О РЕШЕНИИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СЛАБО-СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Шамсиев Д.Н.[1], Файзиев А.К.[2]
Email: Shamsiyev17138@scientifictext.ru

[1]Шамсиев Дамин Нажмиддинович - кандидат физико-математических наук, доцент;
[2]Файзиев Азиз Кудратиллаевич – ассистент,
кафедра высшей математики,
Ташкентского государственного технического университета,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в работе исследуется нелинейное слабо-сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, описывающее поперечные колебания длинного нелинейного наследственно-деформируемого цилиндра, скрепленного с нелинейно-упругой оболочкой. Применяя метода Бубнова-Галеркина, нелинейная задача приведена к решению системы линейных дифференциальных уравнений. В линейном случае, при постоянном и периодическом изменении внешних нагрузок найдено точное решение и в нелинейном случае методом исключения слабо-сингулярных особенностей построен алгоритм численного решения.*
Ключевые слова: *слабо-сингулярный, поперечные колебания, идеально-упругая задача.*

ON THE SOLUTION OF ONE NONLINEAR WEAK AND SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH PRIVATE DERIVATIVES

Shamsiyev D.N.[1], Fayziyev A.K.[2]

[1]Shamsiyev Damin Najmiddinovich - Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Associate Professor;
[2]Fayziyev Aziz Kudratillayevich – Assistant,
DEPARTMENT OF HIGHER MATHEMATICS,
TASHKENT STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
TASHKENT, REPUBLIC OF UZBEKISTAN

Abstract: *in this paper, we study a nonlinear weakly singular integral-partial differential equation describing the transverse oscillations of a long nonlinear hereditarily deformable cylinder attached to a nonlinearly elastic shell. Using the Bubnov-Galerkin method, the nonlinear problem is reduced to solving a system of linear differential equations. In the linear case, with a constant and periodic change in external loads, an exact solution was found, and in the nonlinear case with a method for eliminating weakly singular singularities, a numerical solution algorithm was constructed.*
Keywords: *weakly singular, transverse oscillations, ideal elastic problem.*

УДК 539.3

Рассматривается нелинейное слабо-сингулярное интегро- дифференциальное уравнение (ИДУ) с частными производными, описывающее поперечные колебания длинного нелинейного наследственно-деформируемого цилиндра, скрепленного с нелинейно-упругой оболочкой, т. е.:

$$m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+E_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J_0\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\gamma_1\overline{J_0}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3\right]+$$

$$+3G(1-R^*)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J_{\text{ц}}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\gamma_2\overline{J_{\text{ц}}}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2\right]=q(x,t) \qquad (1)$$

где m- масса единицы цилиндра- оболочки, E_0 - модуль упругости оболочки, G- модуль сдвига цилиндра, $J_0, \overline{J_0}, J_{\text{ц}}, \overline{J_{\text{ц}}}$- соответственно момент инерции оболочки и цилиндра, γ_1, γ_2- коэффициенты физической нелинейности, который меньше нуля ($\gamma_1 < 0$) для материала с мягкими и больше нуля ($\gamma_2 > 0$) для материала с жесткими характеристиками,

$$R^* f(t)=\int_0^t R(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

$R(t-\tau)$- ядра наследственности, имеющие слабо-сингулярные особенности типа Абеля, т. е.

$$R(t-\tau)=\varepsilon e^{-\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{\alpha-1}, \varepsilon>0, \beta>0, 0<\alpha<1 \qquad (2)$$

$q(x,t)$- заданная функция, зависящая от x и t.

Требуется найти решение уравнения (1) при следующих обобщенных граничных

$$L_i(W) = 0 \text{ при } x = 0,\ x = t(i = 1,2) \qquad (3)$$

и начальных

$$W|_{t=0} = \alpha_0(x),\quad \dot{W}_t\big|_{t=0} = \beta_0(x) \qquad (4)$$

условиях.

Отметим, что задача (1)- (4) имеет прямое отношение к динамическому расчету ракеты на твердом топливе, рассмотренному впервые в работах [1, 2] при довольно частном предположении формы определяющего уравнения.

Решение нелинейных начально- краевых задач (1)-(4) представляют значительные математические трудности. Поэтому для упрощения задачи произведем дискретизацию по пространственным переменным методом Бубнова-Галеркина. Согласно этому методу решение задачи (1)-(4) ищется в виде

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\varphi_k(x) \qquad (5)$$

где $\varphi_k(x)$- k-я собственная форма колебаний линейной идеально-упругой задачи, $U_k(t)$- искомая функция времени.

Подставляя выражение (5) в уравнение (1) и выполняя известные процедуры метода Бубнова-Галеркина, а также учитывая, что собственные функции удовлетворяют условию ортонормированности

$$\int_0^t m\,\varphi_k(x)\varphi_s(x)dx = \begin{cases} 0, \text{если } k \neq s, \\ 1, \text{если } k = s, \end{cases} \qquad (6)$$

получим следующие системы обыкновенных ИДУ для определения коэффициентов разложения $U_k(t)$:

$$\ddot{U}_k(t) + \omega_k^2[1 - \lambda R^*]U_k(t) = q_k(t) + \\ + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left[C_{i,j,n,k}U_i(t)U_j(t)U_n(t) - D_{i,j,n,k}R^*U_i(t)U_j(t)U_n(t)\right] \qquad (7)$$

С целью получения начальных условий для системы (7) представление (5) подставляется в условие (4). Далее, правая и левая части получившихся соотношений

$$\sum_{k=1}^{N} U_k\varphi_k = \alpha_0(x), \sum_{k=1}^{N} \dot{U}_k\varphi_k = \beta_0(x), \quad \text{при } t = 0 \qquad (8)$$

умножаются на $m\varphi_s$и полученные выражения интегрируются от нуля до t по x. С учетом условий ортонормированности (6) приходим к следующим начальным условиям:

$$U_k(0) = \alpha_k^0 = (\alpha, m\varphi_k),\quad \dot{U}_k(0) = \alpha_k^{(1)} = (\beta, m\varphi_k) \qquad (9)$$

где (,) – одномерное скалярное произведение, $q_k(t) = \int_0^t q(x,t)\,\varphi_k(x)dx$,$\omega_k^2$- частоты собственных колебаний линейной начально-упругой задачи, $C_{i,j,n,k}$ и $D_{i,j,n,k}$- известные константы.

Если в начальный момент $\alpha_k^0 = \alpha_k^{(1)} = 0$, то при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ точное решение системы (7) согласно [3,4] запишется в виде

$$U_k(t) = \frac{1}{\omega_k^2}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)\,q_k(\tau)d\tau - q_k(0)\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)\,\dot{V}_{1k}(\tau)d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^t \dot{q}_k(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(\tau-s)\,V_{1k}(s)ds d\tau\right] \qquad (9)$$

где $\Pi(t) = 1 + \int_0^t \Gamma(\tau)\,d\tau$- функция ползучести, $V_{1k}(s)$- функция косинуса дробного порядка [3,4].

После определения коэффициентов $U_k(t)$ искомое решение найдется по формулам (5). При исследовании поперечных колебаний для нас представляет особый интерес два типа задачи: задача определения $W(x,t)$ при постоянном и периодическом изменении внешних нагрузок.

Рассмотрим эти две задачи. Пусть $q(x,t) = q_0(x)$.

Тогда$q_k = q_k^{(0)} = \int_0^t q_0(x)\varphi_k(x)dx$ и из (9) имеем

$$U_k(t) = \frac{q_k^{(0)}}{\omega_k^2}\left[\Pi(t) - \frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)V_{1k}(\tau)d\tau\right] \qquad (10)$$

Второе слагаемое в (10) описывает симметричный затухающий колебательный процесс [3,4]. Поэтому из (10) нетрудно заметить, что колебания вязкоупругих систем под действием постоянной во времени внешней нагрузки происходит около кривой функции ползучести и затухают с течением времени по этой кривой. В дальнейшем предположим, что внешние силы $q(x,t)$ изменяются со временем по периодическому закону

$$q(x,t) = q_0(x)sinpt$$

В этом случае $q_k(t) = q_k^{(0)}sinpt.$

Тогда решение (9) принимает вид

$$U_k(t) = \frac{q_k^{(0)}}{\omega_k^2}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(t-\tau)sinp\tau d\tau - -p\int_0^t cosp(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_0^t \Pi(\tau-s)\,V_{1k}(s)dsd\tau\right] (11)$$

Таким образом, точное решение (10) и (11) может служить эталоном для оценки различных приближенных решений.

Пусть $\gamma_1 \neq 0, \gamma_2 \neq 0$, тогда задача сводится к решению систем нелинейных слабо-сингулярных ИДУ (7) при начальных условиях (8). Естественным приемом решения этих систем являются численные методы. Для решения системы ИДУ (7) применим метод исключения слабо-сингулярных особенностей:

$$U_{k,s} = \alpha_k^{(1)}t_s + \alpha_k^{(0)} + \sum_{l=0}^{s-1} A_s\,(t_s - t_l)\left\{q_{k,l} - \omega_k^2\left(U_{k,l} - \frac{\lambda\varepsilon}{\alpha}\sum_{m=0}^{l} B_m\, e^{\beta t_m} m U_{k,l-m}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\left[C_{i,j,n,k}U_{i,l}U_{j,l}U_{n,l} - \frac{\lambda\varepsilon}{\alpha}D_{i,j,n,k}\sum_{m=0}^{l} B_m e^{\beta t_m} m U_{i,l-m}U_{j,l-m}U_{n,l-m}\right]\right\} \quad (12)$$

где

$$U_k(t_s) = U_{k,s}, \qquad t_s = s\Delta t, \qquad s = 0,1,2,\dots,N, \qquad q_k(t_s) = q_{k,s},$$

$$A_0 = \frac{\Delta t}{2}, \quad A_l = \Delta t, \qquad l = \overline{1, s-1}, B_0 = \frac{(\Delta t)^\alpha}{2},$$

$$B_m = \frac{(\Delta t)^\alpha}{2}[(m+1)^\alpha - (m-1)^\alpha], \qquad m = \overline{1, l-1},\ B_m = \frac{(\Delta t)^\alpha}{2}[l^\alpha - (l-1)^\alpha]$$

Создать математическое обеспечение для численной реализации данного алгоритма расчета при произвольных внешних воздействиях не представляет особой трудности. В случае собственных колебаний в (12) следует положить $q_{k,l} = 0$. При малых интенсивностях внешних нагрузок во многих случаях достаточную для практических расчетов точность обеспечивает линейная теория.

Таким образом, использование предложенной математической модели и алгоритма численного решения (12) позволяет исследовать собственные и поперечные колебания длинного нелинейного наследственно-деформируемого цилиндра, скрепленного с нелинейно-упругой оболочкой при различных граничных и начальных условиях.

Список литературы / References

1. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. М.: Наука, 1972. 327 с.
2. *Ахенбах Дж.Д.* Динамическое поведение длинного скрепленного с корпусом вязкоупругого цилиндра. // Ракета техника и космонавтика, 1965. № 4.
3. *Бадалов Ф.Б.* Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории упругости. М:.Ташкент. Мехнат, 1987. 269 с.
4. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х.* Краткий обзор и сравнение интегральных методов математического моделирования в задачах наследственной механики твердых тел. // Электронное моделирование. Т., 1989. № 2. С. 81-90.