14 декабря 2011 г.
2:02

Асимптотическое распределение оценки риска пороговой обработки вейглет-коэффициентов сигнала при неизвестном уровне шума

Ключевые слова: *вейвлеты, пороговая обработка, риск оценки сигнала, асимптотическая нормальность, линейное однородное преобразование, устойчивый базис.*

Изучается оценка функции сигнала, пропущенного через линейный однородный преобразователь в модели с аддитивным шумом. Исследуются асимптотические свойства оценки риска процедуры пороговой обработки коэффициентов вейглет-вейвлет разложения сигнала в предположении, что дисперсия шума неизвестна. Рассматриваются ситуации оценки дисперсии по независимой выборке и по вейглет-коэффициентам сигнала. Приводятся условия, при которых оценка риска асимптотически нормальна.

**Работа выполнена при финансовой поддержке министерства образования и науки РФ (государственный контракт № 14.740.11.0996).*

Кудрявцев А.А.,
МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, nubigena@hotmail.com

Шестаков О.В.,
МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК; Институт проблем информатики РАН, oshestakov@cs.msu.su

1. Введение.

В последние годы методы обработки сигналов и изображений, использующие аппарат вейвлет-анализа стали применяться во многих прикладных задачах физики плазмы, компьютерной томографии, анализа телекоммуникационного трафика, астрономии и т.д. Объясняется это тем, что вейвлет-анализ позволяет гораздо более эффективно исследовать нестационарные сигналы, чем традиционный Фурье-анализ. Часто данные (представляющие собой некоторый сигнал) измеряются не напрямую, а после прохождения через некоторый линейный преобразователь (например, через некоторый линейный фильтр). Кроме того, в измерениях всегда присутствует шум, обусловленный несовершенством оборудования и различными случайными помехами. Таким образом, измеряемые данные описываются следующей моделью:

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i, \qquad (1)$$

где индекс i обозначает номер отсчета измеряемого сигнала, X_i – наблюдаемые данные, K – некоторое линейное преобразование, f – истинная (незашумленная) функция сигнала, а ε_i – случайные погрешности измерения. Будем предполагать, что все ε_i независимы и имеют одинаковое гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2. В данной работе мы также предполагаем, что линейное преобразование K является однородным с показателем α, т.е.

$$K[f(a(x-x_0))] = a^{-\alpha}(Kf)[a(x-x_0)] \qquad (2)$$

для любого x_0 и любого $a>0$. Примерами однородных линейных преобразований служат оператор интегрирования, преобразование Абеля, некоторые виды операторов свертки и (при соответствующем выборе системы координат) преобразование Радона (см. [1-3]).

В задачах удаления шума обычно используется процедура пороговой обработки вейвлет-коэффициентов, которая обнуляет коэффициенты, не превышающие заданного порога. В получаемой таким образом оценке сигнала или изображения неизбежно содержатся погрешности. Асимптотические свойства оценки этих погрешностей (риска) исследовались при различных условиях измерения и различных методах представления сигнала в работах [4-13]. В частности, в работе [9] рассматривается метод представления сигнала, получивший название вейглет-вейвлет разложение (Vaguelette-Wavelet Decomposition), и доказывается, что при выполнении определенных условий гладкости наблюдаемого сигнала и анализирующего вейвлета, оценка риска является асимптотически нормальной. При этом предполагается, что дисперсия шума σ^2 известна. В данной работе рассматривается ситуация, когда σ^2 неизвестна, и ее также необходимо оценивать. Обычно дисперсия оценивается по выборке сигнала, однако ее можно оценить и по независимой выборке. Для этого следует произвести измерение пустого сигнала, тогда наблюдения будут представлять из себя чистый шум, по которому и оценивается σ^2. Мы рассмотрим оба случая и покажем, что при выборе наиболее популярных оценок дисперсии свойство асимптотической нормальности оценки риска сохраняется.

Замечание. Везде в работе мы будем пользоваться следующими стандартными обозначениями:

$\mathbf{E}\xi$	–	математическое ожидание случайной величины ξ;
$\mathbf{D}\xi$	–	дисперсия случайной величины ξ;
$\mathbf{1}(A)$	–	индикатор события A;
$\Phi(x)$	–	стандартная нормальная функция распределения;
$\phi(x)$	–	плотность стандартного нормального распределения;
$\hat{f}(\omega)$	–	преобразование Фурье функции $f(x)$;
$\langle f,g\rangle$	–	скалярное произведение функций f и g;
$\lfloor\gamma\rfloor$	–	наибольшее целое число, не превосходящее γ;
$\Rightarrow$	–	слабая сходимость (сходимость по распределению);
$\xrightarrow{P}$	–	сходимость по вероятности.

Замечание. Будем использовать символ «$\sim$» в случае, когда две последовательности случайных величин имеют одинаковый предел (по распределению) при $J\to\infty$.

2 Представление сигнала. В работе [1] предложен метод представления сигнала, получивший название «вейглет-вейвлет разложение». Идея этого метода заключается в представлении функции Kf в виде ряда из сдвигов и растяжений некоторой вейвлет-функции ψ:

$$Kf = \sum_{j,k\in Z} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \qquad (3)$$

где $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ (семейство $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathrm{IR})$). Индекс j в (3) называется масштабом, а индекс k – сдвигом. Функция ψ должна удовлетворять определенным требованиям (см. [14]), и ее можно выбрать таким образом, чтобы она обладала некоторыми полезными свойствами, например имела компактный носитель, была дифференцируемой нужное число раз и имела заданное число M нулевых моментов (см. [15]), т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x)\, dx = 0, \quad k = 0, \ldots, M-1.$$

Функция f представляется в виде ряда

$$f = \sum_{j,k\in Z} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k}, \qquad (4)$$

где $u_{j,k} = K^{-1}\psi_{j,k}/\beta_{j,k}$, а $\beta_{j,k} = \left\| K^{-1}\psi_{j,k} \right\|$. Заметим, что если преобразование K однородно с показателем α, то K^{-1} однородно с показателем $-\alpha$. Следовательно, $\beta_{j,k} = 2^{\alpha j}\beta_{0,0}$ (см. [1] и [9]). Функции $u_{j,k}$ называются «вейглетами». При этом семейство $\{u_{j,k}\}$ уже не обладает свойством ортонормированности, однако при выполнении определенных условий, образует так называемый «устойчивый» базис. Справедливо следующее утверждение (см. [9]).

Лемма 1. *Пусть существуют такие константы* $A_i > 0$, $a_i > 0$ *и* $b_i > 1$ $(i = 1,2)$, что

$$\hat{K}^{-1}\psi(\omega) \le A_1 |\omega|^{a_1} (1 + |\omega|^2)^{-(b_1 + a_1)/2}$$

и

$$\hat{K}^{*}\psi(\omega) \le A_2 |\omega|^{a_2} (1 + |\omega|^2)^{-(b_2 + a_2)/2}$$

для всех $\omega \in \mathrm{IR}$, тогда последовательность $\{u_{j,k}\}$ образует устойчивый базис в $L^2(\mathrm{IR})$, т.е. существуют такие константы $0 < A \le B < \infty$, что

$$A\sum_{j,k} c_{j,k}^2 \le \left\| \sum_{j,k} c_{j,k}\xi_{j,k} \right\|^2 \le B\sum_{j,k} c_{j,k}^2. \qquad (5)$$

Замечание. Иногда свойство (5) называют «почти ортогональностью» (см. [2]).

В дальнейшем будем предполагать выполнение некоторых условий гладкости. Будем считать, что функция $Kf \in L^2(\mathrm{IR})$ задана на конечном отрезке $[a,b]$ и равномерно регулярна по Липшицу с некоторым параметром $\gamma > 0$, т.е. (см. [14]) существует константа $L > 0$ и полином P_y степени $n = \lfloor \gamma \rfloor$ такой, что для любого $y \in [a,b]$ и любого $x \in \mathrm{IR}$

$$\left| Kf(x) - P_y(x) \right| \le L|x - y|^{\gamma}.$$

Для таких функций известно (см. [14]), что если вейвлет-функция M раз непрерывно дифференцируема ($M \ge \gamma$), имеет M нулевых моментов и быстро убывает на бесконечности вместе со своими производными, т.е. для всех $0 \le k \le M$ и любого $m \in \mathrm{IN}$ найдется константа C_m, что при всех $x \in \mathrm{IR}$

$$\left| \psi^{(k)}(x) \right| \le \frac{C_m}{1 + |x|^m},$$

то найдется такая константа $C > 0$, что

$$\langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \le \frac{C}{2^{j(\gamma + 1/2)}}. \qquad (6)$$

Причем, как правило, в рассматриваемых задачах линейное преобразование K обладает тем свойством, что функция Kf оказывается более гладкой, чем функция f. Таким образом, ограничения на гладкость f могут быть менее жесткими.

При практической реализации метода в представлении (3) вместо ряда функция Kf аппроксимируется конечной суммой следующего вида

$$Kf = \langle Kf, \varphi_{0,0} \rangle \varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k},$$

где $\varphi_{0,0}$ – так называемая масштабирующая функция, которая фактически описывает среднее значение измеряемых данных (см. [16]). Соответственно, вместо формулы (4) функция сигнала задается формулой

$$f = \langle Kf, \varphi_{0,0} \rangle K^{-1}\varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{j,k} \langle Kf, \psi_{j,k} \rangle u_{j,k}. \qquad (7)$$

Ошибка, возникающая из-за такой аппроксимации, носит неслучайный характер, и рассматривать ее мы не будем.

3 Пороговая обработка вейвлет-коэффициентов. На практике измеряемые данные всегда заданы в дискретных отсчетах на конечном отрезке. Не ограничивая общности, будем считать, что это отрезок $[0,1]$ и функция Kf (и f) задана в точках i/N ($i = 1, \ldots N$, где $N = 2^J$ для некоторого J): $(Kf)_i = (Kf)[i/2^J]$ (и $f_i = f(i/2^J)$). Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора значений функции Kf на ортогональную матрицу W, определяемую вейвлет-функцией ψ (см. [14]). При этом дискретные вейвлет-коэффициенты приближенно равны непрерывным вейвлет-коэффициентам, умноженным на $2^{J/2}$ (т.е. на $\sqrt{N}$), т.е. коэффициенты выглядят следующим образом: $2^{J/2}\langle Kf, \psi_{j,k} \rangle$ (см., например, [1] или [14]). Это приближение тем точнее, чем больше J. Таким образом, в силу ортогональности матрицы преобразования, дискретные вейвлет-коэффициенты наблюдаемых данных (1), которые мы обозначим через $Y_{j,k}$, описываются следующей моделью:

$$Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon_{j,k}^{W}, \qquad (8)$$

где $\mu_{j,k} = 2^{J/2}\langle Kf, \psi_{j,k}\rangle$, а случайные погрешности $\varepsilon^{W}_{j,k}$ независимы и имеют одинаковое гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2.

Поскольку в измерениях присутствует шум, необходимо использовать некоторые процедуры для его удаления. Мы рассмотрим процедуру пороговой обработки (см. [14]). Смысл пороговой обработки вейвлет-коэффициентов измеряемого сигнала заключается в удалении достаточно маленьких коэффициентов, которые считаются шумом. Будем использовать так называемую мягкую пороговую обработку с порогом T_j, зависящим от масштаба j. К каждому вейвлет-коэффициенту за исключением коэффициента при $\varphi_{0,0}$ применяется функция $\rho_{T_j}(x) = \mathrm{sgn}(x)\left(|x| - T_j\right)_+$. При такой пороговой обработке коэффициенты, которые по модулю меньше порога T_j, обнуляются, а абсолютные величины остальных коэффициентов уменьшаются на величину порога. В результате функция сигнала f (на самом деле ее масштабированная версия) оценивается следующим образом:

$$\mathring{f} = Y^{A}_{0,0}K^{-1}\varphi_{0,0} + \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}\rho_{T_j}(Y_{j,k})u_{j,k},$$

где $Y^{A}_{0,0}$ представляет собой зашумленный коэффициент при $K^{-1}\varphi_{0,0}$. Коэффициент $Y^{A}_{0,0}$ обычно не подвергается пороговой обработке, так как входит в ту часть оценки, которая описывает среднее значение измеряемых данных (см. [16]), и дисперсия шума в этом коэффициенте много меньше его абсолютного значения, поэтому мы будем полагать, что он не содержит шума. Такое предположение не влияет на асимптотические свойства оценки риска, рассматриваемые в данной работе.

4 Оценка риска. Риск (среднеквадратичную ошибку) оценки $\mathring{f}$ в рамках модели (8) определим так же как в работе [9]:

$$r_J = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta^2_{j,k}\mathbf{E}(\mu_{j,k} - \rho_{T_j}(Y_{j,k}))^2. \tag{9}$$

В работе [9] величина σ^2 предполагается известной. В этом случае для каждого масштаба j выбирается порог $T_j = \sqrt{2\ln 2^j}\sigma$. Такой порог получил название «универсальный», т.к. он не зависит от наблюдаемых данных. В работах [5] и [6] было показано, что при выборе этого порога риск r_J близок к минимальному.

В выражении (9) присутствуют неизвестные величины $\mu_{j,k}$, поэтому вычислить значение r_J нельзя. Однако его можно оценить. В каждом слагаемом если $|Y_{j,k}| > T_j$, то вклад этого слагаемого в риск составляет $\beta^2_{j,k}(\sigma^2 + T_j^2)$, а если $|Y_{j,k}| \le T_j$, то вклад составляет $\beta^2_{j,k}\mu^2_{j,k}$. Поскольку $\mathbf{E}Y^2_{j,k} = \sigma^2 + \mu^2_{j,k}$, величину $\mu^2_{j,k}$ можно оценить разностью $Y^2_{j,k} - \sigma^2$.

Таким образом, в качестве оценки риска можно использовать следующую величину:

$$\mathring{r}_J = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta^2_{j,k}R_{T_j}(Y^2_{j,k}), \tag{10}$$

где $R_{T_j}(x) = (x - \sigma^2)\mathbb{1}(|x| \le T_j^2) + (\sigma^2 + T_j^2)\mathbb{1}(|x| > T_j^2)$.

Для так определенной оценки риска справедливо следующее утверждение (см. [14]).

Лемма 2. $\mathbf{E}\mathring{r}_J = r_J$, *т.е.* $\mathring{r}_J$ *является несмещенной оценкой для* r_J.

Введем обозначения:

$$B^2 = \frac{2\sigma^4\beta^4_{0,0}}{2^{4\alpha+1} - 1} \quad \text{и} \quad D_J = B2^{(2\alpha+1/2)J}. \tag{11}$$

В работе [9] показано, что при выполнении некоторых условий $\mathring{r}_J$ также является асимптотически нормальной. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть преобразование* K *однородно с показателем* $\alpha > 0$, *вейвлет-функция* ψ *удовлетворяет условиям леммы 1, а функция* Kf *задана на отрезке* $[0,1]$ *и равномерно регулярна по Липшицу с показателем* $\gamma > (8\alpha + 2)^{-1}$, *тогда*

$$\frac{\mathring{r}_J - r_J}{D_J} \Rightarrow N(0,1) \quad \text{при } J \to \infty. \tag{12}$$

Зачастую дисперсия шума σ^2 не известна и ее также необходимо оценивать с помощью некоторой оценки $\hat{\sigma}^2$. При этом выражения (10) принимают вид

$$\hat{r}_J = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta^2_{j,k}R_{\hat{T}_j}(Y^2_{j,k}),$$

где

$$R_{\hat{T}_j}(x) = (x - \hat{\sigma}^2)\mathbb{1}(|x| \le \hat{T}_j^2) + (\hat{\sigma}^2 + \hat{T}_j^2)\mathbb{1}(|x| > \hat{T}_j^2),$$

а $\hat{T}_j = \sqrt{2\ln 2^j}\hat{\sigma}$.

Обычно дисперсия σ^2 оценивается по выборке сигнала, однако ее можно оценить и по независимой выборке. Для этого следует произвести измерение пустого сигнала, тогда наблюдения будут представлять из себя чистый шум, по которому и оценивается σ^2. В следующем разделе будут рассмотрены оба случая.

5 Асимптотическая нормальность оценки риска при неизвестной дисперсии шума. В этом разделе мы покажем, что если оценка дисперсии $\hat{\sigma}^2$ асимптотически нормальна и не зависит от выборки сигнала, то оценка риска в методе вейглет-вейвлет разложения является асимптотически нормальной. Кроме того, в ситуации, когда дисперсия оценивается по самой выборке сигнала, мы рассмотрим несколько популярных оценок σ^2 и покажем, что в этих случаях оценка риска также является асимптотически нормальной.

Теорема 2. *Пусть преобразование* K *однородно с показателем* $\alpha > 0$, *вейвлет-функция* ψ *удовлетворяет условиям леммы 1, а функция* Kf *задана на отрезке* $[0,1]$ *и равномерно регулярна по Липшицу с показателем* $\gamma > (8\alpha + 2)^{-1}$. *Пусть* $\hat{\sigma}^2$ *– не зависящая от* $Y_{j,k}$ *оценка дисперсии* σ^2, *для которой выполнено* $2^{J/2}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \Rightarrow N(0,\Sigma^2)$. *Тогда*

$$\frac{\hat{r}_J - r_J}{D_J} \Rightarrow N\left(0, 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2(2^{2\alpha+1}-1)^2}\frac{\Sigma^2}{\sigma^4}\right) \quad \text{при } J \to \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Введем обозначение:

$\Delta(I_1, I_2) = D_J^{-1}\sum_{j=I_1}^{I_2}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2[(Y_{j,k}^2 - \hat{\sigma}^2) - \mathbf{E}(Y_{j,k}^2 - \sigma^2) - (Y_{j,k}^2 - \hat{\sigma}^2)\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j) +$

$+(\hat{\sigma}^2 + \hat{T}_j^2)\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j) + \mathbf{E}(Y_{j,k}^2 - \sigma^2)\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j) - \mathbf{E}(\sigma^2 + T_j^2)\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j)]$. Заметим, что

$$\frac{\hat{r}_J - r_J}{D_J} = \Delta(0, J-1).$$

Разобьем $\Delta(0, J-1)$ на два слагаемых:

$$\Delta(0, J-1) = \Delta(0, j_m - 1) + \Delta(j_m, J-1).$$

Здесь, как и в работе [9], j_m определяется из следующих соображений: для достаточно малых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$

$$J/2 - (\gamma + 1/2)j_m < \delta_1 J \quad \text{и} \quad (2\alpha + 1/2)J - (2\alpha+1)j_m > \delta_2 J. \quad (14)$$

Учитывая (14), можно показать, что $\Delta(0, j_m - 1)$ сходится к нулю по вероятности (см [9]), поэтому далее будем рассматривать только $\Delta(j_m, J-1)$.

Определим

$$N_1(\hat{\sigma}^2) = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2[(Y_{j,k}^2 - \hat{\sigma}^2) - \mathbf{E}(Y_{j,k}^2 - \sigma^2)],$$

$$L_1 = -D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\left[Y_{j,k}^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j) - \mathbf{E}Y_{j,k}^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j)\right],$$

$$L_2 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\left[2\hat{\sigma}^2 + \hat{T}_j^2\right]\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j),$$

$$L_3 = -D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\left[2\sigma^2 + T_j^2\right]\mathrm{P}(|Y_{j,k}| > T_j).$$

Заметим, что

$$\Delta(j_m, J-1) = N_1(\hat{\sigma}^2) + L_1 + L_2 + L_3.$$

Обозначим

$$L_4 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2 Y_{j,k}^2\left|\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j) - \mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j)\right|,$$

$$L_5 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\left|Y_{j,k}^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j) - \mathbf{E}Y_{j,k}^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j)\right|.$$

Имеем

$$|L_1| \le L_4 + L_5.$$

В доказательстве теоремы 1 в работе [9] показано, что L_5 стремится к нулю по вероятности. Обозначим

$$L_6 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\hat{T}_j^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > T_j),$$

$$L_7 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2 T_j^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j).$$

Имеем

$$L_4 \le L_6 + L_7.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности и неравенством Маркова. Поскольку $\hat{T}_j^2 = 2\ln 2\hat{\sigma}^2 j$, для любых $\delta > 0$ и $p > 0$

$$\mathrm{P}(L_6 > \delta) = \mathrm{P}(L_6 > \delta, \hat{\sigma}^2 > \sigma^2 + p) + \mathrm{P}(L_6 > \delta, \hat{\sigma}^2 \le \sigma^2 + p) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(|\hat{\sigma}^2 - \sigma^2| > p\right) + 2\ln 2\delta^{-1}(\sigma^2 + p)JD_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\mathrm{P}(|Y_{j,k}| > T_j).$$

Первое слагаемое сходится к нулю для любого $p > 0$ при $J \to \infty$, поскольку из условия теоремы автоматически вытекает состоятельность оценки $\hat{\sigma}^2$ параметра σ^2, а сходимость к нулю второго слагаемого была показана при доказательстве теоремы 1 в [9]. Таким образом $L_6 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $J \to \infty$.

Далее для любых $\delta > 0$ и $p > 0$ имеем

$$\mathrm{P}(L_7 > \delta) = \mathrm{P}(L_7 > \delta, \hat{T}_j > (1-p)T_j) + \mathrm{P}(L_7 > \delta, \hat{T}_j \le (1-p)T_j) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(2\ln 2\sigma^2 JD_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > (1-p)T_j) > \delta\right) + \mathrm{P}(\hat{T}_j \le (1-p)T_j) \le$$

$$\le 2\ln 2\delta^{-1}\sigma^2 JD_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\mathrm{P}(|Y_{j,k}| > (1-p)T_j) + \mathrm{P}\left(|\hat{\sigma}^2 - \sigma^2| \ge \sigma^2(2p - p^2)\right).$$

Из асимптотических оценок для хвостов нормального распределения, аналогичных приводимым в доказательстве теоремы 1 в работе [9], получаем для некоторой положительной константы C

$$\mathrm{P}(L_7 > \delta) \le \frac{CJ2^{(2p-p^2)J}}{\sqrt{j_m}2^{J/2}} + \mathrm{P}\left(|\hat{\sigma}^2 - \sigma^2| \ge \sigma^2(2p - p^2)\right), \quad (15)$$

откуда видно, что при $2p - p^2 < 1/2$ (например для $p = 1/4$) правая часть (15) стремится к нулю, ввиду состоятельности $\hat{\sigma}^2$. Таким образом, $L_7 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $J \to \infty$.

Далее заметим, что поскольку $\hat{T}_j = \hat{\sigma}\sqrt{2\ln 2^j}$,

$$L_2 \le 2D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2\hat{T}_j^2\mathbb{1}(|Y_{j,k}| > \hat{T}_j) = 2\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}L_7.$$

Поскольку $\hat{\sigma}^2$ является состоятельной оценкой σ^2, а L_7 стремится по вероятности к нулю, имеем $L_2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $J \to \infty$. Наконец, сходимость L_3 по вероятности к нулю доказана в работе [9].

Теперь рассмотрим $N_1(\hat{\sigma}^2)$. Введем следующие обозначения:

$$N_2(I) = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{I}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2[Y_{j,k}^2 - \mathbf{E}Y_{j,k}^2],$$

$$N_3 = D_J^{-1}\sum_{j=j_m}^{J-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\beta_{j,k}^2[\hat{\sigma}^2 - \sigma^2].$$

Заметим, что $N_1(\hat{\sigma}^2) = N_2(J-1) - N_3$ и что $N_2(J-1)$ и N_3 независимы.

Согласно теореме 1, $N_2(J-1) \Rightarrow N(0,1)$. Исследуем N_3.

$$N_3 = \frac{\beta_{0,0}^2(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)}{B2^{(2\alpha+1/2)J}} \cdot \frac{2^{(2\alpha+1)J} - 2^{(2\alpha+1)j_m}}{2^{2\alpha+1} - 1} \sim$$

Неподшитые заметки Стр.4

$$\sim\sqrt{\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2(2^{2\alpha+1}-1)^2\sigma^4}}\cdot 2^{J/2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2).$$

Таким образом, при выполнении условия $2^{J/2}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\Rightarrow N(0,\Sigma^2)$ имеем

$$N_1(\hat{\sigma}^2)\Rightarrow N\left(0,1+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2(2^{2\alpha+1}-1)^2}\frac{\Sigma^2}{\sigma^4}\right).$$

Поскольку, как мы показали, $\Delta(0,J-1)\sim N_1(\hat{\sigma}^2)$, теорема доказана.

Если дисперсия оценивается по выборке сигнала и функция Kf удовлетворяет требуемым условиям регулярности, то в силу (6) обычно ее оценивают по половине всех вейвлет-коэффициентов на уровне $j=J-1$, так как эти коэффициенты фактически содержат только шум. Мы рассмотрим несколько популярных видов оценки σ^2. Начнем с выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_S^2=\frac{1}{2^{J-1}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}Y_{J-1,k}^2-\left(\frac{1}{2^{J-1}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}Y_{J-1,k}\right)^2. \qquad (16)$$

Справедлив аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha>0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma>\max\{(8\alpha+2)^{-1},1/4\}$. Пусть оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (16). Тогда*

$$\frac{\hat{r}_J-r_J}{D_J}\Rightarrow N\left(0,\frac{1}{2^{4\alpha+1}}+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1}-1\right)^2}\right)\quad \text{при}\ J\to\infty. \qquad (17)$$

Доказательство. Дополнительно к обозначениям, используемым в доказательстве теоремы 2, введем обозначения:

$$N_4=\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2}{D_J}Y_{J-1,k}^2-\frac{\beta_{0,0}^2}{D_J}\cdot\frac{2^{(2\alpha+1)J}-2^{(2\alpha+1)j_m}}{2^{2\alpha+1}-1}\cdot\frac{1}{2^{J-1}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}Y_{J-1,k}^2+\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2\mathbf{E}Y_{J-1,k}^2}{(2^{2\alpha+1}-1)D_J},$$

$$L_8=\frac{\beta_{0,0}^2}{D_J}\cdot\frac{2^{(2\alpha+1)J}-2^{(2\alpha+1)j_m}}{2^{2\alpha+1}-1}\left(\frac{1}{2^{J-1}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}Y_{J-1,k}\right)^2,$$

$$L_9=\frac{\sigma^2\beta_{0,0}^2}{D_J}\cdot\frac{2^{(2\alpha+1)J}-2^{(2\alpha+1)j_m}}{2^{2\alpha+1}-1}-\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2}{D_J}\mathbf{E}Y_{J-1,k}^2-\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2\mathbf{E}Y_{J-1,k}^2}{(2^{2\alpha+1}-1)D_J}.$$

При доказательстве соотношения $\Delta(0,J-1)\sim N_1(\hat{\sigma}^2)$ в теореме 2 мы не пользовались независимостью $Y_{j,k}$ и $\hat{\sigma}^2$, поэтому $\Delta(0,J-1)\sim N_1(\hat{\sigma}_S^2)$ и в дальнейшем нам будет достаточно рассматривать лишь асимптотику $N_1(\hat{\sigma}_S^2)$. Заметим, что

$$N_1(\hat{\sigma}_S^2)=N_2(J-2)+N_4+L_8+L_9.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1 в работе [9], можно показать, что

$$N_2(J-2)\Rightarrow N\left(0,\frac{1}{2^{4\alpha+1}}\right).$$

Рассмотрим L_8. Учитывая (6) и (8), имеем для некоторой положительной константы C_γ

$$L_8\le\frac{2\beta_{0,0}^2}{B(2^{2\alpha+1}-1)}\cdot\frac{2^{(2\alpha+1)J}-2^{(2\alpha+1)j_m}}{2^{(2\alpha+1/2)J}2^{2(J-1)}}\left(\left(\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\varepsilon_{J-1,k}^W\right)^2+\left(\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\mu_{J-1,k}\right)^2\right)\le$$

$$\le\frac{2\sqrt{2}\beta_{0,0}^2}{B(2^{2\alpha+1}-1)}\cdot\frac{1}{2^{J-1}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\varepsilon_{J-1,k}^W\cdot\frac{1}{2^{(J-1)/2}}\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\varepsilon_{J-1,k}^W+C_\gamma 2^{(1/2-2\gamma)J}.$$

В силу определения случайных величин $\varepsilon_{j,k}^W$ первое слагаемое стремится к нулю по вероятности. Следовательно, $L_8\xrightarrow{\mathrm{P}}0$ при $\gamma>1/4$. Далее, поскольку $\mathbf{E}Y_{J-1,k}^2=\sigma^2+\mu_{J-1,k}^2$, для некоторых констант $C'_\alpha>0$ и $C_\alpha>0$ выполнено

$$|L_9|\le C'_\alpha\left|\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2}{D_J}\cdot\frac{2^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha+1}-1}\mu_{J-1,k}^2\right|\le C_\alpha 2^{(1/2-2\gamma)J}\to 0\ \text{при}\ \gamma>1/4.$$

Наконец,

$$N_4\sim-\sum_{k=0}^{2^{J-1}-1}\frac{\beta_{J-1,k}^2\left[Y_{J-1,k}^2-\mathbf{E}Y_{J-1,k}^2\right]}{(2^{2\alpha+1}-1)D_J}.$$

Следовательно,

$$N_4\Rightarrow N\left(0,\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1}-1\right)^2}\right).$$

И так как $N_2(J-2)$ и N_4 независимы,

$$N_1(\hat{\sigma}_S^2)\Rightarrow N\left(0,\frac{1}{2^{4\alpha+1}}+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{4\alpha+1}\left(2^{2\alpha+1}-1\right)^2}\right).$$

Теорема доказана.

Далее мы рассмотрим случай, когда в качестве оценки $\hat{\sigma}$ используется соответствующим образом нормированный интерквартильный размах $\hat{\sigma}_R$ и абсолютное медианное отклонение от медианы $\hat{\sigma}_M$. Преимущество использования таких оценок заключается в их робастности, т.е. нечувствительности к выбросам (см. [17] и [18]), и в полной мере проявляется, когда дисперсия оценивается по выборке сигнала. Оценки $\hat{\sigma}_R$ и $\hat{\sigma}_M$ определяются следующим образом:

$$\hat{\sigma}_R=\frac{Y_{J-1,(3/4)}-Y_{J-1,(1/4)}}{2\xi_{3/4}}, \qquad (18)$$

$$\hat{\sigma}_M=\frac{\operatorname*{med}_{1\le k\le N}|Y_{J-1,k}-\operatorname*{med}_{1\le l\le N}Y_{J-1,l}|}{\xi_{3/4}}, \qquad (19)$$

где $Y_{J-1,(1/4)}$ и $Y_{J-1,(3/4)}$ – выборочные квантили порядка 1/4 и3/4, построенные по набору вейвлет-коэффициентов на уровне $j=J-1$, $\xi_{3/4}$ – теоретическая квантиль порядка 3/4 стандартного нормального распределения ($\xi_{3/4}\approx 0.6745$), а med обозначает выборочную медиану.

Сначала рассмотрим оценку $\hat{\sigma}_R$.

Теорема 4. *Пусть преобразование K однородно с показателем $\alpha>0$, вейвлет-функция ψ удовлетворяет условиям леммы 1, а функция Kf задана на отрезке $[0,1]$ и равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma>1/2$. Пусть оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (18). Тогда*

$$\frac{\hat{r}_J-r_J}{D_J}\Rightarrow N\left(0,1+\frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2\xi_{3/4}^2(\phi(\xi_{3/4}))^2}-\frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}\right)$$

при $J\to\infty$.

(20)

Доказательство. Обозначим через $\phi_\sigma(x)$ и u_p плотность и квантиль порядка p нормального закона с нулевым средним и дисперсией σ^2. Основную роль в доказательстве этой теоремы играет разложение Бахадура для выборочных квантилей (см. [19]), которое для величин $\varepsilon^W_{J-1,k}$ выглядит следующим образом:

$$\varepsilon^W_{J-1,(p)} = u_p + \frac{p - \hat{F}(u_p)}{\phi_\sigma(u_p)} + R_J \quad \text{п.в.,} \tag{21}$$

где $\varepsilon^W_{J-1,(p)}$ – выборочная квантиль порядка p, построенная по выборке из случайных величин $\varepsilon^W_{J-1,k}$,

$$\hat{F}(u_p) = \frac{1}{2^{J-1}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} 1(\varepsilon^W_{J-1,k} < u_p),$$

а остаточный член R_J стремится к нулю, причем $|R_J| \le C_R J^{3/4} 2^{-3J/4}$ для некоторой константы $C_R > 0$ (см. [17]). Заметим, что $\phi_\sigma(u_{3/4}) = \phi_\sigma(u_{1/4}) \equiv \phi$ и $u_{3/4} = -u_{1/4}$. Кроме того, в [13] показано, что в силу (6) для любого $0 < p < 1$ и некоторой константы $C_\mu > 0$ справедливо $\left|Y_{J-1,(p)} - \varepsilon^W_{J-1,(p)}\right| \le C_\mu 2^{-\gamma J}$. Следовательно, при $\gamma > 1/2$ оценку $\hat{\sigma}_R$ можно заменить следующим выражением:

$$\hat{\sigma}_R \sim \frac{\phi u_{3/4} + 3/4 - \hat{F}(u_{3/4}) - \phi u_{1/4} - 1/4 + \hat{F}(u_{1/4})}{2\phi\xi_{3/4}} =$$

$$= \frac{2\phi u_{3/4} + 1/2}{2\phi\xi_{3/4}} - \frac{1}{2\phi\xi_{3/4} 2^{J-1}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} 1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4}). \tag{22}$$

Обозначим

$$N_5 = \sum_{j=J_m}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{\beta^2_{j,k}[\sigma^2 - \hat{\sigma}^2_R]}{D_J} + \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \frac{\beta^2_{J-1,k}[Y^2_{J-1,k} - \mathbf{E}Y^2_{J-1,k}]}{D_J}.$$

Как и при доказательстве теоремы 3 достаточно рассмотреть только асимптотику последовательности $N_1(\hat{\sigma}^2_R)$:

$$N_1(\hat{\sigma}^2_R) = N_2(J-2) + N_5.$$

Величина $N_2(J-2)$ уже исследована в предыдущей теореме. Для N_5 имеем

$$N_5 \sim \frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} [Y^2_{J-1,k} - \mathbf{E}Y^2_{J-1,k}] + \frac{\beta^2_{0,0} 2^{J/2}[\sigma^2 - \hat{\sigma}^2_R]}{B(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Представим $\sigma^2 - \hat{\sigma}^2_R = (2\sigma + \hat{\sigma}_R - \sigma)(\sigma - \hat{\sigma}_R)$. Заметим, что $\sigma - \hat{\sigma}_R \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, а величина $2^{J/2}(\hat{\sigma}_R - \sigma)$ асимптотически нормальна. Следовательно,

$$N_5 \sim \frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} [Y^2_{J-1,k} - \mathbf{E}Y^2_{J-1,k}] + \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}[\sigma - \hat{\sigma}_R]}{B(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Поскольку $Y_{j,k} = \mu_{j,k} + \varepsilon^W_{j,k}$, где $\varepsilon^W_{j,k}$ имеют распределение $N(0,\sigma^2)$, имеем

$$N_5 \sim \frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \left[(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 - \mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2\right] +$$

$$+ \frac{2\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \mu_{J-1,k}\varepsilon^W_{J-1,k} + \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}[\sigma - \hat{\sigma}_R]}{B(2^{2\alpha+1}-1)}.$$

Заметим, что в силу (6) и определения случайных величин $\varepsilon^W_{J-1,k}$ для некоторой константы $C_\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{2\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \mu_{J-1,k}\varepsilon^W_{J-1,k}\right| \le \frac{C_\varepsilon}{2^{\gamma J}} \frac{1}{2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \left|\varepsilon^W_{J-1,k}\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$$

при $\gamma > 0$. Таким образом, учитывая (22), при $\gamma > 1/2$

$$N_5 \sim \frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \left[(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 - \mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2\right] + \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}[\sigma - \hat{\sigma}_R]}{B(2^{2\alpha+1}-1)} \sim$$

$$\sim \frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \left[(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 - \mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2\right] +$$

$$+ \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}}{B(2^{2\alpha+1}-1)} \left[\sigma - \frac{2\phi u_{3/4} + 1/2}{2\phi\xi_{3/4}} + \frac{1}{2\phi\xi_{3/4} 2^{J-1}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} 1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4})\right].$$

Далее

$$\mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 = \sigma^2, \quad \mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^4 = 3\sigma^4,$$

$$\mathbf{E}1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4}) = \mathbf{E}(1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4}))^2 = 1/2,$$

$$\mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4}) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} u_{3/4} \exp\left\{-\frac{u^2_{3/4}}{2\sigma^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$-\frac{\beta^2_{0,0}}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \mathbf{E}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2 + \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}}{B(2^{2\alpha+1}-1)} \left[\sigma - \frac{2\phi u_{3/4} + 1/2}{2\phi\xi_{3/4}}\right] =$$

$$= -\frac{\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}}{B} \left[\frac{\sigma}{2^{2\alpha+1}} + \frac{1}{2\phi\xi_{3/4}(2^{2\alpha+1}-1)}\right],$$

$$N_5 \sim \sum_{k=0}^{2^{J-1}-1} \left[\frac{\beta^2_{0,0}(\varepsilon^W_{J-1,k})^2}{B 2^{2\alpha} 2^{J/2}} + \frac{2\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}}{2\phi\xi_{3/4} B(2^{2\alpha+1}-1) 2^{J-1}} 1(-u_{3/4} \le \varepsilon^W_{J-1,k} < u_{3/4})\right] -$$

$$- \frac{\sigma\beta^2_{0,0} 2^{J/2}}{B} \left[\frac{\sigma}{2^{2\alpha+1}} + \frac{1}{2\phi\xi_{3/4}(2^{2\alpha+1}-1)}\right] \equiv N_6,$$

Для N_6 имеем

$$\mathbf{E}N_6 = 0 \text{ и } \mathbf{D}N_6 = \frac{\sigma^4\beta^4_{0,0}}{B^2 2^{4\alpha}} + \frac{2\sigma^2\beta^4_{0,0}}{4B^2(2^{2\alpha+1}-1)^2\phi^2\xi^2_{3/4}} -$$

$$- \frac{2\sqrt{2}\sigma^2\beta^4_{0,0} u_{3/4} \exp\left\{-\dfrac{u^2_{3/4}}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{\pi} B^2 2^{2\alpha}(2^{2\alpha+1}-1)\phi\xi_{3/4}}.$$

Таким образом, учитывая, что $u_{3/4} = \xi_{3/4}\sigma$, и вспоминая определение B и ϕ, имеем

$$N_5 \Rightarrow N\left(0, 1 - \frac{1}{2^{4\alpha+1}} + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2 \xi^2_{3/4}(\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}\right).$$

Поскольку N_5 и $N_2(J-2)$ независимы,

$$N_1(\hat{\sigma}^2_R) \Rightarrow N\left(0, 1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2 \xi^2_{3/4}(\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}\right).$$

Теорема доказана.

Аналогичное утверждение справедливо при использовании оценки $\hat{\sigma}_M$.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 4 и оценка дисперсии σ^2 определяется по выборке сигнала выражением (19). Тогда*

$$\frac{\hat{r}_J - r_J}{D_J} \Rightarrow N\left(0{,}1 + \frac{2^{4\alpha+1}-1}{4(2^{2\alpha+1}-1)^2 \xi_{3/4}^2 (\phi(\xi_{3/4}))^2} - \frac{2^{4\alpha+1}-1}{2^{2\alpha-1}(2^{2\alpha+1}-1)}\right) \qquad (23)$$

при $J \to \infty$.

Доказательство этого утверждения следует из того, что для случайных величин $\varepsilon^W_{J-1,k}$ справедливо (см. [18])

$$2^{J/2}\left(\frac{\varepsilon^W_{J-1,(3/4)} - \varepsilon^W_{J-1,(1/4)}}{2} - \operatorname*{med}_{1\le k\le N} |\varepsilon^W_{J-1,k} - \operatorname*{med}_{1\le l\le N} \varepsilon^W_{J-1,l}|\right) \xrightarrow{P} 0,$$

и что

$$\left|\operatorname*{med}_{1\le k\le N} |Y_{J-1,k} - \operatorname*{med}_{1\le l\le N} Y_{J-1,l}| - \operatorname*{med}_{1\le k\le N} |\varepsilon^W_{J-1,k} - \operatorname*{med}_{1\le l\le N} \varepsilon^W_{J-1,l}|\right| \le C_M 2^{-\gamma J}$$ для

некоторой константы $C_M > 0$ (см. [13]).

Замечание. В доказанных теоремах нормировка оценки риска отличается от традиционной нормировки дисперсией, используемой в различных видах центральной предельной теоремы (см. [20]). Такая нормировка выбрана для того, чтобы левая часть в (13), (17), (20) и (23) не зависела от ненаблюдаемых истинных отсчетов сигнала $\mu_{j,k}$ и, таким образом, можно было строить асимптотические доверительные интервалы для оценки риска.

Литература

1. **Abramovich F., Silverman B.W.** Wavelet Decomposition Approaches to Statistical Inverse Problems // Biometrika, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129.
2. **Lee N.** Wavelet-vaguelette decompositions and homogenous equations: PhD dissertation. Purdue University, 1997.
3. **Donoho D.L.** Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Applied and Computational Harmonic Analysis, 1995. Vol. 2. P. 101–126.
4. **Donoho D., Johnstone I.M.** Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage // J. Amer. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
5. **Donoho D., Johnstone I.M.** Ideal Spatial Adaptation via Wavelet Shrinkage // Biometrika, 1994. Vol. 81. No. 3. P.425–455.
6. **Donoho D.L., Johnstone I.M., Kerkyacharian G., Picard D.** Wavelet Shrinkage: Asymptopia? // J. R. Statist. Soc. Ser. B., 1995. Vol. 57. N2. P. 301–369.
7. **Antoniadis A., Fan J.** Regularization of Wavelet Approximations // J. Amer. Statist. Assoc., 2001. Vol. 96. No.455. P.939–967.
8. **Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P.** Exact Risk Analysis of Wavelet Regression // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. P. 278–309.
9. **Кудрявцев А.А., Шестаков О.В.** Асимптотика оценки риска при вейглет-вейвлет разложении наблюдаемого сигнала // T-Comm — Телекоммуникации и Транспорт, 2011. N2. C. 54–57.
10. **Маркин А.В., Шестаков О.В.** Асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет коэффициентов в задаче томографии // Информатика и ее применения, 2010. Т 4. Вып. 2. С. 36–45.
11. **Маркин А.В., Шестаков О.В.** О состоятельности оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 2010. N1. С. 26–34.
12. **Шестаков О. В.** Аппроксимация распределения оценки риска пороговой обработки вейвлет-коэффициентов нормальным распределением при использовании выборочной дисперсии // Информатика и ее применения, 2010. Т 4. Вып. 4. С. 73–81.
13. **Маркин А.В.** Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // Информатика и ее применения, 2009. Т.3. Вып.4. С. 57–63.
14. **Mallat S.** A wavelet tour of signal processing. Academic Press, 1999.
15. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
16. **Boggess A., Narkowich F.** A First Course in Wavelets with Fourier Analysis. Prentice Hall, 2001.
17. **Serfling R.** Approximation theorems of mathematical statistics, John Wiley and Sons. 1980.
18. **Hall P., Welsh A.H.** Limits theorems for median deviation // Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1985. Vol. 37. No. 1. P. 27–36.
19. **Bahadur R.R.** A note on quantiles in large samples // Ann. Statist., 1966. Vol. 37. No. 3. P. 577–580.
20. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. — Т.1.

Компания NXP представила лучший в своем классе стабилизатор LDO в миниатюрном корпусе WLCSP

Компания NXP Semiconductors объявила о выпуске LD6806CX4 — стабилизаторов с ультрамалым, всего 60 мВ, падением напряжения (low-dropout, LDO) — и номинальным током 200 мА. Благодаря сверхминиатюрному (0,76 x 0,76 x 0,47 мм) корпусу WLCSP (wafer-level chip-scale package — корпус на уровне пластины, размером с кристалл) стабилизатор LD6806CX4 требует минимального места на плате и потому идеально подходит для ограниченных по размерам схем в мобильных телефонах, где еще одним важным фактором для успеха является ресурс батареи. В мобильных телефонах батареи разряжаются практически по линейному закону, а LDO компенсирует этот эффект, поддерживая постоянное стабилизированное выходное напряжение. Даже если напряжение батареи смартфона снижается, например до 3,0 В, стабилизатор LD6806CX4 благодаря малому падению напряжения все еще способен поддерживать приложения для SD-карт, требующие стабильного напряжения питания 2,9 В. LD6806CX4 входит в новое семейство NXP LD6806 стабилизаторов LDO, которые уже можно приобрести у основных дистрибуторов.

Ключевые характеристики серии LD6806

- Стабилизаторы LDO новой серии NXP LD6806 имеют очень низкий уровень шума — среднеквадратичное значение составляет 30 мкВ; это исключает нестабильность выходного напряжения и потребность в специальном шумоподавляющем конденсаторе.
- Продукция этой серии подходит и для устройств с питанием от батарей благодаря низкому току в дежурном режиме (0,1 мкА типично), позволяющему снизить энергопотребление и повысить эффективность использования заряда батарей.

- Серия LD6806 имеет превосходную защиту цепей от электростатического разряда — 10 кВ (модель человеческого тела), функцию отключения при перегреве, а также ограничитель тока.
- Имеются модели в следующих корпусах: LD6806F в миниатюрном бессвинцовом корпусе DFN1410-6 (SOT886) размерами всего 1,45 x 1,0 x 0,5 мм, LD6806TD в 5-выводном корпусе общего назначения SOT753 стандартного размера 2,9 x 1,5 x 1,0 мм.
- Помимо моделей в этих корпусах портфель стабилизаторов с низким падением напряжения включает также LDO с высоким коэффициентом подавления шумов источника питания (PSRR) 75 дБ, например, LD6805K в сверхминиатюрном бессвинцовом корпусе QFN (SOT 1194) площадью 1,0 x 1,0 мм и высотой 0,55 мм (максимально).