Полетаев В.П., Богданов Д.А.

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕХНИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

В процессе эксплуатации технических систем под воздействием различных случайных факторов таких, например, как старение, износ, деформация происходит изменение их параметров – точности, мощности, производительности и т.д. Для поддержания показателей качества функционирования машин проводятся работы по техническому обслуживанию, которое в общем случае включает контроль состояния, проверку параметров, проведение профилактических мероприятий и восстановление работоспособности.

Особую остроту и актуальность проблема технического обслуживания имеет для устройств, у которых возможно появление скрытых отказов, обнаруживаемых только при специальной проверке состояния. Например, точность показаний любых контрольно-измерительных средств может быть оценена лишь при проведении периодической поверки.

Важнейшей проблемой при этом является определение такой периодичности технического обслуживания, которая позволит минимизировать суммарные потери, учитывающие затраты времени и средств на обслуживание и потери в результате ухудшения качества функционирования объекта.

При эксплуатации многих типов машин, приборов, аппаратуры, особенно работающих в условиях автоматизированного производства, качество их функционирования принято оценивать долей времени, проведенного в работоспособном состоянии. Отсюда приходим к коэффициенту технического использования $K_{т.и.}$, как критерию длительности интервала между проведением обслуживания. Тогда условие оптимальности будет иметь вид

$$K_{т.и.} = \frac{T_p}{T} \to \max , \qquad (1)$$

где T_p - время нахождения объекта в работоспособном состоянии за период эксплуатации T.

В работе [1] показано, что это отношение можно представить в виде

$$K_{т.и.} = \frac{\int_0^{\tau} P_м(x)dx}{\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)} , \qquad (2)$$

где τ - периодичность обслуживания; $F_м(\tau)$ - функция распределения времени работы без скрытых отказов; $P_м(\tau) = 1 - F_м(\tau)$ - вероятность работы без скрытых отказов (функция надежности); $t_{пп}$ - среднее время, затраченное на проверку состояния объекта; $t_{ап}$ - средняя длительность планово-аварийного обслуживания, включающего проверку состояния и последующее восстановление работоспособности.

При заданных значениях $t_{пп}$ и $t_{ап}$ коэффициент технического использования является функцией от τ. Для длительности периодичности обслуживания, соответствующей экстремуму $K_{т.и.}$, производная от этой функции должна быть равна 0. Можно показать, что этот экстремум будет являться максимумом. Для этого проанализируем знак второй производной в точке экстремума.

Обозначим числитель в формуле (2) $\int_0^{\tau} P_м(x)dx$ за u, знаменатель $\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)$ - за υ. Тогда $K_{т.и.} = \frac{u}{\upsilon}$, $(K_{т.и.})' = \frac{u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon'}{\upsilon^2}$. В точке экстремума $u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon' = 0$, следовательно, $\upsilon = \frac{u \cdot \upsilon'}{u'}$. Найдем вторую производную

$$(K_{т.и.})'' = \frac{(u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon')' \cdot \upsilon^2 - (u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon') \cdot 2\upsilon \cdot \upsilon'}{(\upsilon^2)^2} =$$

$$\frac{\upsilon\left[\left(u'' \cdot \upsilon + u' \cdot \upsilon' - u' \cdot \upsilon' - u \cdot \upsilon''\right) \cdot \upsilon - 2(u' \cdot \upsilon - u \cdot \upsilon') \cdot \upsilon'\right]}{\upsilon^4} =$$

$$\frac{u'' \cdot \upsilon^2 - u \cdot \upsilon \cdot \upsilon'' - 2u' \cdot \upsilon' \cdot \upsilon + 2u \cdot \left(\upsilon'\right)^2}{\upsilon^3} =$$

$$\frac{u'' \cdot \left(\frac{u \cdot \upsilon'}{u'}\right)^2 - u\left(\frac{u \cdot \upsilon'}{u'}\right) \cdot \upsilon'' - 2u' \cdot \upsilon' \cdot \left(\frac{u \cdot \upsilon'}{u'}\right) + 2u \cdot \left(\upsilon'\right)^2}{\upsilon^3} =$$

$$\frac{u'' \cdot \frac{u^2 (\upsilon')^2}{\left(u'\right)^2} - \frac{u^2 \cdot \upsilon' \cdot \upsilon''}{u'} - 2u \cdot \left(\upsilon'\right)^2 + 2u \cdot \left(\upsilon'\right)^2}{\upsilon^3} = \frac{u^2 \cdot \upsilon'}{u' \cdot \upsilon^3}\left(u'' \cdot \frac{\upsilon'}{u'} - \upsilon''\right).$$

Величины u и υ - неотрицательные, их производные $u' = P_м(\tau)$ и $\upsilon' = 1 + (t_{ап} + t_{пп}) f_м(\tau)$ также величины неотрицательные. Проанализируем знак скобки: $u'' = \frac{dP_м(\tau)}{d\tau} = \frac{d(1 - F_м(\tau))}{d\tau} = -f_м(\tau)$; $\upsilon'' = (t_{ап} + t_{пп}) \cdot \frac{df_м(\tau)}{d\tau}$. Тогда $u'' \cdot \frac{\upsilon'}{u'} - \upsilon'' = -f_м(\tau) \cdot \frac{1 + (t_{ап} - t_{пп}) \cdot f_м(\tau)}{P_м(\tau)} - (t_{ап} - t_{пп}) \cdot \frac{df_м(\tau)}{d\tau}$. При $\frac{df_м(\tau)}{d\tau} \geq 0$ рассматриваемая величина всегда отрицательна, следовательно, отрицательна и вторая производная, значит, экстремум является максимумом. Положительный знак производной функции плотности распределения вероятности соответствует тем значениям длительности межповерочного интервала, которые не превышают времени, соответствующего максимуму на кривой распределения, что представляется весьма естественным с точки зрения здравого смысла.

Найдем первую производную $K_{т.и.}$ и приравняем ее 0

$$\frac{\left(\int_0^{\tau} P_м(x)dx\right)'\left(\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)\right) - \int_0^{\tau} P_м(x)dx\left(\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)\right)'}{\left(\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)\right)^2} = 0.$$

Выполнив дифференцирование, получим следующее уравнение

$$P_м(\tau)\cdot\left[\tau + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})F_м(\tau)\right] - \int_0^{\tau} P_м(x)dx\cdot\left[1 + t_{пп} + (t_{ап} - t_{пп})f_м(\tau)\right] = 0. \qquad (3)$$

В уравнении (3) за $f_м(\tau) = \frac{dF_м(\tau)}{d\tau}$ обозначена плотность распределения вероятности времени работы без скрытых отказов. Преобразуем уравнение (3), раскрыв скобки

$$(t_{ап} - t_{пп})\left[P_м(\tau)\cdot F_м(\tau) - f_м(\tau)\cdot\int_0^{\tau} P_м(x)dx\right] + P_м(\tau)\cdot\tau - \int_0^{\tau} P_м(x)dx = -P_м(\tau)\cdot t_{пп}.$$

Разделим обе части равенства на произведение $-P_м(\tau)\cdot(t_{ап} - t_{пп})$:

$$-F_м(\tau) + \frac{f_м(\tau)}{P_м(\tau)}\cdot\int_0^{\tau} P_м(x)dx - \frac{\tau}{t_{ап} - t_{пп}} + \frac{\int_0^{\tau} P_м(x)dx}{P_м(\tau)\cdot(t_{ап} - t_{пп})} = \frac{t_{пп}}{t_{ап} - t_{пп}}.$$

Проведя группировку слагаемых в левой части равенства, получим уравнение

$$\frac{t_{пп}}{t_{ап} - t_{пп}} = \frac{\int_0^{\tau} P_м(x)dx}{P_м(\tau)}\left(f_м(\tau) + \frac{1}{t_{ап} - t_{пп}}\right) + F_м(\tau) - \frac{\tau}{t_{ап} - t_{пп}},$$

которое для удобства вычислений можно представить в виде

$$\frac{t_{пп}}{t_{ап} - t_{пп}} = \frac{\int_0^{\tau} P_м(x)dx}{P_м(\tau)}\left(f_м(\tau) + \frac{1}{t_{ап} - t_{пп}}\right) + P_м(\tau) - 1 - \frac{\tau}{t_{ап} - t_{пп}} \qquad (4).$$

Оптимальное значение периодичности обслуживания τ_0 можно найти как решение уравнения (4), а можно с помощью формулы (2) по положению максимума $K_{т.и.}$, рассчитав его зависимость от τ. Тем не менее, при использовании любого из способов нахождения значения τ_0 решение будет зависеть от выбора вида $f_м(\tau)$, т.е. функции распределения времени работы без скрытых отказов, которая определяет и вид функции надежности $P_м(\tau)$.

Ниже приведены результаты исследования уравнения (4) для различных законов распределения времени безотказной работы. В качестве исходных материалов использованы статистические данные о надежности приборов контроля линейных размеров, полученные при их реальной эксплуатации в условиях автоматизированного подшипникового производства. Исходя из характера построенных гистограмм времени безотказной работы, установлено, что такой вид функции плотности распределения могут иметь несколько известных распределений – гамма распределение, распределение Рэлея, распределение Вейбулла, нормальное распределение.

При решении вопроса о том, какой из теоретических законов распределения наилучшим образом согласуется с эмпирическим распределением, для каждого теоретического закона в соответствии с критерием Пирсона была рассчитана величина

$$\chi^2_{эмп} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(P_{i\,т} - P_{i\,э}\right)^2}{P_{i\,т}},$$

где n - число объектов наблюдения, равное для нашего случая 60; $P_{i\,т}$, $P_{i\,э}$ - соответственно теоретическая и экспериментальная вероятность попадания случайной величины в i-ый интервал.

В приведенной ниже табл.1 указаны значения $\chi^2_{эмп}$ и значения вероятности p того, что в силу чисто случайных причин мера расхождения между теоретическими и эмпирическими распределениями будет меньше, чем $\chi^2_{эмп}$. Под объектом 1 и объектом 2 подразумеваются различные типы объектов наблюдения.

Таблица 1

Вид распределения	Объект 1		Объект 2	
	$\chi^2_{эмп}$	p	$\chi^2_{эмп}$	p
Гамма-распределение	1,426	0,984	4,370	0,735
Распределение Рэлея	3,691	0,882	6,033	0,644
Распределение Вейбулла	2,855	0,897	5,618	0,587
Нормальное распределение	6,703	0,465	11,256	0,134

Как видно из табл.1 сравнение опытных и теоретических распределений приводит к неоднозначному результату, т.к. все указанные распределения можно принять для описания наблюдаемых на практике распределений, поскольку во всех случаях вероятность p выше минимально допустимого уровня, равного 0,1. Хотя гамма-распределение наилучшим образом описывает статистические данные, при расчете оптимальной периодичности технического обслуживания τ_0 в исследовательских целях рассматривались все четыре вида распределения.

Решение уравнения (4) для поиска оптимального τ_0 осложняется двумя обстоятельствами. Первое из них – это невозможность получить в явном виде выражении для τ, поэтому для различных τ при заданных значе-

ниях $t_{пп}$ и $t_{ап}$ проводился расчет правой части уравнения(4) - функции $\varphi(\tau)$. По таблице значений $\varphi(\tau)$ находилась величина τ_0, при которой левая часть уравнения (4) равна правой.

Второе обстоятельство заключается в том, что используемая в уравнении функция надежности $P_м(\tau)$ имеет аналитический вид только для распределений Рэлея и распределения Вейбулла, интегральная же функция $\int_0^{\tau} P_м(x)dx$ не имеет аналитического вида для всех типов распределений. В связи с этим при выполнении расчетов с использованием программы Mathcad для каждого вида распределения указывался конкретный вид функции плотности распределения вероятностей $f_м(\tau)$, а функция надежности определялась как $P_м(\tau) = 1 - F_м(\tau) = 1 - \int_0^{\tau} f_м(x)dx$.

В табл.2 приведены результаты расчетов τ_0 по уравнению (4) для объекта 2 при различных соотношениях параметров $t_{пп}$ и $t_{ап}$.

Таблица 2

Вид распределения, параметры	$t_{пп}$, час	$t_{ап} / t_{пп}$ =2	$t_{ап} / t_{пп}$ =5	$t_{ап} / t_{пп}$ =10
		τ_0, час		
Гамма-распределение с параметрами $\lambda = 0,001074269 \ \frac{1}{час}$, $m = 2,369837871$.	1	690	688	683
	5	821	809	791
	10	889	867	836
Распределение Рэлея с параметром $\sigma = 1974$ час.	1	226	225	222
	5	385	377	366
	10	482	468	447
Распределение Вейбулла с параметрами $m = 1,576$, $a = 2206$ час.	1	144	142	141
	5	266	261	252
	10	346	336	320
Нормальное распределение с параметрами $a = 2206$ час, $\sigma = 1433$ час.	1	145	156	172
	5	302	323	352
	10	410	434	468

Аналогичные расчеты для других объектов показывают, что τ_0 существенно зависит не только от вида, но от параметров закона распределения. В соответствии с табл.2 очевидна также зависимость оптимальной периодичности обслуживания от времени, потраченного на оценку состояния объекта $t_{пп}$ и времени восстановления работоспособности $t_{ап}$ в случае скрытого отказа.

Помимо уравнения (4) для нахождения τ_0 использовалось и выражение (2). Вначале вычислялись значения $K_{т.и.}$ с большим шагом изменения τ, чтобы установить диапазон, в котором находится максимум. Затем в этом диапазоне вычисления велись с мелким шагом, для определения τ_0, при котором коэффициент технического использования достигает максимума. Как и следовало ожидать, результаты в обоих случаях совпадают, что свидетельствует о точности предложенной для расчета математической модели.

Таким образом, предложена универсальная математическая модель, позволяющая оптимизировать периодичность проведения обслуживания технических систем, а также методика выполнения расчетов. При этом главным вопросом объективности принятия решения о величине τ_0 становится проблема адекватной оценки статистической информации с целью определения вида закона распределения времени безотказной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полетаев В.П. Планирование оптимальных межповерочных интервалов рабочих средств измерений в условиях массового производства // Метрология. – 1977.№10. - С.27-33.