = 0\}$, которая определяется уравнением $E_i y^i = 0$. Здесь величины E_i определяются по формулам и удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям

$$E_i = \widetilde{A}_{ik}^k ; \nabla E_k = E_{ka} \Theta^a ; E_{ka} = \widetilde{A}_{kja}^j .$$

Из (18) замечаем, что гиперконус $q_{n-1}^2 \subset A_n$ второго порядка с вершиной в точке A типа (4) (см. [1]) можно определить как гиперконус $\widetilde{R}_{n-1}^2(E)$, отвечающий гиперплоскости $\widetilde{E}_{n-1} \subset A_n$. При этом величины g_{ij} определяются по формулам $g_{ij} = E_k \widetilde{A}_{ij}^k$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям, $\nabla g_{ij} = g_{ija} \Theta^a$, где $g_{ija} = E_{ka} \widetilde{A}_{ij}^k + E_k \widetilde{A}_{ija}^k$.

Итак, в случае отображения $V_n^n:\widetilde{A}_n \to A_n$, как и в случае отображения $V_p^n:\widetilde{A}_p \to A_n (p<n)$, гиперконус $q_{n-1}^2 \subset A_n$ инвариантным образом определяется аналитически и геометрически соответствующим отображением.

3. Сюръективное дифференцируемое отображение $V_p^n:\widetilde{A}_p \to A_n (p<n)$

Проводится такая канонизация аффинного репера R пространства A_n, при которой

$$A_{\hat{a}_1}^i = 0, \det[A_{a_1}^i] \neq 0,$$

$$(i,j,k,a_1,b_1,c_1 = \overline{1,n}; \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = \overline{n+1,p}). \tag{20}$$

В рассмотрение вводится с учетом (20) система величин $B_i^{a_1}$ (см. (4) и (5)). Из (5) и (20) получаем

$$\nabla B_{\hat{a}_1}^{a_1} = \widetilde{B}_{\hat{a}_1 a}^{a_1} \Theta^a, (a,b,c = \overline{1,p}), \tag{21}$$

где величины $\widetilde{B}_{\hat{a}_1 a}^{a_1}$ определяются по формулам и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\widetilde{B}_{\hat{a}_1 a}^{a_1} = A_{\hat{a}_1 a}^i B_i^{a_1} ; A_{[\hat{a}_1 a]}^i = 0 \Rightarrow B_{[\hat{a}_1 a]}^{a_1} = 0;$$

$$\nabla \widetilde{B}_{\hat{a}_1 a}^{a_1} = \widetilde{B}_{\hat{a}_1 ab}^{a_1} \Theta^b ; \widetilde{B}_{\hat{a}_1 ab}^{a_1} = A_{\hat{a}_1 ab}^i B_i^{a_1} + A_{\hat{a}_1 a}^i B_{ib}^{a_1} . \tag{22}$$

Из (21) следует, что канонизация репера R, осуществленная по формулам (20), в общем случае существует. Геометрически эта фиксация означает, что $(p-n)$-плоскость

$$\overset{*}{\Gamma}_{p-n} = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_{n+1}, \dots, \overline{\varepsilon}_p) \subset \widetilde{A}_p \tag{23}$$

является ядром отображения $V_p^n:\widetilde{A}_p \to A_n$ в том смысле, что при указанном отображении $(p-n-1)$-плоскость, проходящая через любое направление $t = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a) t^a \subset \widetilde{A}_p$ и $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$, переводится в направление

$$x = (\overline{A}, \overline{e}_i) t^i = (\overline{A}, \overline{e}_i) A_{a_1}^i t^{a_1}.$$

Заметим, что в пространстве $\widetilde{A}_p$ определено распределение $\Delta_{p,p-n}: B \to \overset{*}{\Gamma}_{p-n}$, дифференциальными уравнениями которого являются (21). Поскольку с учетом (22) величины $B_{[\hat{a}_1 \hat{b}_1]}^{a_1} = 0$, то распределение $\Delta_{p,p-n}$ является голономным.

Точке $B \in \widetilde{A}_p$ сопоставим p-плоскость $\Gamma_p : \Gamma_p \cap \overset{*}{\Gamma}_{p-n} = B$; $\Gamma_p \cup \overset{*}{\Gamma}_{p-n} = \widetilde{A}_p$, которую определим уравнением

$$t^{\hat{a}_1} = h_{a_1}^{\hat{a}_1} t^{a_1}. \tag{24}$$

Здесь величины $h_{a_1}^{\hat{a}_1}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla h_{a_1}^{\hat{a}_1} + \Theta_{a_1}^{\hat{a}_1} = h_{a_1 a}^{\hat{a}_1} \Theta^a .$$

Линейное подпространство Γ_p является оснащающей p-плоскостью голономного распределения $\Delta_{p,p-n}$.

Точке $B \in \widetilde{A}_p$ в соответствующем пространстве A_n сопоставим гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x)$, определяемую уравнением (30) (см. [1]). Этой гиперплоскости в пространстве $\widetilde{A}_p$ отвечает гиперконус $R_{n-1}^2(x)$, определяемый уравнением (32) (см. [1]), откуда следует, что $(p-n)$-плоскость $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$ пересекает гиперконус $R_{n-1}^2(x)$ по $(p-n-1)$-мерному конусу $\widetilde{R}_{p-n-1}^2(x)$, определяемому системой уравнений

$$x_i \overset{*}{A}{}_{a_1 b_1}^i t^{a_1} t^{b_1} = 0; t^{\hat{a}_1} = h_{a_1}^{\hat{a}_1} t^{a_1}, \tag{25}$$

где

$$\overset{*}{A}{}_{a_1 b_1}^i = A_{a_1 b_1}^i + A_{a_1 \hat{b}_1}^i h_{b_1}^{\hat{b}_1} + A_{\hat{a}_1 b_1}^i h_{a_1}^{\hat{a}_1} + A_{\hat{a}_1 \hat{b}_1}^i h_{a_1}^{\hat{a}_1} h_{b_1}^{\hat{b}_1};$$

$$\nabla \overset{*}{A}{}_{a_1 b_1}^i = \overset{*}{A}{}_{a_1 b_1 c}^i \Theta^c . \tag{26}$$

Здесь явный вид величин $\overset{*}{A}{}_{a_1 b_1 c}^i$ для нас несущественен.

Из (23) и (25) заключаем, что гиперконус $\overset{*}{R}{}_{p-1}^2(x) \subset \widetilde{A}_p$, определяемый уравнением

$$x_i \overset{*}{A}{}_{a_1 b_1}^i t^{a_1} t^{b_1} = 0, \tag{27}$$

имеет вершину $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$ и представляет собой совокупность всех направлений $t = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a) t^a \in \Gamma_p$, которые вместе с $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$ принадлежат гиперконусу $\overset{*}{R}{}_{p-1}^2$. Прообразом гиперконуса $\overset{*}{R}{}_{p-1}^2(x) \subset \widetilde{A}_p$ при отображении $V_p^n:\widetilde{A}_p \to A_n (p>n)$ является гиперконус $\widetilde{R}_{n-1}^2(x) \subset A_n$, определяемый уравнением $x_i \widetilde{A}_{jk}^i x^j x^k = 0$. Здесь величины $\widetilde{A}_{jk}^i$ определяются по формулам

$$\tilde{A}^i_{jk} = \overset{*}{A}{}^i_{ab} B^b_j B^a_k \tag{28}$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям типа (19).

Как и в предыдущем пункте определяется гиперконус $\tilde{R}^2_{n-1}(E)$, отвечающий гиперплоскости $\tilde{E}_{n-1} \subset \tilde{A}_p$.

Таким образом, и в случае $p>n$ каждому оснащению $\overset{*}{\Gamma}_{p-n} \subset \tilde{A}_p$ в пространстве A_n отвечает гиперконус $\tilde{q}^2_{n-1} = \tilde{R}^2_{n-1}(E)$, определяемый уравнением $g_{ij}x^i x^j=0$, где

$$g_{ij} = E_k \tilde{A}^k_{ij}, E_k = \tilde{A}^j_{kj}.$$

3.1. Инвариантное определение оснащения распределения $\Delta_{p,p-n}: B \to \overset{*}{\Gamma}_{p-n} (p>n)$

Из

$$E_i = \tilde{A}^k_{ik} \tag{29}$$

следует, что гиперконус $\tilde{R}^2_{n-1}(E) \subset \tilde{A}_p$, являющийся гиперконусом $\overset{*}{R}{}^2_{n-1}(E) \subset \tilde{A}_p$, отвечающим гиперплоскости $\tilde{E}_{n-1}$, определяется уравнением

$$G_{ab} t^a t^b = 0, (a, b = \overline{1, p}).$$

Здесь симметрические величины G_{ab} определяются по формулам

$$G_{ab} = E_i A^i_{ab}; \nabla G_{ab} = G_{abc} \Theta^c; G_{abc} = E_{ic} A^i_{ab} + E_i A^i_{abc}. \tag{30}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Точке $B \in \tilde{A}_p$ в общем случае при $p>n$ отвечает конечное число оснащающих p-плоскостей L_p распределения $\Delta_{p,p-n}$, сопряженных соответствующим $(p-n)$-плоскостям $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$ относительно гиперконуса $\overset{*}{R}{}^2_{p-1}(E) \subset \tilde{A}_p$.

Доказательство. Из (23), (24) и (30) следует, что линейные пространства Γ_p и $\overset{*}{\Gamma}_{p-n}$ в точке $B \in \tilde{A}_p$ сопряжены относительно гиперконуса $\overset{*}{R}{}^2_{p-1}(E)$ тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$\psi_{\hat{q}_1 r_1} \equiv G_{\hat{q}_1 r_1} + G_{\hat{q}_1 \hat{r}_1} h^{\hat{r}_1}_{r_1} = 0, (r_1, q_1 = \overline{1, n}; \hat{r}_1, \hat{q}_1 = \overline{n+1, p}).$$

Отсюда в силу (26), (28), (29) и (30) получается следующая система $n(p-n)$ неоднородных алгебраических уравнений третьего порядка, содержащих $p(p-n)$ величин $h^{\hat{r}_1}_{r_1}$:

$$\psi_{\hat{q}_1 r_1} \equiv \tilde{G}^{b_1 a_1}_{\hat{q}_1 \hat{r}_1 \hat{a}_1 \hat{b}_1} h^{\hat{a}_1}_{a_1} h^{\hat{b}_1}_{b_1} h^{\hat{r}_1}_{r_1} + \tilde{G}^{s_1 d_1}_{\hat{q}_1 \hat{s}_1 \hat{d}_1 r_1} h^{\hat{s}_1}_{s_1} h^{\hat{d}_1}_{d_1} + \\ + G^{s_1}_{\hat{q}_1 r_1 \hat{s}_1} h^{\hat{s}_1}_{s_1} + \tilde{G}_{\hat{q}_1 r_1} = 0, \tag{31}$$

где

$$\tilde{G}^{s_1 d_1}_{\hat{q}_1 \hat{s}_1 \hat{d}_1 r_1} = B^{b_1}_k B^{a_1}_i \begin{pmatrix} A^i_{\hat{q}_1 r_1} A^k_{\hat{a}_1 \hat{b}_1} \delta^{\hat{a}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{a_1} \delta^{d_1}_{b_1} \delta^{\hat{b}_1}_{\hat{d}_1} + \\ + A^i_{\hat{q}_1 \hat{r}_1} A^k_{\hat{a}_1 b_1} \delta^{\hat{a}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{a_1} \delta^{d_1}_{r_1} \delta^{\hat{r}_1}_{\hat{d}_1} + \\ + A^i_{\hat{q}_1 \hat{r}_1} A^k_{a_1 \hat{b}_1} \delta^{\hat{b}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{b_1} \delta^{d_1}_{r_1} \delta^{\hat{r}_1}_{\hat{d}_1} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{G}^{s_1}_{\hat{q}_1 r_1 \hat{s}_1} = B^{b_1}_k B^{a_1}_i \begin{pmatrix} A^i_{\hat{q}_1 r_1} A^k_{\hat{a}_1 b_1} \delta^{\hat{a}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{a_1} + A^i_{\hat{q}_1 r_1} A^k_{a_1 \hat{b}_1} \delta^{\hat{b}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{b_1} + \\ + A^i_{\hat{q}_1 \hat{r}_1} A^k_{a_1 b_1} \delta^{\hat{r}_1}_{\hat{s}_1} \delta^{s_1}_{r_1} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{G}_{\hat{q}_1 r_1} = A^i_{\hat{q}_1 r_1} A^k_{a_1 b_1} B^{b_1}_k B^{a_1}_i;$$

$$G^{b_1 a_1}_{\hat{q}_1 \hat{r}_1 \hat{a}_1 \hat{b}_1} = A^i_{\hat{q}_1 \hat{r}_1} B^{b_1}_k B^{a_1}_i A^k_{\hat{a}_1 \hat{b}_1};$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1, r_1, q_1, s_1 = \overline{1, n}; \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{q}_1, \hat{r}_1, \hat{s}_1 = \\ = \overline{n+1, p}; i, k = \overline{1, n}).$$

Заметим с учетом (21), (26), (29) и (30), что $\frac{p(p+1)}{2}$ симметрических величин G_{ab} выражаются в конечном итоге через $\frac{np(p+3)}{2}$ независимых величин $B^{a_1}_i$ и A^i_{ab}. Очевидно, что $\frac{p(p+1)}{2} < \frac{np(p+3)}{2}$.

Поэтому так же, как при доказательстве теоремы 1, показывается, что система (31) в общем случае состоит из алгебраически независимых уравнений. Следовательно, она имеет конечное число решений относительно $h^{\hat{r}_1}_{r_1}$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 и результатов предыдущего пункта вытекает, что с каждой точкой $B \in \tilde{A}_p$ в соответствующем пространстве $A_n (p>n)$ инвариантным образом ассоциируется конечное число гиперконусов $q^2_{n-1} \subset A_n$.

4. Случай отображения аффинных и евклидовых пространств

Рассмотрим случаи, когда одно из аффинных пространств $\tilde{A}_p$ или A_n является евклидовым пространством или оба эти пространства являются евклидовыми.

4.1. Отображение $V^n_p: \tilde{E}_p \to A_n$

В этом случае пространство $\tilde{E}_p$ является евклидовым, тогда репер $\tilde{R} = \{\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a\}$ является ортонормальным репером и 1-формы Θ_a^b в формулах (1) удовлетворяют соотношениям $\Theta_a^b + \Theta_b^a = 0$ $(a, b = \overline{1, p})$.

Заметим, что все результаты работы [1] и пунктов 1–3 сохраняются и для этого отображения. Однако в данном пункте будет дано другое инвариантное построение гиперконуса $q^2_{n-1} \subset A_n$ не зависит от выбора значений p и n.

Каждой точке $B \in \tilde{E}_p$ в соответствующем аффинном пространстве A_n сопоставим гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x)$, определенную уравнением (30) (см.[1]). Этой гиперплоскости в евклидовом пространстве $\tilde{E}_p$ отвечает гиперконус $R^2_{p-1}(x) \subset \tilde{E}_p$, определяемый уравнением (32) (см. [1]). Заметим, что матрица порядка q, отвечающая гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(x)$:

$$\tilde{\Pi}(x) = \{x_i A^i_{ab}\}, \tag{32}$$

определяет некоторое центроаффинное преобразование пространства $\tilde{E}_p$ в себя с центром в точке B: каждому направлению $v = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a) v^a \in \tilde{E}_p$ отвечает направление $t = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}^b) x_i A^i_{ab} v^a$, ортогональное полярной гиперплоскости направления v относительно гиперконуса $R^2_{p-1}(x) \subset \tilde{E}_p$. Поэтому все гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(x) \subset A_n$ такие, что $\mathrm{ter}\tilde{\Pi}(x)=0$, пересекаются в пространстве A_n по направлению $f = (\overline{A}, \overline{e}_i) f^i$, где величины f^i определяются по формулам

$$f^i = \sum_{a=1}^{p} A^i_{aa}, \nabla f^i = f^i_c \Theta^c, f^i_c = \sum_{a=1}^{p} A^i_{aac}. \qquad (33)$$

Из уравнений (30), (33) работы [1] и (33) следует, что гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x) \subset A_n$ является линейным полюсом направления f относительно гиперконуса $\Phi^p_{n-1}(x) \subset A_n$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi^{i_1 i_2 \dots i_{p-1} i} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p-1}} = \lambda f^i, \lambda \neq 0, (i_1, \dots, i_{p-1}, i = \overline{1, n}).$$

Можно, как и в случае доказательства теоремы 1 показать, что эта система определяет в общем случае при $p>2$ конечное число полюсов направления f относительно гиперконуса Φ^p_{n-1}.

Проведем такую канонизацию аффинного репера R в A_n, при которой

$$f^1 = f^2 = \dots = f^{n-1} = 0; f^n \neq 0; \Phi^{j \dots jk} = 0;$$
$$\det\left[A^{j \dots jk}\right] \neq 0, (j, k = \overline{1, n}). \qquad (34)$$

Из (33) с учетом (34) следует, что в точке $B \in \widetilde{E}_p$ имеют место дифференциальные уравнения

$$\omega^n_i = A^n_{ia}\Theta^a; \omega^i_n = A^i_{na}\Theta^a; \nabla A^n_{ia} = A^n_{iab}\Theta^b;$$
$$\nabla A^i_{na} = A^i_{nab}\Theta^b, (i, j \neq n).$$

Здесь явный вид величин, стоящих при Θ^b, для нас несущественен. В соответствии с [5] и с учетом (34) заключаем, что фиксация аффинного репера R в A_n, осуществленная по формулам (34), в общем случае существует.

Фиксация (34) геометрически означает, что направление $f^n_1 = (\overline{A}, \overline{e}_n)$ и гиперплоскость $\Gamma_{n-1} = (\overline{A}, \overline{e}_1, \dots, \overline{e}_{n-1})$ в пространстве A_n линейно сопряжены относительно гиперконуса $\Phi^p_{n-1} \subset A_n$. Поэтому гиперконус второго класса $\widetilde{q}^2_{n-1} \subset A_n$, определенный в тангенциальных координатах уравнением вида (11), где $g^{ik} = \Phi^{\overbrace{n \dots n}^{p-2} ik}, (i, k = \overline{1, n})$ является квадратичным полюсом гиперплоскости $\Gamma_{n-1} = (\overline{A}, \overline{e}_1, \dots, \overline{e}_{n-1})$ относительно гиперконуса Φ^p_{n-1}. Как и в пункте 1 можно показать, что гиперконус $\widetilde{q}^2_{n-1} \subset A_n$, определяемый уравнением (34) в случае отображения $V^n_p: \widetilde{E}_p \to A_n$, $(p>2)$ огибается гиперконусом второго класса $\widetilde{q}^2_{n-1} \subset A_n$.

4.2. Отображение $V^n_p: A_p \to E_n$

В этом случае пространство E_n является евклидовым и тогда репер $R = (\overline{A}, \overline{e}_i)$ является ортонормальным, т. е. $\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, а 1-формы ω^j_i в формулах (2) удовлетворяют соотношениям $\omega^j_i + \omega^i_j = 0$. Как и в предыдущем пункте 4.1 отметим, что все результаты пунктов 1–3 сохраняются. В этом пункте будет дано другое построение инвариантного гиперконуса $q^2_{n-1} \subset E_n$, аналогичное построению в предыдущем пункте.

Для этого построим инвариантную гиперплоскость $\widetilde{G}_{n-1} \subset E_n$ следующим образом.

Каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ в пространстве E_n сопоставим гиперплоскость $\Gamma_{n-1}(x)$, определяемую уравнением (30) (см. [1]). Тогда в аффинном пространстве $\widetilde{A}_p$ этой гиперплоскости будет отвечать гиперконус $R^2_{p-1}(x) \subset \widetilde{A}_p$, определяемый уравнением (32) (см. [1]).

Множество всех пар направлений в $\widetilde{A}_p: u = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_a)u^a$; $v = (\overline{B}, \overline{\varepsilon}_b)v^b$; таких, что их образы в E_n при отображении $V^n_p: \widetilde{A}_p \to E_n$ ортогональны, образуют билинейную форму

$$\varphi(u, v) = \varphi_{ab} u^a v^b, \qquad (35)$$

где симметрические величины φ_{ab} определяются по формулам $\varphi_{ab} = \sum_{i=1}^{n} A^i_a A^i_b$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \varphi_{ab} = \varphi_{abc}\Theta^c, \varphi_{abc} = \sum_{i=1}^{n} (A^i_{ac} A^i_b + A^i_a A^i_{bc}).$$

Из (35) замечаем, что в каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ билинейной форме $\varphi(u,v)$ сопоставляется инвариантный гиперконус $\varphi^2_{p-1} \subset \widetilde{A}_p$ второго порядка с вершиной $B \in \widetilde{A}_p$, определяемый уравнением $\varphi_{ab}u^a u^b = 0$. Можно показать, что в общем случае гипеконус φ^2_{n-1} является невырожденным. Поэтому можно ввести в рассмотрение величины φ^{ab} по формулам $\varphi^{ac}\varphi_{ab} = \delta^c_b$. Величины φ^{ab} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla \varphi^{ab} = \varphi^{ab}_c \Theta^c; \varphi^{ab}_c = -\varphi_{sqc}\varphi^{sa}\varphi^{qb}, (a, b, c, s, q = \overline{1, p}).$$

Заметим, что все гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(x) \subset E_n$, которым отвечают гиперконусы $R^2_{p-1}(x)$ аполярные гиперконусу φ^2_{p-1}, пересекаются по направлению: $g = (\overline{A}, \overline{e}_i)g^i$ в E_n. Здесь

$$g^i = A^i_{ab}\varphi^{ab} \text{ и } \nabla g^i = g^i_c \Theta^c; g^i_c = A^i_{abc}\varphi^{ab} + A^i_{ab}\varphi^{ab}_c.$$

Направление g ортогонально гиперплоскости $\widetilde{G}_{n-1} \subset E_n$, определяемой уравнением

$$g_i x^i = 0, g_i = -g^i.$$

С помощью этой гиперплоскости инвариантный гиперконус $q^2_{n-1} \subset E_n$ строится аналогично предыдущему пункту, причем в данном случае

$$g^{ij} = \Phi^{i_1 \dots i_{p-2} ij} g_{i_1} \dots g_{i_{p-2}}.$$

Замечание 2. В случае отображения $V^n_p: \widetilde{A}_p \to E_n$ каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ в пространстве E_n отвечает инвариантный гиперконус $q^2_{n-1} \subset E_n$, а также при этом отображении каждой точке $B \in \widetilde{A}_p$ в соответствующем евклидовом пространстве E_n будет отвечать m-плоскость L_m, проходящая через точку A и определяемая конечным числом способов (см. также [8]).

Замечание 3. В случае отображения $V^n_p: \widetilde{E}_p \to E_n$ будут иметь место не только результаты, изложенные в [1], но и результаты, изложенные в пунктах 1–3.

Следовательно, каждой точке $B \in \widetilde{E}_n$ в соответствующем евклидовом пространстве E_n инвариантный гиперконус $q^2_{n-1} \subset E_n$ можно определить двумя способами (одним – как в пункте 4.1, а другим – как в пункте 4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Лучинин А.А. Отображения p-мерного аффинного пространства в многообразие гиперконусов n-мерного // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 317. – № 2. – С. 5–8.
2. Акивис М.А. Фокальные образы поверхности ранга r // Известия вузов. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.
3. Акивис М.А. Об одном классе тангенциально вырожденных поверхностей // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146. – № 3. – С. 515–518.
4. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей // Итоги науки. Вып. Геометрия. 1963. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1965. – С. 5–64.
5. Остиану Н.М О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геометрич. семинара. – Т. 1. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 239–263.
6. Швейкин П.И. Нормальные геометрические объекты поверхности в аффинном пространстве // Труды геометрич. семинара. – Т. 1. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – С. 331-423.
7. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(L,L_m,L_{m+1}^{\widehat{\alpha}})$ в n-мерном проективном пространстве $P_n(m>2)$ // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8. – № 6. – С. 1307–1320.
8. Ивлев Е.Т., Молдаванова Е.А. О дифференцируемых отображениях аффинных пространств в многообразие m-плоскостей в многомерном евклидовом пространстве // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 24–42.

Поступила 19.03.2010 г.

УДК 512.541

КОРРЕКТНОСТЬ И СЕРВАНТНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП

А.И. Шерстнёва, С.Я. Гриншпон*, О.В. Янущик, В.С. Шерстнёв

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: sherstneva@tpu.ru

Выясняется, будет ли верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна для групп в случае, когда одна из групп является однородной вполне разложимой. Получены критерии корректности и сервантной корректности однородной вполне разложимой группы.

Ключевые слова:
Алгебра, абелевы группы, почти изоморфизм групп, корректные группы, сервантно корректные группы, однородные вполне разложимые группы.

Key words:
Algebra, abelian groups, almost isomorphism of groups, correct groups, purely correct groups, homogeneous completely decomposable groups.

Известная теоретико-множественная теорема Кантора–Шрёдера–Бернштейна явилась источником постановки аналогичных задач в различных областях математики, в том числе и в теории абелевых групп.

Две группы, каждая из которых изоморфна подгруппе другой группы, называются *почти изоморфными* [1]. Две группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. В частности, группы A и B – почти изоморфны по сервантным подгруппам, если каждая из них изоморфна сервантной подгруппе другой группы.

Естественно возникает вопрос, будет ли из почти изоморфизма групп следовать их изоморфизм. Эта задача привлекала внимание многих алгебраистов [2–6].

При выяснении, будет ли верен аналог теоретико-множественной теоремы Кантора–Шрёдера–Бернштейна для абелевых групп, удобен подход, когда одна из групп фиксируется, а другая пробегает весь класс абелевых групп.

Группа A называется *корректной*, если для любой группы B из того, что A и B – почти изоморфны, следует $A\cong B$. Группа A называется *сервантно корректной* (*f.i.-корректной*), если для любой группы B из того, что A и B – почти изоморфны по сервантным (вполне характеристическим) подгруппам, следует $A\cong B$ [7. С. 65].

Корректные и сервантно корректные абелевы группы выделяются в [8–10]. В [7], [11] и [12] описываются классы абелевых групп, являющихся f.i.-корректными.

Приведём используемые в работе понятия.

Всякая последовательность $v=(v_1,v_2,...)$, состоящая из целых неотрицательных чисел и символов ∞, называется *характеристикой*. Характеристики $v=(v_1,v_2,...)$ и $u=(u_1,u_2,...)$ называются *эквивалентными*, если $v_i\neq u_i$ имеет место лишь для конечного числа номеров i и только тогда, когда v_i и u_i конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом* [13. С. 130].

Если A – группа без кручения и $a\in A$, то *характеристика элемента* a, обозначаемая $\chi(a)$, – это та-