СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов А.В.* Некоторые методы и алгоритмы определения ориентации при помощи инерциальных и спутниковых навигационных систем: Канд. дис. М., 2010.
2. *Giorgi G., Teunissen P.J.G.* GNSS carrier phase-based attitude determination // Recent Advances in Aircraft Technology. Vienna: InTech, 2012. 193–220.
3. *Baroni L., Kuga H.K.* Analysis of attitude determination methods using GPS carrier phase measurements // Mathematical Problems in Engineering. 2012. Article ID 596396 (http://dx.doi.org/10.1155/2012/596396).
4. *Odijk D., Teunissen P.J.G., Amiri-Simkooei A.R.* Closed-form ADOP expressions for single-frequency GNSS-based attitude determination // International Association of Geodesy Symposia. Vol. 132. Heidelberg: Springer, 2008. 200–206.
5. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. 2. М.: МАКС Пресс, 2012.

Поступила в редакцию
10.12.2014

УДК 517.977.55:612.76

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ СТАБИЛОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕСТОВ СО СТУПЕНЧАТЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ НА СЕНСОРНЫЕ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА

П. А. Кручинин[1]

Рассмотрены задачи оптимального управления для модели движения человека в случае выполнения стабилометрических тестов, когда он меняет позу при ступенчатом воздействии. Такая ситуация наблюдается при включении гальванической вестибулярной стимуляции или вибрационной стимуляции проприоцепторов мышц голени. В России распространен стабилометрический тест со зрительным ступенчатым воздействием. Характерной особенностью стабилограмм для этих тестов является наличие отчетливо выраженных на траектории центра давления размаха и перерегулирования. Тестам ставится в соответствие решение задач оптимального управления изменением положения перевернутого маятника, управляемого с помощью момента, приложенного в опорной точке. Рассмотрены задача быстродействия и задача оптимальной стабилизации с квадратичным критерием качества. Проведено сравнение решения оптимальных задач с результатами стабилометрических тестов, что позволяет высказать гипотезу о причине появления отмеченных эффектов.

Ключевые слова: изменение вертикальной позы, стабилометрия, оптимальное управление.

The problem of optimal control is considered for a human motion model in the case of stabilometric tests when the posture of a person changes under a stepwise input action. Such a situation is observed in the case of a galvanic vestibular stimulation or a vibrational stimulation of muscles and tendon proprioceptors. The stabilometric test with visual stepwise action is widespread in Russia. A characteristic peculiarity of the center of pressure (COP) trajectories for these tests is the presence of clearly expressed swing-up and overshoot. The solution of optimal control for the inverted pendulum motion controlled by coupling torque is put in correspondence with the results of such tests. The problems of optimal speed-of-response control and linear-quadratic regulator are considered. The solution of these optimum problems is compared with the results of stabilometric tests, which allows one to state a hypothesis on the reasons of the above effects.

Key words: human postural control, stabilometry, optimal control.

Введение. Для анализа изменения человеком вертикальной позы в различных ситуациях используется ступенчатое воздействие на его сенсорные входы. При выполнении стабилографической

[1] *Кручинин Павел Анатольевич* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: pkruch@mech.math.msu.su.

пробы со ступенчатым воздействием скачкообразное изменение претерпевает зрительная информация, на которую человека просят реагировать изменением положения центра давления [1, 2]. При включении гальванической вестибулярной стимуляции [3] осуществляется скачкообразное воздействие на вестибулярные центры головного мозга. При выключении вибрационной стимуляции проприоцепторов мышц голени [4] скачкообразно меняется афферентный сигнал проприоцепторов мышц и сухожилий. В этих трех случаях воздействие приводит к изменению вертикальной позы стоящего человека.

Во всех указанных работах при исследовании движения человека использовался стабилоанализатор (силовая платформа). Основной информацией, которая выдается программным обеспечением стабилоанализатора, являются фронтальная и сагиттальная стабилограммы — зависимость от времени координат точки приложения равнодействующей сил вертикальных реакций опоры (центра давления). Эти величины в первую очередь характеризуют управляющие моменты, действующие в суставах человека [5]. Особенностью стабилограмм для этих тестов является наличие отчетливо выраженных участков размаха и перерегулирования при выполнении движения. На рис. 1 пунктирными линиями изображены различные реализации обезразмеренной сагиттальной стабилограммы для одного и того же обследуемого при выполнении теста со ступенчатым воздействием. За единицу времени принято значение постоянной времени перевернутого маятника, приближенно отображающего движение человека ($t = 0{,}6\ c$), за единицу изменения координаты центра давления — средняя величина его изменения при выполнении теста. Из рисунка видно, что прежде чем начать движение в направлении новой позиции, центр давления смещается в противоположную сторону. Такое поведение центра давления в руководстве пользователя стабилоанализатора “Стабилан” называют размахом. Перерегулирование определяется величиной первого выброса траектории над значением координаты центра давления, задаваемым новой позицией. Участки размаха и перерегулирования устойчивы и наблюдаются у значительного числа здоровых обследуемых, совершающих движение достаточно быстро [1].

Выполнению движения предшествует латентный период, во время которого нервная система человека обрабатывает сенсорную информацию и выбирает программу движения. Предполагается, что эта программа является в некотором смысле наилучшей и близка к решению некоторой оптимальной задачи. В настоящей статье рассмотрены задачи оптимального управления простейшей моделью, описывающей движение человека. В них оптимальные траектории имеют выраженные участки размаха и перерегулирования. Такой подход сопоставления реального движения и решения модельных задач управления хорошо известен в литературе по биомеханике и широко применялся при исследовании двуногой ходьбы (см., например, [6]). Известно также использование различных оптимальных задач для понимания отдельных особенностей специальных движений человека (см., например, [7–9]).

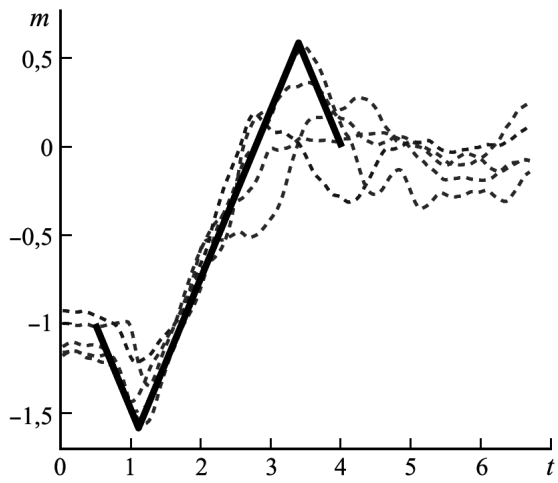


Рис. 1. Характерное изменение безразмерной сагиттальной координаты центра давления при выполнении стабилометрического теста со зрительным ступенчатым воздействием

Математическая модель. Рассмотрим более подробно наклон человека в сагиттальной плоскости на примере выполнения стабилографической пробы со ступенчатым воздействием. Проба заключается в следующем: человек стоит на платформе стабилоанализатора перед экраном, на котором отображается движение центра давления человека и мишени. Начальное положение мишени на рис. 1 соответствует значению $m = -1$. В ходе теста производят мгновенное изменение положения мишени в позицию $m = 0$ и человека просят быстро изменить наклон туловища таким образом, чтобы совместить образ центра давления на экране с центром мишени и удерживать его в окрестности последнего. Движение просят осуществить за счет изменения угла в голеностопном суставе. В этом случае корректно использовать модель перевернутого маятника, управляемого с помощью момента в опорном шарнире. Ранее подобный подход применялся при решении задачи быстродействия в работах [10, 11].

Как обсуждалось в [11], решение задач оптимального управления, в которых управлением является момент в шарнире, содержит разрывные функции. Из экспериментов известно, что скорость изменения момента в голеностопном суставе — конечная величина. Для описания этой особенности используем линеаризованные уравнения движения перевернутого маятника в безразмерных пере-

менных, полагая управлением ограниченную по модулю скорость изменения безразмерного момента $|u| \leqslant u_m$:

$$\varphi'' = \varphi + m, \qquad m' = u, \tag{1}$$

где φ и m — обезразмеренные значения угла наклона маятника и момента в шарнире, соответствующие [10]. В качестве начального и финального состояний будем рассматривать различные положения равновесия:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad m(0) = -1; \\ &\varphi(T) = 0, \qquad \varphi'(T) = 0, \qquad m(T) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В общем случае, например при анализе движений в условиях пониженной гравитации, необходимо учитывать также фазовые ограничения момента в голеностопном суставе. При штатном режиме проведения теста на Земле моменты в голеностопном суставе невелики, смещение центра давления, характеризующее момент, не превышает размера стопы и это ограничение можно не учитывать.

Рассмотрим задачи оптимального управления, минимизирующие функционал вида

$$J = \int_0^T f\left(\varphi(\tau), m(\tau), u(\tau)\right) d\tau. \tag{3}$$

Использование принципа максимума Понтрягина. Запишем гамильтониан H и уравнения для сопряженных переменных ψ_φ, $\psi_{\varphi'}$, ψ_m, ψ_0 принципа максимума Понтрягина [12] для задачи Лагранжа (1)–(3) в случае, когда функция f не зависит непосредственно от управления $f(\varphi, m, u) = f(\varphi, m)$:

$$H = \psi_\varphi \varphi' + \psi_{\varphi'}(\varphi + m) + \psi_m u + \psi_0 f(\varphi, m);$$

$$\psi'_\varphi = -\psi_{\varphi'} - \psi_0 \frac{\partial f(\varphi, m)}{\partial \varphi}, \quad \psi'_{\varphi'} = -\psi_\varphi - \psi_0 \frac{\partial f(\varphi, m)}{\partial \varphi'},$$

$$\psi'_m = -\psi_{\varphi'} - \psi_0 \frac{\partial f(\varphi, m)}{\partial m}, \qquad \psi'_0 = 0.$$

Из последнего уравнения сопряженной системы и условий трансверсальности следует $\psi_0(t) = -\lambda_0$, где λ_0 — неотрицательная постоянная величина.

При $f(\varphi, m) = 1$ система (1)–(3) соответствует задаче оптимального быстродействия. В этом случае принцип максимума дает необходимые и достаточные условия оптимальности. Решение этой задачи разобрано в работе [10]: u формируется в виде кусочно-постоянной функции с двумя переключениями, причем на первом и последнем участках момент убывает. В соответствии с [6] сагиттальная координата центра давления приближенно характеризует изменение момента в голеностопном суставе. Соответствующая безразмерная траектория приведена на рис. 1 сплошной линией. Наблюдаемые значительные отклонения реальных траекторий от оптимальной могут объясняться двумя обстоятельствами: найденное оптимальное решение неустойчиво, и система управления движением не только реализует программное управление, но и решает задачу стабилизации; помимо задачи быстродействия система управления движением человека может решать также другие оптимальные задачи, например задачу экономии энергоресурсов.

При решении части этих задач, описываемых функционалами вида (3) в случае $f(\varphi, m)$, управление с ограниченной скоростью изменения момента может иметь число переключений, отличное от двух. Но в то же время существуют начальные условия сопряженной системы, при которых сумма первых трех слагаемых функции H для траектории задачи быстродействия равна нулю, и при фиксированных значениях T, превышающих время оптимального быстродействия, найденное решение удовлетворяет невырожденному решению принципа максимума в случае $\lambda_0 = \psi_0(t) = 0$. Следовательно, найденное решение может являться частью оптимальной траектории и при минимизации других функционалов.

Линейно-квадратичное управление. Как мы показали, наложение явных ограничений на скорость изменения момента приводит к формированию оптимальных траекторий, содержащих участки размаха и перерегулирования. Между тем принятое при расчетах значение максимальной скорости изменения момента меньше, чем реальные значения, известные из литературы [13, 14]. В связи с этим рассмотрим также задачу оптимального управления, которая не требует введения явных значений ограничения величины u. К этому классу относится линейно-квадратичное управление [12].

Для определенности возьмем функционал вида (3) при $f(\varphi, m, u) = a\varphi^2 + (1-a)m^2 + bu^2$ и $T \to \infty$. Подобное управление построено в работе [8] для задачи удержания человеком вертикальной позы. В отличие от представленного в этой статье подхода с заданными коэффициентами квадратичного функционала рассмотрим ансамбль траекторий при различных значениях весовых коэффициентов $a \in (0,1)$ и b. При $a = 0$ основной минимизируемой величиной является момент в голеностопном суставе, при $a = 1$ — угол отклонения маятника от финального положения равновесия. Регуляризующий весовой коэффициент b принимает ненулевые значения и косвенно отвечает за скорость изменения момента. На рис. 2 приведены результаты расчетов для значения $b = 0{,}1$, при котором время движения приближенно совпадает со временем изменения позы человеком, чья стабилограмма приведена на рис. 1. Управление ищется в виде обратной связи по значениям параметров состояния задачи $u = K(\varphi, \varphi', m)^T$, где вектор коэффициентов K в цепи обратной связи выбирается в соответствии со стандартным алгоритмом из [12] с использованием функции lqry пакета MATLAB.

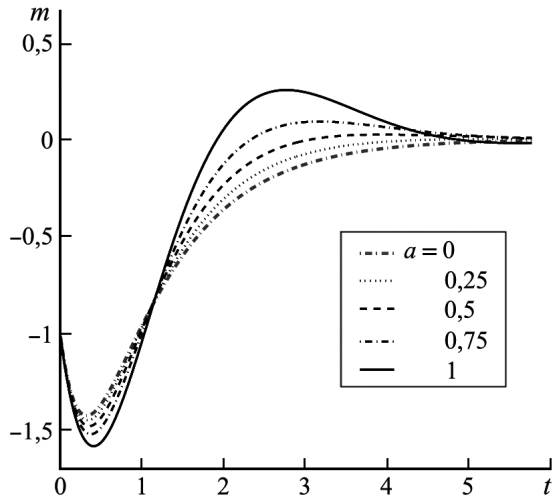


Рис. 2. Модельные значения стабилограмм для линейно-квадратичного управления при различных значениях весовых коэффициентов

Полученные решения асимптотически устойчивы и не требуют дополнительной стабилизации. Они не удовлетворяют финальным условиям из (2), тем не менее за характерные времена порядка времени выполнения человеком упражнения решение приходит в малую окрестность нулевого положения.

Как видно из приведенных графиков, все траектории содержат участок размаха, а перерегулирование проявляется при снижении требований к ограничению момента. Этот эффект не меняется при введении в функционал слагаемых, содержащих квадраты скорости изменения угла φ.

Заключение. Анализ задач оптимального управления изменением угла наклона перевернутого маятника дает, по крайней мере, два общеупотребительных алгоритма, использование которых приводит к наличию размаха и перерегулирования. Термин “перерегулирование” в управленческом смысле корректен здесь только по отношению к решению задачи управления движением центра давления.

Следует заметить, что минимизация интеграла квадрата угла φ эквивалентна минимизации площади, ограниченной графиком угла φ и осью абсцисс. При отсутствии требований к снижению значений момента и его скорости уменьшение этой площади приводит к ускорению переходного процесса. Тем самым минимизация функционала при малых значениях b и значениях $a \sim 1$ косвенно способствует уменьшению времени переходного процесса и соответственно может порождать траектории, близкие к оптимальным траекториям, решающим задачу быстродействия.

Система управления движением человека не реализует рассмотренные алгоритмы. Однако близость реальных записей движения к приведенным расчетным траекториям облегчает интерпретацию результатов обследования пациентов. Например, само по себе умеренное, соответствующее решению оптимальных задач перерегулирование не свидетельствует о “порывистом характере пациента”, а появляется вследствие достаточно точного выполнения движения, близкого к оптимальному. Уменьшение размаха и перерегулирования у пациентов с болезнью Паркинсона [2] согласуется с одновременным снижением скорости выполнения упражнения и, по-видимому, характеризует деградацию системы управления движениями. Проведенный анализ показывает приближенное соответствие движения оптимальным алгоритмам. Однако выбор параметров u_m, a, b этих алгоритмов неочевиден. Вследствие этого формирование индикаторных показателей для обследований требует дополнительного физиологического анализа.

В случае фронтальных движений человека, анализ которых наиболее актуален при гальванической вестибулярной стимуляции, даже в простейшем случае движение необходимо моделировать трехзвенной конструкцией. Как показано в [5], и в этом случае уравнения, описывающие движение, сводятся к уравнениям вида (1), а наибольший вклад в формирование стабилограммы вносит изменение момента в тазобедренном суставе. Погрешности такой модели выше, чем в случае описания движения в сагиттальной плоскости, тем не менее главные характеристики движения сохраняются. Все приведенные выше факторы необходимо учитывать, например, в задачах имитации движений человека в условиях пониженной гравитации.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 14–50–00029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Муртазина Е.П.* Функциональные особенности выполнения стабилографических тестов у испытуемых с различными антропометрическими данными // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2009. № 9(98). 123–127.
2. *Шлыков В.Ю., Киреева Т.Б., Левик Ю.С.* Изменения стабилографических показателей у больных паркинсонизмом // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2008. № 6(83). 112–114.
3. *Horak F.B., Hlavacka F.* Somatosensory loss increases vestibulospinal sensitivity // J. Neurophysiol. 2001. **86**. 575–585.
4. *Smetanin B.N., Popov K.E., Kozhina G.V.* Specific and nonspecific visual influences on the stability of the vertical posture in humans // Neurophysiol. 2004. **36**, N 1. 65–72.
5. *Кручинин П.А.* Механические модели в стабилометрии // Рос. журн. биомехан. 2014. **18**, № 2. 184–193.
6. *Белецкий В.В.* Двуногая ходьба. М.: Наука, 1984.
7. *Happee R.* Time optimality in the control of human movements // Biol. Cybern. 1992. **66**. 357–366.
8. *Kuo A.D.* An optimal control model for analyzing human postural balance // IEEE Trans. Biomed. Eng. 1995. **42**, N 1. 87–101.
9. *Bonnet V., Ramdani S., Fraisse P., at al.* A structurally optimal control model for predicting and analyzing human postural coordination // J. Biomech. 2011. **44**, N 11. 2123–2128.
10. *Кручинин П.А., Касаткин Е.А.* Стабилометрический тест со ступенчатым воздействием и задача оптимального быстродействия // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2014. № 10(159). 254–260.
11. *Кручинин П.А., Касаткин Е.А., Троицкий К.А.* Некоторые задачи оптимального управления и анализ результатов стабилометрического "теста со ступенчатым воздействием" // Биомеханика-2014: Мат-лы XI Всерос. конф. Пермь, 2014. 130–133.
12. *Александров В.В., Злочевский С.И, Лемак С.С., Парусников Н.А.* Введение в динамику управляемых систем. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 1993.
13. *Hof A.L.* Muscle mechanics and neuromuscular control // J. Biomech. 2003. **36**, N 7. 1031–1038.
14. *Thompson B.J., Ryan E.D.., Herda T.J., at al.* Consistency of rapid muscle force characteristics: influence of muscle contraction onset detection methodology // J. Electromyogr. and Kines. 2012. **22**, N 6. 893–900.

Поступила в редакцию
11.02.2015

УДК 539.3

НАБОРЫ УСТАНОВОЧНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ТЕНЗОРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ МСС

Д. В. Георгиевский[1]

Описывается принципиальная схема установочных экспериментов для нахождения трех материальных функций тензорно-нелинейных определяющих соотношений в механике сплошной среды. Данные материальные функции зависят от трех инвариантов напряженного состояния. Предлагается использовать длинные цилиндрические полые образцы, в которых можно осуществлять любую комбинацию следующих четырех реализуемых в эксперименте базисных напряженных состояний: одноосное растяжение, кручение, продольный сдвиг, всестороннее сжатие.

Ключевые слова: определяющее соотношение, материальная функция, установочный эксперимент, тензорная нелинейность, инвариант, растяжение, кручение, сдвиг, сжатие.

A principal scheme of the establishing experiments for finding three material functions of tensor nonlinear constitutive relations in continuum mechanics is described. These material functions are the functions of three invariants of stress state. It is proposed to use the long cylindrical hollow rods for which one can implement any combination of the following realizable in experiments basic stress states: uniaxial extension, torsion, longitudinal shear, compression.

Key words: constitutive relation, material function, establishing experiment, tensor nonlinearity, invariant, extension, torsion, shear, compression.

Рассмотрим класс взаимообратных тензорно-нелинейных определяющих соотношений изотропных сплошных сред

$$\underset{\sim}{\sigma} = A_0\underset{\sim}{I} + A_1\underset{\sim}{\varepsilon} + A_2\underset{\sim}{\varepsilon}^2, \qquad \underset{\sim}{\varepsilon} = B_0\underset{\sim}{I} + B_1\underset{\sim}{\sigma} + B_2\underset{\sim}{\sigma}^2, \tag{1}$$

[1] *Георгиевский Дмитрий Владимирович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: georgiev@mech.math.msu.su.