

УДК 517.98

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ

И. Г. Ганиев, А. К. Каримов

В работе продолжается изучение свойств топологии сходимости по мере на йордановых алгебрах. Дается явный вид метрики на йордановой алгебре, которая определяет топологию сходимости по мере.

В работах [1–3] было введено понятие OJ -алгебры и изучены свойства этих алгебр. В частности, OJ -алгебру можно рассматривать как объект, описывающий в аксиоматической форме пространство измеримых элементов относительно JBW -алгебры. В [1, 2] рассматривалась также топология сходимости по мере, в частности, в [1] доказано, что в этой топологии OJ -алгебра является топологическим кольцом. В [2] рассмотрена $\mathbb{R}$ топология на OJ -алгебрах, описаны условия ее существования, единственности и метризуемости.

В настоящей работе продолжается изучение свойств топологии сходимости по мере на йордановых алгебрах. Дается явный вид метрики на йордановой алгебре, которая определяет топологию сходимости по мере. В случае алгебр фон Неймана аналогичный вопрос рассматривался в работе [6].

Пусть $(A, \|\cdot\|)$ — JBW -алгебра с точным нормальным конечным следом τ , $S(A)$ — OJ -алгебра измеримых элементов относительно A (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $a \in S(A)$ назовем τ -измеримым если в спектральном разложении $a = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda de_{\lambda}$ идемпотенты $e_{\lambda}^{\perp}$ и $e_{-\lambda}$ имеют конечную меру т. е. $\tau(e_{\lambda}^{\perp}) < \infty$ и $\tau(e_{-\lambda}) < \infty$ при некотором λ . Через $K(A)$ обозначим множество всех τ -измеримых элементов из $S(A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для любого $a \in K(A)$ значения функции

$$a(\alpha) = \inf\{\lambda \in [0, \infty] : \tau(1 - e_{\lambda}) \leq \alpha\} \quad (\alpha > 0),$$

где $|a| = \int_0^{\infty} \lambda de_{\lambda}$, $|a| = \sqrt{a^2}$, называются *обобщенными s -числами* элемента a . Через « $\circ$ » обозначим йорданово произведение в $S(A)$.

Предложение 1. Имеют место следующие утверждения:

(1) функция $a(\alpha)$ невозрастающая, непрерывная справа и

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} a(\alpha) = \|a\| \in [0, \infty], \quad a \in K(A);$$

(2) для любой строго возрастающей непрерывной функции g на $[0, \infty)$ такой, что $g(0) \geq 0$ имеет место

$$g(|a|)(\alpha) = g(|a|(\alpha)),$$

при всех $a \in K(A)$, $\alpha > 0$;

(3) $a(\alpha) = 0$ для $\alpha \geq \tau(\text{supp } |a|)$ и для любого $a \in K(A)$;

(4) $a(\alpha) = |a|(\alpha)$ и $(\beta a)(\alpha) = |\beta|a(\alpha)$, где $a \in K(A)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;

(5) $(a + b)(\alpha + \beta) \leq a(\alpha) + b(\beta)$ для всех $a, b \in K(A)$ и $\alpha, \beta > 0$;

(6) $a(\alpha) \leq b(\alpha)$, если $0 \leq a \leq b$, $\alpha > 0$;

(7) $(a \circ b)(\alpha) \leq \|b\|a(\alpha)$ для всех $a \in K(A)$, $b \in A$.

(8) если $a \in A$, $a \geq 0$, то $\tau(a) = \int_0^\infty a(\alpha) d\alpha$, в частности,

$$\|a\|_p = \left(\int_0^\infty a^p(\alpha) d\alpha \right)^{1/p};$$

(9) если $a, b \in A$, то

$$\int_0^t f((a + b)(\alpha)) d\alpha \leq \int_0^t f(a(\alpha) + b(\alpha)) d\alpha \quad (t > 0)$$

для любой возрастающей непрерывной выпуклой функции f ;

(10) если f возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty]$ и $f(0) = 0$, то

$$\int_0^t f((a + b)(\alpha)) d\alpha \leq \int_0^t f(a(\alpha)) d\alpha + \int_0^t f(b(\alpha)) d\alpha.$$

$\triangleleft$ (9): Рассмотрим JBW -алгебру $J(a, b)$, порожденную элементами a и b . По предложению 3.9 [3, стр. 26] она изоморфна обратимой JW -алгебре. Тогда след τ можно продолжить до обертывающей $J(a, b)$ алгебры фон Неймана $W(J(a, b))$. Из единственности спектрального семейства следует, что s -числа для элементов a и b в $W(J(a, b))$ и в $J(a, b)$ совпадают, поэтому требуемое неравенство, справедливое в $W(J(a, b))$ в силу [4], верно и в $J(a, b)$.

Остальные утверждения предложения 1 доказываются аналогично. $\triangleright$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [1]). Топологией сходимости по мере на $K(A)$ называется отделяемая векторная топология t , в которой базис окрестностей нуля образуют множества вида $N(\varepsilon, \delta)$ ($\varepsilon, \delta > 0$), где

$$N(\varepsilon, \delta) = \{a \in K(A) : \exists p \in \nabla, U_p a \in A, \|U_p a\| \leq \varepsilon, \tau(p^\perp) \leq \delta\}.$$

Здесь $U_p : K(A) \rightarrow K(A)$ — линейное отображение, определяемое равенством

$$U_x y = 2x \circ (x \circ y) - x^2 \circ y.$$

∇ — булева алгебра всех идемпотентов в A . Если A специальна, то $U_x y = xyx$, где xy — ассоциативное произведение элементов x и y .

Сходимость в топологии t обозначим как $a_n \xrightarrow{t} a$ и назовем ее сходимостью по мере.

Предложение 2 (см. [5]). Если $a_n, a \in K(A)$, то справедливы утверждения:

- (i) $a_n \xrightarrow{t} a$ тогда и только тогда, когда $(a_n - a)(\alpha) \rightarrow 0$ ($\alpha > 0$);
- (ii) если $a_n \xrightarrow{t} a$, то $f(a_n) \xrightarrow{t} f(a)$ для любой действительной непрерывной функции f .

Отделимую векторную топологию ω на $K(A)$ будем называть $\mathbb{R}$ -топологией, если выполняются следующие условия:

I. (1) для любой окрестности нуля W существует окрестность нуля $V \subset W$ такая, что из $0 \leq x \leq y \in V$, следует $x \in V$;

(2) если $y \in V$, $s^2 = \mathbf{1}$, $p \in \nabla$, то $U_s(y) \in V$ и $U_p(y) \in V$ (такие окрестности V называют нормальными), где $\mathbf{1}$ — единица алгебры $K(A)$;

II. для любой сети идемпотентов $\{e_\alpha\}$, убывающей к нулю, $e_\alpha \xrightarrow{\omega} 0$;

III. если $\{e_\alpha\} \subset \nabla$, $e_\alpha \xrightarrow{\omega} 0$, то для любой сети $\{x_\alpha\}$ элементов из $K(A)$ сеть $\{x_\alpha \circ e_\alpha\}$ сходится к нулю в топологии ω .

Предложение 3 (см. [2]). В топологической OJ -алгебре $(K(A), \omega)$ справедливы утверждения:

- (1) $\mathbb{R}$ -топология ω совпадает с топологией сходимости по мере;
- (2) ω метризуема тогда и только тогда, когда $K(A)$ счетного типа.

Теорема 1. Отображение $\rho : A \times A \rightarrow [0, \infty)$, определенное равенством

$$\rho(x, y) = \tau \left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|} \right)$$

является метрикой на A .

< Проверим аксиомы метрики.

1) Очевидно, что $\rho(x, y) \geq 0$. Если $\rho(x, y) = 0$, то в силу точности τ получим, что $\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|} = 0$, т. е. $x = y$. Обратно, если $x = y$, то, очевидно, $\rho(x, y) = 0$.

2) Очевидно.

3) Пусть $x, y \in A$, тогда $\rho(x, y) = \tau \left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|} \right) = \int_0^\infty \left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|} \right)(\alpha) d\alpha$. Так как функция $f(t) = \frac{t}{\mathbf{1} + t}$ возрастает, непрерывна на $[0, +\infty)$ и $f(0) = 0$, то из предложения 1 (2) следует, что

$$\rho(x, y) = \int_0^\infty \frac{|x - y|(\alpha)}{\mathbf{1} + |x - y|(\alpha)} d\alpha = \int_0^\infty \frac{(x - y)(\alpha)}{\mathbf{1} + (x - y)(\alpha)} d\alpha = \int_0^\infty \frac{(x - z + z - y)(\alpha)}{\mathbf{1} + (x - z + z - y)(\alpha)} d\alpha.$$

Далее, из утверждения (10) предложения 1 следует, что

$$\rho(x, y) \leq \int_0^\infty \frac{(x - z)(\alpha)}{\mathbf{1} + (x - z)(\alpha)} d\alpha + \int_0^\infty \frac{(z - y)(\alpha)}{\mathbf{1} + (z - y)(\alpha)} d\alpha = \rho(x, z) + \rho(y, z).$$

Теорема доказана. >

Через t_1 обозначим отделимую топологию в A , порожденную метрикой ρ . Покажем, что t_1 наделяет A структурой топологического векторного пространства. Так как $\rho((x - y), 0) = \rho(x, y)$, то операция сложения непрерывна в топологии t_1 . Пусть $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in A$. Тогда

$$\rho((\lambda_n - \lambda)x, 0) = |\lambda_n - \lambda| \tau \left(\frac{|x|}{\mathbf{1} + |\lambda_n - \lambda||x|} \right) \leq |\lambda_n - \lambda| \tau(|x|) \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\lambda_n x \xrightarrow{t_1} \lambda x$. Пусть $x_n \xrightarrow{t_1} 0$, $x_n \in A$, $\lambda_n \in \mathbf{1}$, $|\lambda_n| \leq 2^m$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\rho(\lambda_n x_n, 0) = \tau\left(\frac{|\lambda_n||x_n|}{\mathbf{1} + |\lambda_n||x_n|}\right) \leq \tau\left(\frac{2^m|x_n|}{\mathbf{1} + 2^m|x_n|}\right) \leq 2^m \tau\left(\frac{|x_n|}{\mathbf{1} + |x_n|}\right) \rightarrow 0,$$

т. е. $\lambda_n x_n \xrightarrow{t_1} 0$.

Аналогично, если $x_n \xrightarrow{t_1} x$, то $\lambda x_n \xrightarrow{t_1} \lambda x$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отсюда и из равенства $\lambda_n x_n - \lambda x = \lambda(x_n - x) + (\lambda_n - \lambda)x + (\lambda_n - \lambda)(x_n - x)$ следует, что операция умножения на скаляр непрерывна в топологии t_1 .

Предложение 4. Топология t_1 на A является $\mathbb{R}$ топологией.

◁ I. (1): Пусть $0 \leq x \leq y$ и $\rho(y, 0) < \varepsilon$. Так как функция $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\mathbf{1} + \alpha}$ возрастающая, а след τ положителен, то

$$\rho(x, 0) = \tau\left(\frac{x}{\mathbf{1} + x}\right) = \int_0^\infty \frac{|x|(\alpha)}{\mathbf{1} + |x|(\alpha)} d\alpha \leq \int_0^\infty \frac{|y|(\alpha)}{\mathbf{1} + |y|(\alpha)} d\alpha = \rho(y, 0) < \varepsilon.$$

(2): Так как любая двухпорожденная подалгебра специальна, то при $\rho(y, 0) < \varepsilon$, $p \in \nabla$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} \rho(U_p x, 0) &= \tau\left(\frac{|p x p|}{\mathbf{1} + |p x p|}\right) = \int_0^\infty \frac{(p x p)(\alpha)}{\mathbf{1} + (p x p)(\alpha)} d\alpha \\ &\leq \int_0^\infty \frac{\|p\|^2 x(\alpha)}{\mathbf{1} + \|p\|^2 x(\alpha)} d\alpha = \tau\left(\frac{|x|}{\mathbf{1} + |x|}\right) = \rho(x, 0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично, если $s^2 = \mathbf{1}$, то $\rho(U_s x, 0) < \varepsilon$.

II: Пусть $e_\alpha \downarrow 0$. Тогда $\rho(e_\alpha, 0) = \tau\left(\frac{e_\alpha}{\mathbf{1} + e_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\tau(e_\alpha) \rightarrow 0$, т. е. $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$.

III: Пусть $\{e_\alpha\} \subset \nabla$, $e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$, т. е. $\rho(e_\alpha, 0) \rightarrow 0$. Тогда

$$\frac{1}{2}\tau(e_\alpha) = \tau\left(\frac{e_\alpha}{\mathbf{1} + e_\alpha}\right) \rightarrow 0, \text{ т. е. } \tau(e_\alpha) \rightarrow 0.$$

Так как

$$0 \leq \frac{|x_\alpha \circ e_\alpha|}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|} \leq \mathbf{1},$$

то для $x_\alpha \in A$ будет

$$0 \leq \frac{e_\alpha |x_\alpha \circ e_\alpha| e_\alpha}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|} \leq e_\alpha \mathbf{1} e_\alpha = e_\alpha.$$

Отсюда выводим

$$\rho(x_\alpha \circ e_\alpha, 0) = \tau\left(\frac{|x_\alpha \circ e_\alpha|}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|}\right) = \tau\left(\frac{e_\alpha |x_\alpha \circ e_\alpha| e_\alpha}{\mathbf{1} + |x_\alpha \circ e_\alpha|}\right) \leq \tau(e_\alpha) \rightarrow 0,$$

т. е. $x_\alpha \circ e_\alpha \xrightarrow{t_1} 0$. Следовательно, t_1 является $\mathbb{R}$ топологией на A .

Из предложений 3 и 4 следует, что топологии t и t_1 совпадают на A .

Известно (см. [1]), что A плотно в OJ -алгебре $K(A)$ τ -измеримых элементов, присоединенных к A , относительно топологии сходимости по мере, т. е. можно считать, что

$K(A)$ есть замыкание A в топологии t . Поэтому ρ продолжается до метрики $\tilde{\rho}$ на $K(A)$, порождающей топологию t .

Предложение 5. Пусть $a_n \in A$, $\|a_n\| \leq 1$, $a_n \xrightarrow{t} a$. Тогда $\tau(a_n) \rightarrow \tau(a)$.

$\triangleleft$ Пусть $a = 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда существуют номер $n(\varepsilon)$ и $p \in \nabla$ такие, что $\tau(p^\perp) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|U_p a_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > n(\varepsilon)$. Если $a_n = |a_n| \circ s_n$ полярное разложение a_n , где s_n — симметрия в A (т. е. $s_n^2 = \mathbf{1}$, $\|s_n\| = 1$), то

$$\begin{aligned} |\tau(a_n)| &\leq \tau(|a_n|) = \tau(|a_n| \circ p + |a_n| \circ p^\perp) = \tau(a_n \circ s_n \circ p) + \tau(a_n \circ s_n \circ p^\perp) \\ &\leq \|s_n\| \tau(U_p a_n) + \|a_n\| \|s_n\| \tau(p^\perp) \leq \|U_p a_n\| + \tau(p^\perp) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $\tau(a_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Метрика $\tilde{\rho}$ имеет вид

$$\tilde{\rho}(x, y) = \tau\left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right) \quad (x, y \in K(A)).$$

$\triangleleft$ Пусть $x, y \in K(A)$ и $x_n, y_n \in A$, такие что $x_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} x$, $y_n \xrightarrow{\tilde{\rho}} y$. Тогда $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ в $\mathbb{R}$ -топологии. Из предложения 2 следует, что

$$\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \xrightarrow{t} \frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|},$$

т. е.

$$\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \xrightarrow{\tilde{\rho}} \frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}.$$

Так как $0 \leq \frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|} \leq \mathbf{1}$, то в силу предложения 5

$$\tau\left(\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|}\right) \rightarrow \tau\left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right).$$

Из

$$\tilde{\rho}(x, y) = \lim_n \rho(x_n, y_n) = \lim_n \tau\left(\frac{|x_n - y_n|}{\mathbf{1} + |x_n - y_n|}\right) = \tau\left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right)$$

следует, что

$$\tilde{\rho}(x, y) = \tau\left(\frac{|x - y|}{\mathbf{1} + |x - y|}\right).$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Пусть A -обратимая JW -алгебра (т. е. йордонова алгебра ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве), τ -точный нормальный конечный след на A , $K(A)$ — OJ -алгебра τ -измеримых операторов, присоединенных к A , $W(A)$ -обертывающая алгебра фон Неймана для A . Продолжение τ до $W(A)$ является точным нормальным конечным следом τ_1 (см. [3]). Через $K(W)$ обозначим кольцо τ_1 -измеримых операторов присоединенных к алгебре $W(A)$. Ясно что, $K(A) \subset K(W)$.

Следствие. Пусть $x_n, x \in K(A)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Тогда x_n сходится по мере к x в $K(A)$ тогда и только тогда, когда x_n сходится по мере к x в $K(W)$.

Теорема 3. Метрика $\tilde{\rho}$ обладает следующими свойствами:

$$(1) \quad \tilde{\rho}(x + y, 0) = \tilde{\rho}(x, 0) + \tilde{\rho}(y, 0), \text{ где } x, y \in A^+ = \{x \in A : x \geq 0\}, \quad xy = 0;$$

$$(2) \quad \tilde{\rho}(\lambda e, 0) = \frac{2|\lambda|}{1+|\lambda|} \tilde{\rho}(e, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad e \in \nabla;$$

$$(3) \quad \tilde{\rho}(x \circ e, 0) \leq \frac{2\|x\|}{1+\|x\|} \tilde{\rho}(e, 0), \quad x \in A, \quad e \in \nabla;$$

(4) если $a \in A$, $x \in K(A)$, то существует такое натуральное число n , что $\tilde{\rho}(a \circ x, 0) \leq 2^n \tilde{\rho}(x, 0)$;

$$(5) \quad \text{если } s \in A \text{ и } s^2 = \mathbf{1}, \text{ то } \tilde{\rho}(U_s x, U_s y) = \tilde{\rho}(x, y).$$

$\triangleleft$ (1): Пусть $x, y \in A^+$, $x \circ y = 0$. Тогда $x \circ (\mathbf{1} + x + y) = x + x^2 = x \circ (\mathbf{1} + x)$ и $y \circ (\mathbf{1} + x + y) = y + y^2 = y \circ (\mathbf{1} + y)$. Отсюда

$$\frac{x}{\mathbf{1} + x} = \frac{x}{\mathbf{1} + x + y}, \quad \frac{y}{\mathbf{1} + y} = \frac{y}{\mathbf{1} + x + y},$$

$$\frac{x + y}{\mathbf{1} + x + y} = \frac{x}{\mathbf{1} + x} + \frac{y}{\mathbf{1} + y}.$$

Следовательно,

$$\tilde{\rho}(x + y, 0) = \tau\left(\frac{x + y}{\mathbf{1} + x + y}\right) = \tau\left(\frac{x}{\mathbf{1} + x}\right) + \tau\left(\frac{y}{\mathbf{1} + y}\right) = \tilde{\rho}(x, 0) + \tilde{\rho}(y, 0).$$

(2): Так как $(|\lambda|e)/(\mathbf{1} + |\lambda|) = (|\lambda|e)/(\mathbf{1} + |\lambda|e)$ и $\tau(e) = 2\rho(e, 0)$, то

$$\tilde{\rho}(\lambda e, 0) = \tau\left(\frac{|\lambda|e}{\mathbf{1} + |\lambda|e}\right) = \tau\left(\frac{|\lambda|}{\mathbf{1} + |\lambda|}e\right) = \frac{|\lambda|}{\mathbf{1} + |\lambda|}\tau(e) = \frac{2|\lambda|}{\mathbf{1} + |\lambda|}\tilde{\rho}(e, 0).$$

(3): Пусть $x \in A$ и $e \in \nabla$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x \circ e, 0) &= \tau\left(\frac{|x| \circ e}{\mathbf{1} + |x| \circ e}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{|x| \circ e}{\mathbf{1} + |x| \circ e}\right)(\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \frac{(x \circ e)(\alpha)}{1 + (x \circ e)(\alpha)} d\alpha \\ &\leq \int_0^\infty \frac{\|x\|e(\alpha)}{1 + \|x\|e(\alpha)} d\alpha = \int_0^\infty \frac{(\|x\|e)(\alpha)}{1 + (\|x\|e)(\alpha)} d\alpha = \int_0^\infty \left(\frac{\|x\|e}{\mathbf{1} + \|x\|e}\right)(\alpha) d\alpha \\ &= \tau\left(\frac{\|x\|e}{\mathbf{1} + \|x\|e}\right) = \tilde{\rho}(\|x\|e, 0) = \frac{2\|x\|}{1 + \|x\|}\tilde{\rho}(e, 0). \end{aligned}$$

(4): Пусть $a \in A$, $x \in K(A)$. Выберем такое натуральное число n , что $\|a\| \leq 2^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(a \circ x, 0) &= \tau\left(\frac{|a \circ x|}{\mathbf{1} + |a \circ x|}\right) = \int_0^\infty \frac{|a \circ x|}{\mathbf{1} + |a \circ x|}(\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \frac{|a \circ x|(\alpha)}{1 + |a \circ x|(\alpha)} d\alpha \\ &\leq \int_0^\infty \frac{2^n x(\alpha)}{1 + 2^n x(\alpha)} d\alpha \leq 2^n \int_0^\infty \frac{x(\alpha)}{1 + x(\alpha)} d\alpha = 2^n \tilde{\rho}(x, 0). \end{aligned}$$

(5): Так как

$$|U_s x|^2 = |sxs|^2 = (sxs) \circ (sxs) = s|x|^2 s = s|x||x|s = s|x|s \circ s|x|s = (U_s|x|)^2,$$

то $|U_s x| = U_s|x|$. Поэтому

$$\tilde{\rho}(U_s x, U_s y) = \tau\left(\frac{|U_s x - U_s y|}{\mathbf{1} + |U_s x - U_s y|}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{|U_s x - U_s y|}{\mathbf{1} + |U_s x - U_s y|}\right)(\alpha) d\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\frac{|U_s(x-y)|}{1+|U_s(x-y)|} \right) (\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \left(\frac{U_s|x-y|}{1+U_s|x-y|} \right) (\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{s|x-y|s}{1+s|x-y|s} \right) (\alpha) d\alpha = \int_0^\infty (s|x-y|s) \circ ((s^2 + s|x-y|s)^{-1}) (\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^\infty (s|x-y|s) \circ ((s(1+|x-y|)s)^{-1}) (\alpha) d\alpha = \int_0^\infty ((s|x-y|s) \circ (s(1+|x-y|)^{-1}s)) (\alpha) d\alpha \\
&= \int_0^\infty (s|x-y|(1+|x-y|)^{-1}s) (\alpha) d\alpha = \int_0^\infty \left(s \frac{|x-y|}{1+|x-y|} s \right) (\alpha) d\alpha \\
&= \tau \left(s \frac{|x-y|}{1+|x-y|} s \right) = \tau \left(\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \right) = \tilde{\rho}(x, y).
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\triangleright$

Авторы благодарны профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. Аюпов Ш. А. Интегрирование на йордановых алгебрах // Изв. АН СССР. Сер. Матем.—1983.—Т. 47, № 1.—С. 3–25.
2. Аюпов Ш. А., Усманов Ш. М. Порядок и топология в йордановых алгебрах.—М., 1980.—75 с. Деп. в ВИНТИ № 4232-80.
3. Аюпов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: Фан, 1986.—124 с.
4. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators // Pac. J. Math.—1986.—V. 123, № 2.—Р. 269–300.
5. Каримов А. К. Субаддитивные меры на йордановых алгебрах // Узб. мат. журн.—1993.—№ 4.—С. 42–47.
6. Ганиев И., Чилин В. И. Измеримые расслоения $*$ -алгебр измеримых операторов // Узб. мат. журн.—2001.—№ 1.—С. 8–13.

Статья поступила 25 августа 2003 г.

ГАНИЕВ ИНОМЖАН ГУЛОМЖАНОВИЧ, д. ф.-м. н.

Узбекистан, г. Ташкент,

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

E-mail: inam@comuz.uz

КАРИМОВ АБДУСАЛОМ КОДИРАЛИЕВИЧ, к. ф.-м. н.

Узбекистан, г. Ташкент,

Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности